FACULDADE DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Rafael Winícius da Silva Bueno

AS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES E A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Porto Alegre

2009

RAFAEL WINÍCIUS DA SILVA BUENO

AS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES E A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Lori Viali

Porto Alegre

2009

RAFAEL WINÍCIUS DA SILVA BUENO

AS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES E A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada, em 06 de janeiro de 2009, pela Banca Examinadora.

BANCA EXAMINADORA:

____

Prof. Dr. Lori Viali – PUCRS

____

Profa. Dra. Helena Noronha Cury - UNIFRA

____

Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo - UFRGS

AGRADECIMENTOS

Ao *Professor Doutor Lori Viali*, pela orientação, incentivo e confiança dedicados a este trabalho.

À *Professora Doutora Helena Noronha Cury*, pela participação na Banca Examinadora e pela orientação durante a elaboração do Projeto desta Dissertação.

À *Professora Doutora Elisabete Zardo Búrigo*, pela sua participação na Banca Examinadora, pelas oportunidades de aprendizado e pelo apoio dedicado a minha formação desde a graduação.

À *Coordenação e aos Professores* do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, pela oportunidade de crescimento e pela contribuição significativa à minha formação.

Aos *grandes professores de Matemática* com os quais tive a oportunidade de conviver, desde minha formação básica até a conclusão desta dissertação, e de aprender sobre os mais diversos aspectos da vida e, principalmente, sobre essa ciência tão gratificante que passou a fazer parte do meu cotidiano e a me proporcionar momentos de grande prazer.

À *minha família*, que sempre esteve presente nos momentos importantes da minha vida, incentivando-me e oferecendo-me todo o suporte necessário para que pudesse me dedicar a esta pesquisa e ao meu desenvolvimento e crescimento profissional e intelectual.

Nascemos fracos, precisamos de força, nascemos carentes de tudo, precisamos de assistência; nascemos estúpidos, precisamos de juízo. Tudo o que não temos ao nascer e de que precisamos quando grandes nos é dado pela educação.

Jean-Jacques Rousseau

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo investigar a construção do conceito de função e as perspectivas atuais para a aprendizagem desse conteúdo. A investigação é feita por meio de uma análise da construção histórica do conceito, analisando a importância das representações nesse processo, para, a seguir, serem investigadas concepções atuais em Educação Matemática que abordam a aprendizagem de funções. São estudados, nesse sentido, conceitos relacionados à Didática Francesa, em especial, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por Raymond Duval, e as idéias propostas por estudiosos oriundos do grupo de pesquisa de Psicologia da Educação Matemática, relacionadas ao Sentido das Representações, com atenção destacada ao Sentido do Símbolo e ao Sentido do Gráfico. A partir dessas análises, são discutidas as concepções emergentes da investigação, confrontando as teorias das diferentes vertentes estudadas e as informações históricas levantadas, para, então, propor idéias para o ensino e aprendizagem do conceito de função, fundamentadas nas suas diversas formas de representação e suas implicações.

Palavras-chave: Função. Registros de Representação Semiótica. Sentido do Símbolo. Sentido do Gráfico.

ABSTRACT

This research focused on the construction of the concept of function and the current prospects for learning this content. Research is done through an analysis of the historical construction of the concept, analyzing the importance of representations in this process, to then investigate current conceptions in Mathematics Education about the learning of functions. Are studied, with this proposal, concepts related to French Didactic, in particular, the Theory of the Registers of Semiotic Representation, developed by Raymond Duval, and the ideas proposed by scholars of the research group from the Psychology of Mathematics Education, related to the Representation Sense, carefully highlighted the meaning of the Symbol Sense and Graph Sense. From these analyses, emerging concepts of this research are discussed, confronting the theories of the different strands studied and the historical information raised, to propose ideas for the teaching and learning of the concept of function, based on their various forms of representation and its implications.

Keywords: Function. Registers of Semiotic Representation. Symbol Sense. Graph Sense.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde o Ensino Médio e mesmo durante a graduação em Licenciatura Plena em Matemática, o ensino de funções foi uma questão recorrente em meus pensamentos. Imaginava que deveria haver uma maneira mais entusiasmante, instigante de imergir nos seus conceitos, definições e representações. Deparava-me, porém, apenas com métodos repetidos e repetitivos, preocupados com a competência formal, visando, somente, a transmitir o conteúdo, sem contribuição significativa para a construção do pensamento funcional (BRAGA, 2006). Uma pergunta me acompanhava: “Será que não há outra alternativa para o ensino de funções?”.

Ademais, penso que o processo de construção do conhecimento deve se basear na discussão, na criação de conjecturas por parte dos alunos, na argumentação, na contra argumentação para finalmente se chegar à formalização de novos conceitos. Sobre o estilo ainda soberano de aulas, conforme D’Ambrósio (1997),

> [...] carteiras cartesianamente dispostas, professores na frente, quadro-negro como foco único de curiosidade e de atenção intelectual. O material de ensino é composto por livros e cadernos padronizados, listas de chamada organizadas por critérios rígidos, testes, tarefa, elogios e críticas públicas, notas com prêmios ou punições, e outras características mais. Aluno feliz que faz o que gosta e quer, rende muito. Mas o resultado é praticamente o mesmo, em todos os níveis de escolaridade e em todas as disciplinas: o aluno é massacrado no seu comportamento, agredido na sua inteligência e tolhido na sua criatividade. (p. 72).

Surgiu, então, ao final da graduação, uma oportunidade de explorar essa questão por meio de uma pesquisa. Nessa oportunidade, foram analisados livros didáticos usados atualmente em escolas de educação básica, procurando descrever o enfoque que cada autor dá ao conceito de função e confrontando com a abordagem prevista nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Foram pesquisados, também, através de bibliografia pertinente, quais os conceitos fundamentais para a compreensão do conceito de função, o que é o pensamento funcional e quais são as maiores dificuldades cognitivas dos alunos na compreensão desse tema. Assim, estudados os referenciais teóricos, foi elaborada proposta de ensino de funções e gráficos com ênfase na construção dos conceitos fundamentais pesquisados.

Mesmo após essa incursão na investigação sobre o ensino de funções e a par da importância intrínseca desse conteúdo, por ser um elo entre as mais diversas áreas da Matemática, tive a convicção de que ainda havia mais a ser explorado. Acreditava que a investigação de algumas vertentes de Ensino de Matemática, assim como da construção histórica do conceito de função, contribuiria para uma melhor compreensão dos significados construídos com o estudo desse conteúdo. Com essa compreensão, entendi que teria maiores e melhores condições de elaborar conceitos, de analisar aspectos e de empregar metodologias adequadas para proporcionar aos estudantes uma compreensão mais efetiva do conceito de função.

Abrantes et al. (1999) consideram que “compreender o que é uma função implica ter experiência de lidar com diversas formas de representação (em tabelas, gráficos, regras verbais, expressões algébricas ou outras) e entender as facetas que este conceito pode apresentar.” (p. 108). Concordando com esses autores, entendo que uma aprendizagem efetiva do conceito de função envolve, decisivamente, o desenvolvimento da capacidade de transitar naturalmente pelas suas mais variadas representações.

Dessa forma, a pesquisa foi conduzida por meio de uma investigação acerca da construção histórica do tema e de abordagens atuais em Educação Matemática que enfocam a aprendizagem desse conteúdo, sempre com vistas a uma contribuição para a evolução do ensino de funções e suas representações.

Este trabalho, de cunho teórico, foi dividido, portanto, em seis capítulos. Neste capítulo 1, procurei trazer uma contextualização das razões e motivações que me levaram a essa pesquisa. No capítulo 2, são apresentados o seu problema, questões e objetivos. No capítulo 3, é discutida a metodologia de pesquisa empregada. Já, no capítulo 4, são trazidos os pressupostos teóricos investigados, contemplando a construção histórica do conceito de função, perspectivas gerais sobre conceitos da Didática Francesa e teorias de pesquisadores relacionados à Psicologia da Educação Matemática. Nesse capítulo, são destacadas a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, e as concepções sobre Sentido do Símbolo e Sentido do Gráfico, relacionando-as, especificamente, à construção do conceito de função e suas representações. No capítulo 5, são destacadas as conclusões construídas a partir das investigações realizadas e do confronto das principais idéias abordadas. Para finalizar, no último capítulo, é trazida uma sugestão de situação-problema que é capaz de proporcionar oportunidades para serem exploradas as teorias pesquisadas dentro de um ambiente de ensino e aprendizagem.

2 PROBLEMA, QUESTÕES DE PESQUISA E OBJETIVOS

O percurso da pesquisa iniciou-se com a minha inquietação quanto ao ensino do conceito de função, como é praticado atualmente em muitas escolas, e com suas implicações para o processo de aprendizagem. Surgiu, a partir dessa insatisfação, o foco que exponho aqui como o problema desta pesquisa:

- *Como foi construído o conceito de função e quais as perspectivas atuais para a aprendizagem desse conteúdo?*

Pela amplitude desse problema, surgem questões mais específicas, que carregam, nas suas respostas, aspectos fundamentais para alcançar melhor compreensão do tema e, conseqüentemente, maior competência para a construção de possíveis respostas ao problema proposto. Estas são as questões de pesquisa:

- *Como se deu a construção histórica do conceito de função?*
- *Quais as concepções, na perspectiva da Didática Francesa e de pesquisadores da Psicologia da Educação Matemática, relacionadas com a aprendizagem de funções?*
- *Que conceitos e métodos de ensino possibilitam uma melhor compreensão do conceito de função e de suas representações?*

Fundamentados no problema de pesquisa e nas questões que surgiram como decorrência, foram estabelecidos os objetivos desta pesquisa.

Objetivo Geral

Investigar a construção histórica do conceito de função e as perspectivas atuais para a aprendizagem desse conteúdo.

Objetivos Específicos

a) Revisar a construção histórica do conceito de função e suas representações;

b) investigar as concepções e conceitos das vertentes de estudos em Educação Matemática intituladas Didática Francesa e Psicologia da Educação Matemática;

c) confrontar e comparar as características emergentes da investigação das concepções apoiadas nas duas vertentes, referentes à relação entre as representações e a aprendizagem do conceito de função;

d) sugerir uma abordagem para o ensino do conceito de função e suas representações, fundamentada na investigação e no confronto das idéias provenientes das vertentes teóricas relativas a esse conteúdo.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

A pesquisa possui cunho qualitativo, pois se baseia na interpretação e compreensão das teorias (ALVES-MAZZOTTI , 1999) apresentadas pelas vertentes de estudos apoiadas na Didática Francesa e no grupo de estudos de Psicologia da Educação Matemática. Mais especificamente, trata-se de um tipo de estudo documental ou bibliográfico, definido por Fiorentini e Lorenzato (2006) como metanálise e caracterizado como

> [...] uma revisão sistemática de outras pesquisas, visando realizar uma avaliação crítica das mesmas e/ou produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos. (p. 103).

A palavra “metanálise” foi cunhada pelo lingüista Otto Jerpersen para indicar o ato de quebrar uma palavra ou frase em segmentos ou significados distintos do original. (Wikipedia). Segundo Moreno (2008), é um processo em que “os falantes modificam um vocábulo que lhes causa estranheza para deixá-lo mais ou menos parecido com algum vocábulo com que estão familiarizados.” (p. 7).

Nas ciências da saúde, são realizados muitos estudos empregando a metanálise, que é entendida, então, como uma técnica utilizada para combinar todos os dados de todos os estudos disponíveis, para obter o máximo de informações estatísticas.

Alguns autores também se referem à metanálise como uma “revisão sistemática” que, “assim como outros tipos de estudo de revisão, é uma forma de pesquisa que utiliza como fonte de dados a literatura sobre determinado tema” (SAMPAIO; MANCINI, 2007, p. 84). É nesse sentido que Dario Fiorentini e componentes de seu grupo de pesquisa têm empregado o termo. Passos et al. (2006) concebem a metanálise como

> uma modalidade de pesquisa que objetiva desenvolver uma revisão sistemática de estudos já realizados em torno de um mesmo tema ou problema de pesquisa, fazendo uma análise crítica dos mesmos com o intuito de extrair deles, mediante contraste e inter-relacionamento, outros resultados e sínteses. (p. 209).

Emprego o termo “metanálise” para caracterizar este estudo, visto que nesta pesquisa foi feita uma análise das concepções e conceitos da vertente de estudos em Educação Matemática intitulada Didática Francesa, bem como de idéias apresentadas por investigadores do grupo de Psicologia da Educação Matemática, objetivando, a partir dessa análise, construir novas concepções e uma nova abordagem para o ensino de funções e suas representações.

Para o desenvolvimento da pesquisa, foram estabelecidas as seguintes etapas:

1. busca de bibliografia pertinente e estudo e investigação acerca da construção histórica do conceito de função;
2. estudo aprofundado das teorias relativas ao conceito de função das duas vertentes de estudos e pesquisa em Educação Matemática: a Didática Francesa e a Psicologia da Educação Matemática;
3. construção teórica e argumentativa para confronto das concepções e conceitos das duas teorias;
4. sugestão, a partir dos estudos realizados, de princípios e conceitos a serem (re)construídos no estudo do conceito de função e suas representações.

4 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Este capítulo contempla a construção histórica do conceito de função e aborda, em seguida, perspectivas gerais sobre as teorias da Didática Francesa e de pesquisadores relacionados à Psicologia da Educação Matemática. Aprofunda, na seqüência, o estudo das idéias de cada uma dessas vertentes, relacionadas, especificamente, ao estudo de funções e suas representações.

No que concerne à Didática Francesa, foi aprofundado o estudo da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, explorando sua visão de compreensão plena de um conteúdo matemático. Já, no que diz respeito ao estudo específico das teorias provenientes do grupo de estudos relacionado à Psicologia da Educação Matemática, foram destacados os conceitos de "Sentido do Símbolo" e de "Sentido do Gráfico".

4.1 A CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Para a construção do conceito de função com o qual se trabalha atualmente nas escolas e universidades, foram necessárias contribuições de vários matemáticos durante séculos de estudos. Nesse período, surgiram conceitos que alicerçaram o pensamento desses matemáticos rumo à construção da definição atual de função e suas implicações. Proponho-me, neste capítulo, a reconstruir o caminho percorrido para essa construção, fundamentado, principalmente, nos trabalhos de Monna (1972), Yuoschkevitch (1976), Ponte (1992), Boyer (1996) e Eves (2004).

De acordo com Yuoschkevitch (1976), em seu estudo acerca da evolução da construção do conceito de função ocorrida até a metade do séc. XIX, os principais estágios do desenvolvimento dessa ferramenta são a Antiguidade, a Idade Média e a Modernidade.

Na Antiguidade, o pensamento matemático não criou uma noção geral da idéia de variável ou de função. Apenas casos práticos e particulares, principalmente, no campo da Astronomia, foram estudados através de métodos quantitativos e da construção de tabelas que representavam funções entendidas como relações entre conjuntos discretos de constantes dadas. Na Idade Média, mais especificamente, na ciência européia do séc. XIV, cada caso particular de dependência entre duas quantidades era definido através de uma descrição verbal ou gráfica, em detrimento do uso de fórmulas.

Na Modernidade, no final do séc. XVI e, principalmente, durante o séc. XVII, expressões analíticas de funções começam a surgir. A classe analítica de funções expressas por somas de séries infinitas se torna a mais usual. Segundo Yuoschkevitch (1976), "foi o método analítico de introdução das funções que revolucionou a Matemática e, devido a sua grande eficiência, conduziu as funções a um papel central na área das ciências exatas." (p. 39)[1].

Entretanto, em meados do séc. XVIII, a representação de função como uma expressão analítica se provou insuficiente. Uma nova definição de função, que, posteriormente, acabou se tornando universalmente aceita em análise matemática, foi introduzida nesse período. Já, na segunda metade do séc. XIX, essa definição de função abriu imensas possibilidades para o desenvolvimento da teoria de funções, mas acabou, também, ocasionando dificuldades lógicas, o que, durante o séc. XX, causou o movimento para que a essência desse conceito fosse revista, assim como outros conceitos importantes da análise matemática. Esse período, portanto, será discutido após o período definido como Modernidade.

4.1.1 A Antiguidade

Por volta do ano 2.000 a.C., de acordo com Eves (2004), a matemática babilônica já havia evoluído para uma álgebra bem desenvolvida. Tábulas sexagesimais eram amplamente utilizadas para calcular valores de quadrados e cubos dos números naturais de 1 a 30 e também de valores de $n^2 + n^3$, relativos a esse intervalo, com o objetivo de estudar o movimento dos planetas na esfera celeste. As funções empiricamente tabuladas acabaram se tornando, posteriormente, o suporte para a seqüência do desenvolvimento de toda a astronomia.

Novas contribuições para a construção do conceito de função surgiram na Grécia, nos estudos matemáticos e das ciências naturais. Tentativas, atribuídas aos pitagóricos, de estabelecer leis acústicas indicam a busca por relações de interdependência entre quantidades.

Também na Grécia, já como parte do Império Romano, as funções relativas a problemas astronômicos e matemáticos eram objeto de estudos similares aos da análise matemática atual. De acordo com os objetivos de estudo, funções eram tabuladas por meio do uso de interpolação linear e, em alguns casos simples, até mesmo por meio de limites de proporções de duas quantidades infinitamente pequenas. Problemas envolvendo valores

[1] Todos os textos em língua estrangeira foram traduzidos pelo autor desta dissertação.

extremos e tangentes, ou, ainda, o cálculo de áreas, volumes e comprimentos, eram resolvidos com a aplicação de métodos semelhantes aos utilizados no Cálculo Diferencial e Integral.

Entretanto, segundo Yuoschkevitch (1976), o simbolismo grego, até o séc. III d.C., restringiu-se apenas a denotar várias quantidades por diferentes letras do alfabeto. Somente com os trabalhos de Diofanto[2] e, possivelmente, de seus predecessores mais próximos, surgem os primeiros sinais, como, por exemplo, um sinal de igualdade. Contudo, com a decadência da sociedade antiga, suas notações acabaram não sendo desenvolvidas.

Apesar da carência de um simbolismo mais sofisticado, os gregos deram importante contribuição para o aumento do número de dependências funcionais utilizadas e dos métodos de estudá-las, mas a idéia geral do conceito de função não existia. Yuoschkevitch (1976) faz questão de afirmar que existe uma grande distância entre o instinto de funcionalidade e a sua percepção e que, na Antiguidade, além de o termo *função* não ser utilizado, não havia sequer alusões a uma idéia mais geral e abstrata de relações de dependências.

As idéias de variação quantitativa ou de mudança se faziam presentes no pensamento grego. Problemas de movimento, continuidade e infinito foram considerados. Entretanto, nem o sentido de velocidade como razão entre o espaço percorrido e o tempo, nem, obviamente, a idéia de velocidade instantânea foram introduzidos na Antiguidade. Portanto nenhum desses conceitos foi explorado pelos estudos gregos, de forma a gerar um pensamento mais complexo e abstrato com relação à noção de variabilidade.

4.1.2 A Idade Média

Com a decadência da cultura da Antiguidade, os novos estudos das ciências nos países de cultura árabe não trouxeram contribuições relevantes para a construção do conceito de função. Como exceção, há o estudo do movimento acelerado, no séc. X, que, no entanto, não exerceu muita influência nos seus contemporâneos.

As primeiras idéias relativas à noção de função de uma forma mais geral e abstrata ocorrem no séc. XIV, nas escolas de Filosofia Natural de Oxford e Paris. Conforme Yuoschkevitch (1976), “seguindo pensadores como Robert Grosseteste e Roger Bacon, essas duas escolas, que floresceram no séc. XIV, declararam a Matemática como o principal instrumento para o estudo de fenômenos naturais.” (p. 45).

---

[2] Difanto de Alexandria viveu no século III e escreveu *Aritmética*, obra na qual propõe uma abordagem analítica da teoria algébrica, o que eleva o autor, segundo Eves (2004), à condição de gênio em seu campo.

Nesse período, surgiram muitos conceitos de grande importância para a evolução das ciências exatas, como, por exemplo, velocidade instantânea, aceleração e quantidade variável, que era considerada como um fluxo de qualidade. Todos esses conceitos contribuíram na síntese da cinemática e do pensamento matemático.

Simultaneamente, conforme Caraça (2005), em face das experiências e observações realizadas, percebeu-se que muitos fenômenos naturais apresentavam certa regularidade que poderia ser descrita através de leis quantitativas.

Nesse sentido, o estudo da intensidade das formas e seu aspecto mais importante, a cinemática, eram abordados na Inglaterra em um contexto aritmético, enquanto, na França, Nicole Oresme[3] (1323-1382) desenvolveu esse estudo através de uma abordagem geométrica, introduzindo o conceito de *latitude das formas* em meados do séc. XIV. As formas ou qualidades são fenômenos como a luz, a distância, a velocidade, que possuem vários níveis de intensidade e que mudam continuamente, dentro de limites dados.

Oresme representou os níveis de intensidade por segmentos de correspondente comprimento ou latitudes que, por sua vez, eram erguidos em um eixo que poderia formar um ângulo qualquer com o eixo das longitudes, mas que, regularmente, era construído de maneira que formasse um ângulo reto. Segundo Yuoschkevitch (1976), essa teoria, desenvolvida no séc. XIV, parece ser fundamentada em um uso de idéias gerais sobre quantidades variáveis dependentes. A latitude de uma qualidade é interpretada como sendo uma quantidade variável dependente de sua longitude, e a representação, denominada linha de auge, é entendida como uma representação gráfica de funções contínuas.

Dessa forma, segundo Rossini (2006), Oresme foi a primeira pessoa a utilizar coordenadas para representar graficamente a velocidade em função do tempo. Para tanto, marcava pontos, representando as longitudes, ou os instantes de tempo dados, e, para cada instante, traçava, perpendicularmente à reta das longitudes, um segmento de reta, denominado latitude, cujo comprimento representava a velocidade. As extremidades desses segmentos, alinhadas, formavam a linha de auge.

De acordo com Boyer (1996), "os termos latitude e longitude, que Oresme usou, são equivalentes, num sentido amplo, à nossa ordenada e abscissa, e sua representação gráfica assemelha-se com nossa geometria analítica." (p. 181).

Com a teoria da latitude das formas, o estudo das funções do tempo se desenvolveu. Considerações sobre o infinito na resolução de problemas dessa área eram comuns. Conceitos

[3] Nicole Oresme, nascido na Normandia, de acordo com Eves (2004), foi o maior matemático de sua época.

como velocidade instantânea e aceleração passaram a ser amplamente estudados, e a descoberta mais importante da época, para a mecânica e talvez também para a Matemática, foi a determinação da velocidade média de um movimento uniformemente acelerado. Em Merton College, Oxford, segundo Boyer (1996), foi deduzida uma formulação, denominada regra de Merton, expressando, em termos de distância e tempo, que, em linguagem atual, a velocidade média é a média aritmética entre as velocidades inicial e final.

Segundo Yuoschkevitch (1976), Oresme também provou o teorema de Merton, mas calculando a velocidade média através da área de um triângulo ou trapézio descrito no movimento.

Durante os séc. XV e XVI, a teoria da latitude das formas gozou de enorme prestígio e se difundiu, principalmente, na Inglaterra, França, Itália e Espanha, sendo exposta em universidades e em livros publicados na época.

Analisando, porém, o alcance da teoria da latitude das formas e suas implicações, pode-se perceber, segundo Ponte (1992), que, apesar da grande evolução em termos de generalização e abstração e de alguns resultados particulares alcançados, o estudo das funções em Matemática, como um conceito e objeto individualizado, ainda não havia sido alcançado.

4.1.3 A Modernidade

O desenvolvimento do conceito de função foi catalisado pelo desenvolvimento da álgebra simbólica e pela extensão do conceito de número, englobando tanto o conjunto dos números reais quanto o número imaginário *i* e o conjunto dos números complexos. Estes foram os conceitos matemáticos fundamentais que proporcionaram a introdução do conceito de função como uma relação entre conjuntos numéricos e como uma expressão analítica através de fórmulas.

O que deve ser enfatizado, também, na concepção de Yuoschkevitch (1976),

> [...] é a introdução de inúmeros sinais para operações e relações matemáticas (em primeiro lugar, para adição, subtração, potência e igualdade) e, acima de tudo, sinais para quantidades desconhecidas e parâmetros, que Viète em 1591 denotou por vogais A, E, I,... e consoantes B, G, D,... do alfabeto latino, respectivamente. A importância dessa notação, que, pela primeira vez, possibilitou colocar no papel a forma simbólica de equações algébricas e expressões contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários (uma palavra também originada por Viète), dificilmente pode ser estimada. (p. 51).

Contudo, o simbolismo de François Viète[4] (1540-1603), que não avançou no estudo do conceito de função, carecia de progressos significativos, e esses logo vieram por meio das contribuições de inúmeros intelectuais, como René Descartes (1596-1650), Isaac Newton (1642-1727), Gottfried Leibniz (1646-1716) e Leonhard Euler (1707-1793), entre outros.

A emergência do conceito de função como um objeto individualizado da Matemática começou, segundo Ponte (1992), com o início do Cálculo Infinitesimal. Primeiramente, Descartes estabeleceu, claramente, que uma equação de duas variáveis, representada geometricamente por uma curva, indica a dependência entre as variáveis.

Através dos estudos de Descartes, segundo Yuoschkevitch (1976),

> [...] pela primeira vez e de forma clara, é sustentado que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de uma maneira que é possível calcular a partir do valor de uma delas o valor correspondente da outra. (p. 52).

A introdução de funções escritas através de equações iniciou uma verdadeira revolução no estudo de Matemática. O uso de expressões analíticas, regidas por operações e relações específicas, introduzido, independentemente, por Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes, originou características específicas do estudo do tema. Proveniente da álgebra aplicada à geometria, essa nova forma de representar as funções logo se estendeu a outras áreas da Matemática e, especialmente, ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Para Monna (1972), “Descartes, com sua aplicação de métodos algébricos à geometria, abriu o caminho para a introdução da noção de função que, gradualmente, se desenvolveu até sua forma moderna”. (p. 58).

Inicialmente, porém, o alcance das funções expressas analiticamente estava restrito às funções algébricas. Apenas com a descoberta de Newton, no séc. XVII, de como representar funções através de séries de potência, tornou-se possível a representação analítica de qualquer relação funcional estudada até então.

A idéia de que uma expressão infinita poderia ser uma função não era recente: progressões geométricas decrescentes e infinitas já eram conhecidas, em sua forma inicial, há bastante tempo. Entretanto, apenas na segunda metade do séc. XVII, as séries de potência acabaram sendo percebidas como instrumento importante para o estudo das funções. Devido às séries de potência, o conceito de função passou a ocupar papel central no estudo da Análise Matemática e foi o cerne das teorias de desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

---

[4] Frequentemente conhecido por Vieta e, segundo Eves (2004), o maior matemático francês do séc. XVI.

4.1.3.1 Isaac Newton e Gottfried Leibniz

Newton[5], sucessor de Isaac Barrow[6] (1630-1677), apresentou, em Cambridge, nos anos de 1664 e 1665, uma interpretação cinemática e geométrica clara das concepções básicas da Análise Matemática, descrevendo concepções de tempo e movimento, escolhendo o tempo como um argumento universal e interpretando as variáveis dependentes como uma quantidade continuamente fluente que possui uma velocidade de variação.

Os dois problemas principais do Cálculo Infinitesimal eram expressos em termos mecânicos: dada a lei para a distância, determinar a velocidade do movimento (diferenciação), e, dada a velocidade de um movimento, determinar a distância percorrida (integração). No entanto, as concepções de Newton eram mais abstratas.

Em 1669, Newton comunicou a Barrow o seu *Método dos Fluxões*[7], que, apesar de escrito em 1671, foi publicado somente em 1736. Segundo Eves (2004),

> Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade ele dava o nome de *fluente* (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de *fluxo* do fluente. (p 439. Grifos do autor).

Portanto, apenas as noções básicas foram introduzidas através da cinemática. O Método das Fluxões, na realidade, foi desenvolvido pelas fluentes, expressas analiticamente ou em forma finita ou por somas infinitas de séries de potência.

Por outro lado, Leibniz[8] também chegou, a partir das curvas geométricas, às noções básicas de diferenciação e integração. Entre os anos de 1673 e 1676, inventou o seu Cálculo e, em 1675, utilizou, pela primeira vez, o símbolo de integral, um *S* alongado, vindo da primeira letra da palavra soma[9]. Pouco tempo depois, já utilizava as notações de diferenciais, derivadas e integrais como se conhece atualmente. Em 1684, segundo Eves (2004, p. 443), Leibniz definiu "*dx* como um intervalo finito arbitrário" e, a partir dessa definição, conforme Yuoschkevitch (1976), "descreveu o diferencial (*dy*) da ordenada de uma determinada curva

---

[5] Segundo Leibniz, "tomando a matemática desde o início do mundo até o tempo de Newton, o que ele fez é de longe a melhor metade". (apud BOYER, 1996, p. 269).

[6] De acordo com Eves (2004), Isaac Barrow foi um homem de grande destaque acadêmico, alcançando projeção em Matemática, Física, Astronomia e Teologia. Ao renunciar à sua cátedra lucasiana em Cambridge, em 1669, indicou para substituí-lo o nome de um jovem e talentoso colega, Isaac Newton.

[7] *Methodus Fluxionum*.

[8] Segundo Eves (2004), "a matemática se compõe de dois domínios amplos e antitéticos, o contínuo e o discreto; e, em toda a história da matemática, o único homem a transitar nesses dois domínios com soberbo desembaraço foi Leibniz". (p. 445).

[9] Do latim *summa*.

como sendo o segmento cuja razão para um incremento arbitrário da abscissa (*dx*) é igual à razão da sua ordenada para a subtangente". (p. 55-56). A palavra função surgiu pela primeira vez, em 1673, em um manuscrito de Leibniz intitulado *O método inverso das tangentes, ou sobre funções*[10]. Entre 1692 e 1694, surgiu em seus artigos a definição de função, que, de acordo com Yuoschkevitch (1976), foi caracterizada como "qualquer parte de uma linha reta, ou seja, segmentos obtidos pela construção de infinitas linhas retas correspondentes a um ponto fixo e a pontos de uma determinada curva"[11]. (p. 57). A definição de função construída, porém, não corresponde, em nenhum aspecto, ao contexto analítico.

A relação de Leibniz com Johann Bernoulli (1667-1748), principalmente as correspondências trocadas entre 1694 e 1698, levou a necessidade de um termo geral que representasse quantidades arbitrárias dependendo de uma variável à definição do termo função no sentido de uma expressão analítica.

4.1.3.2 Johann Bernoulli e Leonhard Euler

Bernoulli[12] utilizou pela primeira vez a palavra função em 1698, em um artigo dedicado à resolução de um problema proposto por seu irmão Jakob. Não há, na publicação, referência à definição do que foi chamado de função, mas, segundo Yuoschkevitch (1976), dificilmente poderia se referir a algo que não fosse uma expressão analítica. Em 1718, de acordo com Ponte (1992), Bernoulli publicou um artigo contendo a definição de função de uma variável como uma quantidade composta, de alguma forma, por uma variável e constantes.

No mesmo período, Leibniz introduziu os termos constante, variável, coordenadas e parâmetros e dividiu as funções e curvas em duas classes: as algébricas, que poderiam ser representadas por uma equação de certa ordem, e as transcendentais, que poderiam também ser objetos de estudos e cálculos de uma natureza diferente, por suas representações por equações de ordem indefinida ou infinita que transcendem as equações algébricas. A idéia de relação funcional não é mencionada, porém, até o artigo escrito por Euler, discípulo de Bernouli, em 1744, e publicado em 1748, no qual a Análise Matemática é referida como uma ciência geral de variáveis e suas funções.

---

[10] *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*.

[11] "[...] any parts of straight lines, i.e., segments obtained by constructing infinite straight lines corresponding to a fixed point and to points of a given curve."

[12] Conforme Eves (2004), Johann Bernoulli foi um dos primeiros matemáticos a perceber a importância do cálculo e a aplicá-lo na resolução de problemas.

A primeira definição explícita de uma função como uma expressão analítica foi publicada em um artigo de Bernoulli, no qual também propõe a letra grega φ como notação para a *caractéristique* de uma função, ainda escrevendo sem o auxílio de parênteses, ou seja, φx. Os parênteses, assim como a letra *f* para designar função, são atribuídos a Euler, que os utilizou em uma publicação de 1740.

Euler[13] foi o responsável pelos mais significativos avanços seguintes no desenvolvimento do conceito de função, detalhando o seu estudo de acordo com o padrão da Análise Matemática da época. Definiu uma constante como uma quantidade definitiva que assume sempre um e o mesmo valor, uma variável como um valor indeterminado ou universal que compreende todos os valores determinados e uma função de uma variável como uma expressão analítica composta por uma quantidade variável e números ou quantidades constantes. De acordo com Boyer (1996), "às vezes Euler pensava em função menos formalmente e mais geralmente como relação entre as duas coordenadas de pontos sobre uma curva traçada à mão livre sobre um plano". (p. 306).

De fato, a grande maioria das funções estudadas na época de Euler era analítica e enquadrava-se em sua definição, que foi aceita por muitos outros matemáticos do seu tempo. Entretanto, Euler sabia que funções de outros tipos também existiam e, segundo Ponte (1992), de acordo com a terminologia atual, sua definição incluía apenas as funções analíticas, um subconjunto do já pequeno conjunto das funções contínuas. Nas principais correntes matemáticas, entretanto, a relação da definição de função com expressões analíticas permanece estática até o séc. XVIII. No séc. XIX, contudo, a noção de função passa por sucessivas alterações e esclarecimentos que alteram drasticamente sua natureza e significado.

4.1.3.3 A Controvérsia sobre as Cordas Vibrantes

A próxima grande discussão envolvendo a construção do conceito de função aconteceu em estudos na área da Física-Matemática, principalmente por meio dos trabalhos acerca do célebre problema sobre vibrações infinitamente pequenas em cordas homogêneas, finitas e com suas extremidades fixas[14]. Jean-le-Rond D'Alembert[15] (1717-1783), que,

---

[13] Segundo Anton (2000), Euler foi, provavelmente, o matemático mais prolífico que já apareceu, fazendo matemática tão facilmente quanto a maioria dos homens respira. Já, de acordo com o físico e astrônomo François Arago (1786-1853), "Euler poderia muito bem ser chamado, quase sem metáfora, e certamente sem hipérbole, a encarnação da análise." (apud EVES, 2004, p. 474).

[14] Uma corda elástica com extremidades fixas é deformada em alguma forma inicial e, a seguir, posta a vibrar. O problema consiste em determinar a função *f* que descreve a forma da corda no tempo t qualquer.

[15] Segundo Boyer (2006), o maior matemático da França nos meados do século XVIII.

segundo Eves (2004), foi um dos pioneiros no estudo das equações diferenciais parciais, representou o problema das cordas vibrantes por uma equação equivalente a:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

onde, de acordo com Ponte (1992), *y* indica o deslocamento em relação ao ponto de equilíbrio, *x* representa a distância da origem, e t indica o tempo. A solução da equação é dada por:

$$y = f(x + at) + g(x - at)$$

onde *f* e *g* são funções arbitrárias.

D'Alembert restringiu a classe de cordas admitidas, pois, sem essas restrições, segundo pensava, não seria possível construir a solução do problema através da Análise Matemática. Entre essas restrições, há o fato de assumir que a forma inicial da corda deve ser representada, em toda a sua extensão, por apenas uma equação, o que, na teoria de Euler, seria determinar que a corda é contínua.

A terminologia de Euler, utilizada até meados do século XIX, determinava que continuidade significava invariabilidade, imutabilidade da lei de formação da função em todo o seu domínio. Já descontinuidade de uma função significava a mudança da lei de formação da função em dois ou mais intervalos do seu domínio. As funções descontínuas, segundo Euler, eram compostas de partes contínuas, sendo chamadas, por essa razão, de curvas mistas ou irregulares.

Apesar de dar crédito ao método de D'Alembert, Euler discordou quanto à natureza das funções admitidas nas condições iniciais. Segundo Rossini (2006),

> [...] Euler retrucou, guiado por considerações físicas e uma profunda intuição matemática, afirmando que nenhuma restrição poderia ser imposta sobre a forma da corda. Para um caso particular, da corda fixada nos pontos x = 0 e x = 1, ele propõe uma solução correspondente à forma inicial "contínua" representada por uma série trigonométrica:
>
> $$y = \alpha sen\frac{\pi x}{l} + \beta sen\frac{2\pi x}{l} + \delta sen\frac{3\pi x}{l} + \ldots$$ (p. 44).

Começa, então, uma longa discussão sobre a natureza das funções aceitas nas condições iniciais e nas integrais de equações diferenciais parciais. A controvérsia continua com o ingresso de um novo participante. Daniel Bernoulli (1700-1782) argumentou que tanto a forma arbitrária inicial da corda quanto suas vibrações subseqüentes podiam ser representadas por uma séria infinita de termos incluindo senos e co-senos:

$$y = a_1 sen\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi kt}{l} + a_2 sen\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi kt}{l} + \ldots$$

D'Alembert e Euler não aceitam a solução de Bernoulli, e o debate não termina, sendo retomado, em épocas posteriores, por outros grandes matemáticos. Yuoschkevitch (1976) afirma, entretanto, que a discussão acerca da Controvérsia das Cordas Vibrantes foi extremamente importante para o progresso da Física-Matemática e também para o desenvolvimento metodológico dos fundamentos da Análise Matemática.

4.1.3.4 A Definição de Euler

Como, de acordo com Euler, funções descontínuas não são, geralmente, analiticamente representáveis, suas definições iniciais de função tornaram-se obsoletas. Nesse sentido, Euler formula uma nova definição para o conceito de função compreendendo todas as classes de relações. Trata-se de uma abordagem utilizando uma noção que esteve sempre presente em seus textos, mesmo que não expressa explicitamente em seus métodos de introduzir função: a noção geral de correspondência entre pares de elementos, cada qual pertencendo ao seu próprio conjunto de valores de quantidades variáveis.

A idéia de relação foi, então, dada por Euler (apud Yuoschkevitch, 1976), de uma maneira universal e abstrata, em sua definição de função no prefácio de sua *Institutiones calculi differentialis*:

> Se algumas quantidades dependem de outras quantidades de forma que se essas são alteradas aquelas passam por mudanças, então, as quantidades que sofreram mudanças são chamadas de funções das outras. Essa denominação é de natureza ampla e abrange todos os métodos através dos quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, portanto, x denotar uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem, em qualquer forma, de x ou são determinadas por x, são chamadas de funções do mesmo. (p. 70).

O conceito de função proposto por Euler influenciou positivamente todo o desenvolvimento da Matemática a partir de então. Em um primeiro plano, foi muito importante o isolamento da classe das funções contínuas, ou seja, das funções analíticas representáveis por séries de potência e a descoberta das principais propriedades dessa classe.

Apesar da oposição de D'Alembert, que apontava defeitos na definição de Euler (principalmente dificuldades ligadas à descontinuidade, no sentido atual da palavra), muitos matemáticos aderiram à sua idéia, como Joseph Lagrange[16] (1736-1813) e Pierre-Simon Laplace[17] (1749-1827). Até mesmo D'Alembert, no final de sua vida, mudou sua opinião.

Era necessária, entretanto, uma separação mais concreta entre as funções contínuas e descontínuas (no sentido atual das palavras). Segundo Euler, funções determinadas por uma expressão analítica em todo o seu domínio eram chamadas de contínuas, e essas eram as funções genuínas. Já as funções descontínuas ou arbitrárias (no sentido de Euler) não eram funções genuínas. É claro, segundo Monna (1972), que a continuidade, no sentido de Euler, é um tipo de continuidade global, distinta da continuidade local proposta por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Bernhard Bolzano (1781-1848).

4.1.3.5 O século XIX

De acordo com Monna (1972), no séc. XIX, houve muito progresso na construção do conceito de função, com contribuições principalmente dos trabalhos de Cauchy, Joseph Fourier (1768-1830) e Lejeune Dirichlet (1805-1859).

A idéia de Euler das funções mistas foi criticada e foi provado que funções introduzidas por diferentes expressões analíticas em diferentes intervalos do seu domínio também podem ser representadas por apenas uma equação. Cauchy[18] faz sua crítica à definição de continuidade proposta por Euler e, de acordo com Rossini (2006), prova como são inadequadas as definições de funções contínuas e descontínuas de Euler a partir de um simples exemplo. Segundo Monna (1972),

> Ele observa que essa definição carece de exatidão matemática e ilustra isso através do conhecido exemplo da função que é igual a x para $x \geq 0$ e igual a $-x$ para $x < 0$. Essa função não deveria ser uma função genuína (contínua) no sentido de Euler, pois era definida por duas leis, contudo, é contínua quando representada na forma $\sqrt{x^2}$. (p. 61).

---

[16] Denominado por Frederico, O Grande, como o maior matemático da Europa, e, por Napoleão Bonaparte, como a pirâmide mais alta das ciências matemáticas, Lagrange foi responsável, entre outras, pela introdução da notação *f'(x), f''(x),* ... utilizada atualmente.

[17] Devido ao lançamento dos cinco volumes do *Traité de Mécanique*, Laplace ganhou o cognome de "Newton da França". (EVES, 2004).

[18] Segundo Boyer (1996), Cauchy foi a "estrela" matemática da década de 1820.

Na concepção de Monna (1972), a questão notável é que Cauchy propôs, em seu *Résume des leçons à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal*, a definição de continuidade de uma função no sentido atual:

> Quando uma função *f(x)* admite um valor único e finito para todos os valores de *x* compreendidos entre dois limites dados, a diferença *f(x + i) – f(x)* sendo sempre uma quantidade infinitamente pequena, diz-se então que *f(x)* é uma função contínua de variável *x* entre os limites dados. (CAUCHY, 1823, apud MONNA, 1972, p. 61).

Fourier também prestou importante contribuição para a evolução do conceito de função. Em seus estudos da teoria da propagação do calor, considerou a temperatura como uma função de duas variáveis: o tempo e o espaço. Nesses trabalhos, refutou a afirmação de Euler de que não era possível representar, por uma série de termos contendo senos e co-senos de arcos múltiplos, a figura inicial de uma corda definida por duas equações em dois diferentes intervalos do seu domínio. Ascende, então, a teoria geral das séries trigonométricas.

Conforme Eves (2004),

> Em 1807 Fourier apresentou um artigo à Academia de Ciências da França que deu início a um novo e extremamente frutífero capítulo da história da matemática. O artigo trata do problema prático da propagação do calor em barras, chapas e sólidos metálicos. No desenvolvimento do artigo, Fourier fez a surpreendente afirmação de que *toda* função definida num intervalo finito por um gráfico descrito arbitrariamente pode ser decomposta numa soma de funções seno e co-seno. (p. 526. Grifos do autor).

Fourier afirmou que uma função y = *f(x)* qualquer, definida no intervalo $(-\pi, \pi)$, pode ser representada nesse intervalo por:

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Segundo Eves (2004), essa série, conhecida como série trigonométrica e hoje denominada série de Fourier, não era uma novidade para os matemáticos da época, pois já havia sido provado que muitas funções "bem comportadas" podiam ser assim representadas. A novidade foi Fourier afirmar que toda função definida em $(-\pi, \pi)$ podia ser representada por uma série trigonométrica. Afirmação que, de acordo com Ponte (1992), nunca foi provada matematicamente.

Dirichlet[19], posteriormente, formulou as restrições necessárias, conhecidas como condições de Dirichlet, para que uma função seja passível de ser representada por uma série de Fourier, provando, portanto, que nem toda função, mesmo que contínua em um dado intervalo, pode ser determinada por sua série trigonométrica, pois essa pode divergir em infinitos pontos. Entretanto, as séries de Fourier envolvem uma relação mais geral entre variáveis do que as estudadas até então.

Com a intenção de construir uma definição de função que englobasse essa forma de relação, Dirichlet, conforme Eves (2004), dá a seguinte formulação:

> Uma *variável* é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis *x* e *y* estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a *x*, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra um valor a *y*, então se diz que *y* é uma *função* (unívoca) de *x*. A variável *x*, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada de *variável independente* e a variável *y*, cujos valores dependem dos valores de *x*, é chamada de *variável dependente*. Os valores possíveis que *x* pode assumir constituem o *campo de definição* da função e os valores assumidos por *y* constituem o *campo de valores* da função. (p. 661. Grifos do autor).

Uma função torna-se, então, uma correspondência entre duas variáveis: todo valor da variável independente é associado a um e apenas um valor da variável dependente. De acordo com Boyer (1996), essa definição está próxima do ponto de vista moderno de uma correspondência entre dois conjuntos de números, entretanto os conceitos de conjunto e de número real ainda não haviam sido formalizados. Para mostrar a natureza arbitrária da regra de correspondência, Dirichlet também produziu o seu conhecido exemplo de uma função muito "mal comportada", descontínua em todos os pontos do seu domínio $0 \leq x \leq 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Segundo Eves (2004), alunos dos cursos de Matemática possivelmente encontram a definição de função de Dirichlet nos cursos iniciais de Cálculo Diferencial e Integral. Trata-se

---

[19] Dirichlet, que tem seu cérebro preservado na Universidade de Göttingen, foi, de acordo com Eves (2004), um eminente matemático alemão e participou da fase inicial de deslocamento do centro das atividades matemáticas da França para a Alemanha.

de uma definição ampla e que não restringe a relação que há entre *x* e *y* a uma forma qualquer de expressão analítica, acentuando a idéia de relação entre dois conjuntos de números.

De acordo com Ponte (1992), com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Georg Cantor (1845-1918), a noção de função continua sua evolução. No século XX, o conceito de função é estendido de maneira a incluir todas as correspondências arbitrárias, satisfazendo a condição da unicidade, entre conjuntos numéricos e não numéricos.

Conforme Dieudonné (1990), Dedekind,

> [...] na sua *Was sind und was sollen die Zahlen*[20] […] introduz uma linguagem muito rigorosa, que tem a última palavra em relação às expressões muitas vezes demasiado vagas usadas pelos seus contemporâneos. Se bem que esta obra não tenha tido influência imediata que merecia, a necessidade de adotar uma linguagem semelhante e *uniforme* em todas as partes da matemática impôs-se aos poucos no início do século XX. (p. 148. Grifos do autor).

As idéias de Dedekind (1831-1916), com algumas contribuições posteriores, contribuíram para a teoria dos conjuntos hoje amplamente difundida.

4.1.4 O século XX

Os anos próximos a 1900, conforme Monna (1972), são interessantes no que diz respeito à evolução do conceito de função, principalmente, porque, mesmo com a definição geral de função dada por Dirichlet, matemáticos como René Baire (1874-1932), Emile Borel (1871-1956) e Henri Leon Lebesgue (1875-1941) continuam a discussão acerca do tema.

Segundo Monna (1972), nos trabalhos desses matemáticos, há discussões e polêmicas sobre o conceito de função e resquícios da antiga definição como uma expressão analítica. É importante ressaltar, também, que a teoria dos conjuntos de Cantor penetrava gradualmente na Matemática.

Pesquisando os trabalhos nesse período, principalmente os de autoria de Baire, Borel e Lebesgue, ficam claras as discussões sobre a não aceitação de funções contínuas e descontínuas sem derivadas como objetos matemáticos e sobre a antiga idéia de que uma função é apenas o que pode ser escrito por meio de uma expressão analítica.

Baire desenvolveu uma classificação fundamentada na classificação analítica, na qual mesmo funções descontínuas de natureza extremamente complexa podem ser representadas por somas de séries convergentes. O problema da natureza das funções foi cultivado em seus trabalhos sobre a representação de funções como limites. Nesse domínio, os resultados mais

---

[20] O que são e o que devem ser os números.

expressivos são atribuídos a Dirichlet e a Karl Weiertrass (1815-1897), respectivamente, conforme Monna (1972):

> Qualquer função contínua tendo apenas um número finito de máximos e mínimos pode ser representada por uma série de Fourier.
> Qualquer função contínua é limite de uma seqüência de polinômios uniformemente convergente. (p.69).

Lebesgue, em seus estudos sobre a teoria da integração, apresentou novas idéias sobre o uso de funções descontínuas e denominou de analiticamente representável qualquer função que pudesse ser construída por um conjunto enumerável de adições, multiplicações e limites, realizados com uma lei definitiva no que tange a variável independente e a um conjunto enumerável de quantidades constantes.

Borel desenvolveu suas próprias idéias sobre a teoria da integração e cultivou discussões sobre a existência e a definição de objetos matemáticos, inclusive sobre a definição do conceito de função. De acordo com Monna (1972), Borel, em suas publicações, "expressou sua opinião que uma boa definição deve satisfazer a condição que, quando dois matemáticos estão falando sobre um número, deve ficar absolutamente certo que estão conversando sobre o *mesmo* número". (p. 80. Grifo do autor).

A evolução continua e, segundo Monna (1972),

> [...] gradualmente a idéia de aplicação entre dois conjuntos se torna dominante em matemática e nesse processo deve-se observar a influência da álgebra. O conceito de função foi colocado na estrutura geral do conceito de aplicação de um conjunto X em um conjunto Y, como encontramos nos livros modernos. (p. 82).

Dedekind já havia trazido à Matemática uma concepção completamente geral do conceito de função. Fugindo das concepções anteriores que se valiam apenas de funções reais, generalizou, de acordo com Dieudonné (1990), da seguinte forma:

> [...] sendo dados dois conjuntos *quaisquer* E e F, uma aplicação *f* de E em F é uma lei ("Gesetz") que faz corresponder a qualquer elemento *x* de E, um elemento *bem determinado* de F, o seu *valor* em *x* é notado de modo geral *f(x)*. Tomamos agora o hábito de escrever $x \mapsto f(x)$ para notar uma aplicação *f*, o que evita muitas vezes ter de introduzir uma nova letra, quando por exemplo se escreve $x \mapsto x^2$ para $x \in R$; utiliza-se também bastante na atual escrita das matemáticas as noções $f: E \to F$ ou $E \to F$ para precisar o conjunto E onde está definida a função *f* e o conjunto F onde esta toma seus "valores". (p. 149. Grifos do autor).

Posteriormente, conforme Dieudonné (1990), Cantor introduz a noção de produto cartesiano E x F de dois conjuntos quaisquer. Faz-se, então, a conexão da idéia de aplicação como um subconjunto de E x F.

Na concepção de Eves (2004), a teoria dos conjuntos levou à ampliação do conceito de função, abrangendo, nesse sentido, relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer, desmistificando a idéia de que esses elementos devem ser necessariamente números. Assim, segundo o autor,

> [...] uma *função f* é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses sujeitos à condição seguinte: se $(a_1, a_2) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$. O conjunto *A* dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se *domínio* da função e o conjunto *B* de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz *imagem* da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano *A* x *B*. (p. 661).

Segundo Monna (1972), em 1939, no primeiro livro da série de Nicolas Bourbaki[21], *As Estruturas Fundamentais da Análise*, *Teoria dos Conjuntos*[22], todas as questões acerca do que seria uma função são encerradas. Bourbaki dá a seguinte definição:

> Sejam E e F dois conjuntos distintos ou não. Uma relação entre uma variável *x* de E e uma variável *y* de F é dita uma *relação funcional* em *y*, ou uma *relação funcional* de E em F, se, para qualquer que seja $x \in$ E, existe um, e somente um, elemento *y* de F que esteja na relação considerada com *x*.
> Dá-se o nome de *função* à operação que associa a todo elemento $x \in$ E um elemento $y \in$ F que se encontra na relação com *x*; diz-se que *y* é o *valor* da função para o elemento *x*, e que a função é *determinada* pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais são *equivalentes* se determinam a *mesma* função. (BOURBAKI, 1939, apud MONNA, 1972, p. 82).

O conceito de função, fundamental no estudo da Matemática, conforme Eves (2004), passa a ser defendido por matemáticos como Félix Klein (1849-1925), desde as primeiras décadas do séc. XX, como princípio central e unificador dos cursos elementares de Matemática. O conceito torna-se um guia natural para a construção de textos dessa ciência.

4.2 A DIDÁTICA FRANCESA

Na seção anterior, ao revisar a construção histórica do conceito de função, foi possível compreender o papel das representações no desenvolvimento desse conceito. Assim, para discutir perspectivas atuais para a aprendizagem de funções, buscaram-se, entre os teóricos que propõem novas idéias para o ensino e a aprendizagem de Matemática, aqueles que enfatizam a importância das representações. Dentre esses, o pesquisador francês Raymond Duval está entre os mais citados em trabalhos da área de Educação Matemática. Para

[21] Segundo Rossini (2006), Nicolas Boubaki é uma associação criada por jovens matemáticos franceses em 1935, com a finalidade de organizar toda Matemática conhecida até então.
[22] *Les structures fondamentales de l'analyse, Théorie des ensembles.*

apresentar as idéias de Duval referentes aos registros de representação semiótica, é conveniente situar esse pesquisador em termos de influências teóricas. Duval trabalhou no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo (MACHADO, 2003), e suas idéias foram discutidas pelos diversos grupos que formam a área de conhecimentos conhecida como Didática Francesa.

Nesse sentido, a proposta de aprofundamento da Didática da Matemática foi desenvolvida nesses Institutos para Pesquisa sobre o Ensino das Matemáticas que emergiram na França, após a Reforma Educativa do final da década de 1960, com a qual se deu início à “Matemática Moderna”. Os IREM dedicavam-se à complementação da formação matemática dos professores já em atividade, ao estudo de programas alternativos para a formação de novos mestres e, também, à produção de material didático para apoio ao trabalho em sala de aula.

A partir da reflexão sobre as novas práticas implantadas, surge, nos IREM, uma vertente de estudo destinada não só a produzir meios de atuar no ensino, mas preocupada, também, em pesquisar, cientificamente, os processos implantados na Educação Matemática. Inicia-se, então, a linha francesa de estudo da Didática da Matemática, também denominada Didática Francesa, que tem como objetivo, segundo Gálvez (1996), averiguar como funcionam as situações didáticas, isto é, quais características de cada situação são determinantes para a evolução do comportamento dos alunos e, conseqüentemente, de seus conhecimentos.

Essa vertente de estudo da Didática da Matemática tem, como principal característica, a formalização conceitual de suas constatações práticas e teóricas, trazendo, assim, uma maior objetividade às noções didáticas. Trata-se de uma visão que prioriza, duplamente, o estudo da didática matemática através de conceitos, uma vez que trabalha com o problema da formação de conceitos matemáticos e, também, com a formação de conceitos didáticos envolvidos no processo de aprendizagem da Matemática. (PAIS, 2002).

Antes de prosseguir, é necessário definir a expressão “Didática da Matemática”, evitando que seja confundida com a disciplina de Didática Aplicada ao Ensino de Matemática e levando em consideração que, na França, é utilizada para representar a área de pesquisa educacional da Matemática.

Pais (2002) define Didática da Matemática como

> [...] uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes

> vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (p. 11).

Fica claro, então, que a Didática da Matemática é uma vertente da Educação Matemática que tem, como cerne de pesquisa, a elaboração de conceitos relacionados à construção do conhecimento matemático, tanto no nível prático, aplicado, quanto no nível acadêmico de pesquisa. Não tem como objetivo criar receitas de solução ou modelos que resolvam determinados problemas de aprendizagem, mas, a partir de suas pesquisas, podem-se construir propostas pedagógicas capazes de contribuir para uma melhor compreensão do processo de aprendizagem da Matemática e seus conceitos, o que é imprescindível para a evolução do ensino.

4.2.1 Conceitos da Didática Francesa

Para melhor situar as idéias de Raymond Duval sobre registros de representação semiótica, trago, inicialmente, uma revisão de conceitos didáticos envolvidos no processo de aprendizagem da Matemática atribuídos à Didática Francesa.

4.2.1.1 Transposição Didática

No desenvolvimento da atividade docente, várias etapas são percorridas. Uma das mais importantes consiste na escolha dos conteúdos que farão parte do currículo escolar. O conjunto desses conteúdos, denominado “saber escolar”, tem sua procedência no saber científico. Ao longo do processo, que se inicia na escolha dos conteúdos e vai até a sala de aula, os objetos de ensino são submetidos a transformações e influências, o que acaba por dar ao saber escolar características peculiares, distintas daquelas do saber científico. A noção de transposição didática tem como foco o estudo de todo esse processo evolutivo cercado de influências e que envolve diversos segmentos da área educacional. (PAIS, 1999).

O saber científico é caracterizado pelo seu formalismo e pela sua linguagem codificada. É apresentado em artigos, dissertações, teses e livros, associado à vida acadêmica, mesmo que nem toda produção acadêmica origine um saber científico. O saber escolar representa o conjunto de conteúdos formadores da estrutura curricular. Não deve ser apresentado na mesma linguagem, tal como se encontra em textos técnicos. Conforme D’Amore (2007), “a transposição didática consiste em extrair um elemento de saber do seu contexto (universitário, social, etc.) para recontextualizá-lo no ambiente sempre singular, sempre único, da própria classe". (p. 226). Nesse aspecto, enquanto o trabalho científico se caracteriza pela descoberta da ciência, no trabalho docente, predomina a simulação dessas descobertas.

Nesse sentido, conforme Chevallard (1985),

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre desde então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar o seu lugar entre os *objetos de ensino*. O "trabalho" que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado *transposição didática*. (p.39. Grifos do autor).

No hiato entre o saber científico e o saber escolar, nascem as criações didáticas, sustentadas por recursos didáticos criados pelos professores e que transcendem os conceitos do saber matemático. Entretanto, segundo D'Amore (2007), a *transposição didática* não pode ser dirigida e orientada, em todas as suas passagens, pelo professor. Os s*istemas didáticos*[23] são determinados, em sua natureza e funcionamento, por fatores que transcendem o docente, como o quadro institucional, os materiais disponíveis e as decisões dos legisladores, conselheiros pedagógicos e pais dos estudantes.

O estudo da trajetória do saber escolar permite identificar as influências a que é submetido, tanto provenientes do saber científico como de outras fontes. Tais influências não se manifestam apenas no que diz respeito à seleção do conteúdo escolar: vão além, interferindo na estruturação de valores, objetivos e métodos que conduzem o sistema de ensino.

Esse aspecto, das diferentes transposições didáticas, fica claramente caracterizado ao se compararem as diferentes definições de função adotadas em escolas atualmente. Enquanto, em algumas delas, define-se função a partir da noção de variáveis, em outras, trabalha-se o mesmo conteúdo em termos da relação binária entre dois conjuntos. O mesmo objeto de estudo sofreu diferentes ações no caminho percorrido entre o saber científico e o saber escolar. Sua transposição didática iniciou idêntica, ou seja, o mesmo conteúdo foi selecionado para o currículo, mas, a partir disso, diferentes escolhas foram feitas, fazendo com que o *saber ensinado*[24], desenvolvido em cada caso, fosse distinto.

---

[23] Um Sistema Didático é definido por Chevallard como um objeto pré-existente, "dotado de uma necessidade própria, de um determinismo próprio (...) objeto tecno-cultural cujo funcionamento se inscreve na história." (apud D'AMORE, 2007, p. 225).

[24] Segundo Pais (2002), o saber ensinado é aquele registrado no plano de aula do professor.

4.2.1.2 Contrato Didático

Na relação entre professor e aluno, criam-se, habitualmente, constantes de comportamento, regras que funcionam como cláusulas de um contrato. Essas regras são, quase na sua totalidade, implícitas e revelam-se apenas quando são transgredidas. O conjunto dessas cláusulas, as quais estabelecem as bases das ações dos professores e alunos na sua relação em busca da construção do conhecimento, é denominado contrato didático. (SILVA, 1999).

Pode-se, portando, definir contrato didático como uma função de relação didática de três variáveis: professor, aluno e conhecimento. Segundo Brousseau (1986), quando um aluno não consegue resolver um problema proposto, o professor tem a obrigação social de ajudá-lo.

> Então, surge uma relação que determina – explicitamente, de certa forma, mas sobretudo implicitamente – o que cada participante, o mestre e o estudante, tem a responsabilidade de gerar e um será, de uma forma ou de outra, responsável perante o outro. Este sistema de obrigações recíprocas parece um contrato. O que nos interessa aqui é o *contrato didático*, isto é, a parte desse contrato que é específica do “conteúdo”: o conhecimento matemático visado. (p. 51. Grifos do autor).

Entretanto, é importante a consciência de que os três elementos – professor, aluno e saber - não subsistem isoladamente de certas fontes de influência como o cotidiano, o espaço da sala de aula, a instituição escolar, a comunidade de especialistas em educação e, mesmo, a sociedade de forma mais ampla. (PAIS, 2002).

A escola é caracterizada, histórica e culturalmente, por uma interação entre professor e aluno, da qual se infere um determinado conjunto de atitudes, de normas, ou seja, um comportamento pressuposto. Ao professor cabe garantir ao aluno as condições para a construção do saber escolar, planejando atividades com o objetivo de facilitar a elaboração do conhecimento, incentivando a sua participação nesse processo e verificando em que nível o conhecimento foi desenvolvido. Percebendo que a aprendizagem não aconteceu de forma satisfatória, cabe-lhe, ainda, retomar o conteúdo através de uma nova abordagem. Já ao estudante cabe adaptar-se às diretrizes, às atividades propostas e ao meio de comunicação social estabelecido no ambiente escolar. Há, pois, por parte do professor e do aluno, uma expectativa mútua quanto ao papel que cada um deve desempenhar e quanto ao comportamento do outro.

Nesse sentido, segundo D’Amore (2007),

> Podemos pensar no contrato didático como um conjunto de regras, com verdadeiras e próprias *cláusulas*, na maioria das vezes, não explícitas (muitas vezes, aliás, não realmente existentes, mas criadas pelas mentes dos personagens envolvidos na ação didática, para tornar coerente um modelo de escola, ou de vida escolar, ou de saber), que organizam as relações entre o conteúdo ensinado, os alunos, o professor e as expectativas (gerais ou específicas) no interior da classe, nas aulas de Matemática. (p. 116. Grifo do autor).

É importante ressaltar que o contrato didático está ligado ao processo de ensino adotado pela escola e à prática pedagógica do professor. Em Matemática, a ação docente mais comum está relacionada a aulas expositivas, que destacam os conceitos e conteúdos mais importantes, e à indicação de exercícios a serem resolvidos com a aplicação dos estudos realizados em sala de aula. O professor cumpre seu contrato com aulas-palestras e com a proposição de tarefas. Já o aluno cumpre sua parte desse contrato se compreende a aula, de forma satisfatória ou não, e se propondo a resolver os exercícios, corretamente ou não. Se o aluno não compreender a aula ou não conseguir resolver os exercícios, cabe ao professor dar-lhe auxílio ou voltar a enfatizar os conceitos não construídos.

Também é relevante ressaltar que, na construção da relação do contrato didático com o Ensino de Matemática, segundo Pais (2002), deve-se considerar que certas características do saber matemático, tais como abstração, formalismo e rigor, condicionam algumas das cláusulas implícitas desse contrato, gerando, assim, peculiaridades habituais de concepções dos professores de Matemática.

4.2.1.3 Situações Didáticas

O conhecimento matemático adquire significado de acordo com a forma didática na qual o conteúdo é explorado. O envolvimento do aluno está relacionado às atividades propostas através de momentos especiais da prática pedagógica, denominados “situações didáticas”. É conveniente, porém, definir inicialmente o conceito de situação a-didática.

Uma situação é dita a-didática, segundo D’Amore (2007), quando estão em jogo o aluno e o conhecimento a ser construído, sem a influência do professor (no caso em particular). O trabalho realizado pelo estudante não está vinculado a uma obrigação didática. Ele faz tentativas, verifica a ineficiência dessas, reconstrói sua estratégias de resolução e modifica seu sistema de conhecimentos, interagindo com os elementos do ambiente. Ocorre, então, a construção do conhecimento não institucionalizado.

Estabelecido o conceito de situação a-didática, Brousseu (apud D'Amore, 2007) define situação didática como um modelo no qual o professor trabalha para:

> [...] fazer com que o aluno devolva uma situação a-didática que provoque nele a interação mais independente e fecunda possível. Por isso comunica ou se abstém de comunicar, de acordo com o caso, informações, perguntas, métodos de aprendizagem, heurísticas. (p. 234).

Trata-se da construção de relações pedagógicas envolvendo o professor, o aluno e o saber, na busca da redescoberta do conhecimento matemático. Essa tarefa não é simples e somente fará sentido aos olhos do aluno, se for muito bem estruturada e refletida. O professor não deve apenas comunicar o conhecimento, mas deve, também, propor problemas, transferindo a responsabilidade para o aluno e trabalhando com ele no sentido de fazê-lo encarar o problema como sendo seu, e não apenas como um trabalho imposto. Se o aluno considera o problema como seu e se dedica à sua resolução, alcançando-a, então se inicia o processo de aprendizagem. No intervalo entre o enunciado do problema e a sua resolução, várias etapas são percorridas e, nessas etapas, situações didáticas diversas são necessárias para a evolução da construção do conhecimento. (FREITAS, 1999).

Segundo Brousseau (1996), para que o aluno construa o conhecimento, cabe ao professor a busca de situações apropriadas, capazes de se transformarem em situações de aprendizagem. Para que isso ocorra, é necessário que a resposta inicial do aluno frente ao problema proposto não seja a que se deseja ensinar, pois, se fosse necessário o conhecimento que se deseja construir para responder à questão, não seria uma situação de aprendizagem. A resposta inicial deve servir para a elaboração de uma estratégia que, na seqüência, se mostre ineficaz, fazendo com que o aluno seja impelido a realizar modificações no seu sistema de conhecimentos para alcançar a resposta. Quanto mais profundas forem as modificações, mais significativa será a interação do aluno com o saber em construção.

Sob esse enfoque, o trabalho do professor consiste em contextualizar o conteúdo e propor uma situação de aprendizagem capaz de construir valores educativos, contribuindo para que o aluno elabore seus conhecimentos a partir de sua resposta pessoal às perguntas propostas. Sem a correlação entre o saber e a realidade, priorizando-se o contexto simplesmente matemático e fugindo-se dos campos de significados do estudante, torna-se improvável a construção do saber escolar e cria-se uma confusão entre esse e o saber científico.

4.2.1.4 Obstáculos

Na evolução da construção de um conhecimento, passa-se, invariavelmente, pela confrontação e rejeição de conhecimentos prévios. Nesse sentido, os obstáculos não são provenientes da falta de conhecimento: são conhecimentos antigos, sedimentados pelo tempo, e que resistem à construção de novas idéias que ameacem a estabilidade intelectual de quem os detém.

Nesse contexto, conforme D'Amore (2005),

> Obstáculo é uma idéia que, no momento da formação do conceito, foi eficaz para enfrentar os problemas (mesmo que apenas cognitivos) precedentes, mas que se revela ineficaz quando se tenta aplicá-la a um problema novo. Dado o sucesso obtido (aliás, principalmente devido a ele) tende-se a conservar a idéia já adquirida e comprovada e, apesar da falência, busca-se salvá-la: esse fato, porém, termina por ser uma barreira para as aprendizagens sucessivas. (p. 104).

Os obstáculos têm uma relação peculiar com a Matemática. Apesar de essa ciência apresentar em certa regularidade no seu desenvolvimento, não apresentando rupturas provenientes de novas concepções que, ao surgirem, invalidem as anteriores, a construção de cada conceito e conteúdo específico não é linear. Na formulação de novas teorias, o matemático reflete sobre um caldeirão de idéias, sem ordem definida, produzidas em um fluxo não linear, ao contrário da apresentação exposta na literatura, com axiomas, lemas, teoremas e corolários. Não se pode, então, desconsiderar a ocorrência de processo semelhante na construção do conhecimento escolar.

Na educação matemática, os obstáculos se fazem mais presentes na fase de construção da gênese das primeiras idéias, que normalmente não estão presentes na redação final do texto do saber. A apresentação final do conhecimento construído não explicita essas dificuldades. Nesse sentido, há a necessidade de se considerar a dificuldade da aprendizagem matemática proveniente dessa lacuna entre o processo de síntese do conhecimento e sua redação. Ao se iniciar o contato com um conceito inovador, pode ocorrer uma revolução interna, rompendo os laços existentes com o saber cotidiano já estabelecido e levando o sujeito a passar do seu mundo particular a um quadro mais vasto de idéias. (PAIS, 2002).

A idéia de obstáculo didático está ligada às escolhas feitas pelo docente (projeto, currículo, método) com o objetivo de otimizar esse processo de generalização de idéias, indispensável para construção de conceitos matemáticos. O professor faz sua transposição didática, acreditando que suas opções tornarão o processo de construção do conhecimento matemático mais eficaz, o que realmente ocorre para determinados estudantes, mas não para todos. Aos alunos não pertencentes ao primeiro grupo as escolhas feitas pelo docente em relação à metodologia de ensino se constituem um obstáculo didático.

Já o conceito de obstáculo epistemológico, enfocando a evolução discente em relação ao saber escolar, no que concerne à sua aplicação na educação matemática, está ligado àquele obstáculo que acarreta a resistência a um saber mal adaptado. Seu estudo pode levar à interpretação de alguns erros comuns e não aleatórios presentes no ensino de alguns tópicos da Matemática. (IGLIORI, 1999). Bachelard (1996) descreve que

> É em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar os obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. (p. 17).

Dessa forma, pode-se concluir que os erros não são, necessariamente, vinculados à ignorância, à falta de conhecimento. São, pelo contrário, em muitas situações, fruto de um conhecimento que outrora produziu resultados positivos, resistindo, assim, ao se confrontar com fatos novos e mais abrangentes.

4.2.2 Registros de Representação Semiótica

No estudo dos mais diversos campos da Matemática, há a necessidade de se trabalhar com variadas representações, com vistas a uma melhor visualização do objeto de estudo e, conseqüentemente, de uma comunicação mais efetiva. Esta característica se faz presente, de maneira muito evidente, ao se trabalhar com funções, uma vez que se pode representar uma função algébrica ou graficamente, bem como através de tabelas e diagramas.

Segundo Damm (1999),

> A matemática trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apresentação o uso de uma representação. Neste caso, a representação através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos é bastante significativa, pois permite a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. (p. 137).

Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês, desenvolveu extensa pesquisa na área de Educação Matemática, enfocando as diversas representações mobilizadas na visualização de objetos matemáticos. Buscou a construção de um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, a partir da mudança de registros de representação semiótica. Duval (2006) caracteriza representações como símbolos e suas associações complexas, que são produzidas de acordo com determinadas regras e que permitem a descrição de um sistema, um processo, um fenômeno, um objeto de conhecimento.

Segundo Duval (1999), a utilização de registros de representação semiótica na construção do conhecimento matemático é fundamental, pois,

> [...] diferentemente de outros campos do conhecimento (botânica, geologia, astronomia, física), não há outras maneiras de se obter acesso aos objetos matemáticos a não ser através da produção de registros de representação semiótica. Em outros campos de conhecimento, representações semióticas são imagens ou descrições de fenômenos do mundo real aos quais podemos ter acesso perceptual e instrumental sem a utilização dessas representações. Em Matemática esse não é o caso. (p. 4).

Um gráfico, uma tabela, diagramas, notações simbólicas, expressões algébricas, são, costumeiramente, utilizados para representar objetos, conteúdos, conceitos matemáticos. Porém, apesar de a representação semiótica ser condição fundamental para se obter acesso ao pensamento matemático, não se deve confundir os objetos matemáticos com a representação utilizada. O objeto matemático é o representado, é abstrato, enquanto sua representação é o representante, ou seja, o que é utilizado em seu lugar.

Sobre esse paradoxo cognitivo do pensamento matemático envolvendo o acesso a objetos matemáticos a serem conceitualizados e suas representações, D'Amore (2005) afirma que,

> [...] de um lado, o estudante não sabe que está aprendendo signos que estão no lugar de conceitos e que deveria estar aprendendo conceitos; de outro lado, se o professor nunca refletiu sobre o assunto, acreditará que o estudante está aprendendo conceitos, enquanto ele está, na realidade, "aprendendo" apenas a utilizar signos. (p. 52. Grifo do autor).

Nesse sentido, de acordo com Elia e Spyrou (2006), ao se trabalhar com funções, a distinção entre essas e as ferramentas (representações) utilizadas para descrever suas leis é uma das condições essenciais para a compreensão desse conceito. Os autores também afirmam que a compreensão do conceito de função não é uma tarefa fácil, dada a diversidade de representações utilizadas e as dificuldades encontradas pelos estudantes em fazer conexões entre elas, seja pela deficiência na utilização de representações distintas, causada, muitas vezes, pela concentração do trabalho docente na representação algébrica, seja pela inabilidade de coordenação entre representações.

Conforme Duval (2003), considerando que o objetivo do ensino de Matemática no nível médio e, até mesmo, no que diz respeito às disciplinas de formação inicial de Cálculo Diferencial e Integral, não é formar matemáticos pesquisadores, mas contribuir para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio, de análise e de visualização do aluno, faz-se necessária uma abordagem cognitiva no ensino dessa ciência. O desenvolvimento dessas capacidades acaba por construir as ferramentas necessárias para uma compreensão dos conteúdos estudados.

Duval (2003) afirma que a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros[25] de representação, ou na possibilidade de trocar, a todo o momento, de registro. Para que ocorra essa mobilização, há a necessidade da transformação de uma representação em outra. Essa transformação se caracteriza pela mudança na forma pela qual o conhecimento é representado. Segundo Duval (2006),

> O papel dos sistemas de representação semiótica não é apenas designar ou comunicar objetos matemáticos, mas também trabalhar em objetos matemáticos e com eles. Nenhum tipo de processo matemático pode ser utilizado sem o uso de um sistema de representação semiótica, pois o processo matemático sempre envolve a substituição de uma representação semiótica por outra. O papel dos símbolos em matemática não é ser substituto de objetos, mas de outros símbolos! O importante não é a representação, mas a sua transformação. (p. 107).

Nesse contexto, existem dois tipos de transformações que se distinguem diametralmente: o tratamento e a conversão.

Caracteriza-se como tratamento a transformação de uma representação semiótica em outra, sem que, com isso, se saia de um mesmo registro, ou seja, o tratamento é uma transformação interna ao registro. Como exemplo, tem-se o caso de encontrar os zeros de uma função usando apenas manipulações algébricas. Obtém-se o resultado esperado através da transformação da expressão algébrica da função dentro de um mesmo sistema de representação:

$$f(x) = x^2 + 3x \Rightarrow f(x) = x(x+3)$$

Se $f(x)$=0 então $x(x+3) = 0$ e $x' = 0$ ou $x'' = -3$

Figura 1 – Transformação por tratamento

[25] Segundo Duval (2003, p. 14), “para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizados em matemática, falaremos, parodiando Descartes, de ‘registro’ de representação”.

A conversão, por sua vez, é a transformação de uma representação semiótica em outra, na qual ocorre mudança de registro, mas se conserva o mesmo objeto denotado. Um caso de conversão é a transformação de uma função de sua representação algébrica para a representação gráfica:

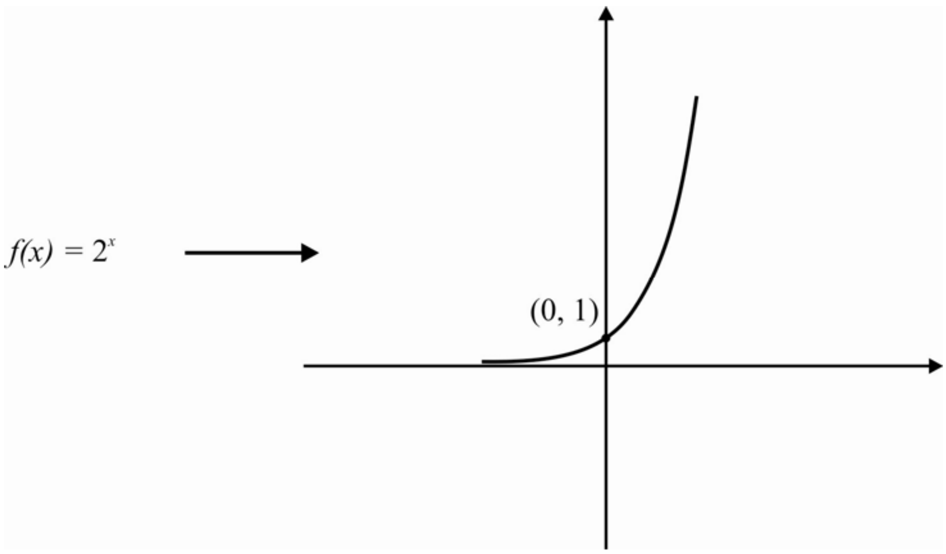

Figura 2 – Transformação por conversão

A conversão é, conforme Duval (2003), uma transformação mais complexa que o tratamento, pois a mudança de registros prevê a capacidade de reconhecimento do mesmo objeto em duas representações cujas visualizações são distintas e de explicar as propriedades e os aspectos diferentes de um mesmo objeto. Há, de acordo com Duval (2006), na atividade de conversão, dois tipos de fenômenos que se podem observar: as variações de congruência e de não congruência e a heterogeneidade nos sentidos de conversão.

Nos casos nos quais a conversão se assemelha a uma simples codificação, pois a representação final no registro de chegada transparece na representação inicial no registro de saída, caracteriza-se uma congruência. Já, se a representação final não transparece na inicial, caracteriza-se a não-congruência.

O fenômeno da heterogeneidade no sentido da conversão aborda o fato de que nem sempre a conversão acontece quando se inverte a ordem dos registros. No estudo das funções, a construção de gráficos a partir da lei de formação da função ocorre naturalmente, enquanto que a definição da forma algébrica de uma função dada graficamente, em geral, não acontece com a mesma espontaneidade. Conforme Duval (2003),

> Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela idéia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos são instintivamente escolhidos, evidentemente, nos casos de congruência. Infelizmente esses não são os casos mais freqüentes. (p. 20).

A partir dessa análise, fica caracterizada a diferença entre os dois tipos de transformação. Enquanto o tratamento ocorre internamente ao registro, a conversão ocorre entre diferentes registros de representação, sendo, portanto, externa ao registro inicial. Nesse sentido, D'Amore (2005) afirma que

> A construção do conhecimento matemático depende fortemente da capacidade de utilizar vários registros de representação semiótica dos referidos conceitos: *representado-os* em um dado registro; *tratando* tais representações no interior de um mesmo registro; fazendo a *conversão* de um dado registro para outro. (p. 62. Grifos do autor).

Duval (2003) afirma que, no estudo da Matemática, diferentemente de outras ciências baseadas na experimentação e observação, é essencial que o aluno aprenda a reconhecer um objeto de estudo através de múltiplas representações que, por sua vez, podem ser feitas em diferentes registros de representação. O autor afirma que a utilização de ao menos dois registros de representação simultaneamente é a única possibilidade para não se confundir o objeto de estudo com o conteúdo de uma representação. Ressalta, também, que o desenvolvimento dessa habilidade é fundamental para que o aluno possa, de forma independente, transferir ou modificar formulações e representações de informações durante a resolução de um problema.

Assim, de acordo com Duval (2003), surge como enganadora a idéia de que existe uma oposição entre a compreensão conceitual ou mental e as representações semióticas, caracterizadas como externas. Muitas vezes, a compreensão puramente mental nada mais é que a interiorização de uma representação semiótica.

Conforme Elia e Spyrou (2006), caso a capacidade de trabalhar com as transformações de representações entre diferentes registros não seja construída, evidencia-se um fenômeno denominado “compartimentalização”, que se caracteriza pela dificuldade cognitiva que surge com a necessidade de conversões em situações matemáticas mais complexas. Nesse sentido, os registros de representação ficam compartimentalizados, enquanto o pensamento matemático permanece fragmentado.

Os estudantes podem responder e resolver tarefas envolvendo funções dentro de um mesmo registro de representação correta e coerentemente, mas, ao mesmo tempo, não obter o mesmo sucesso em questões que envolvem diferentes formas de representação de funções. Nesse contexto, apesar de obterem sucesso em avaliações que priorizam o tratamento, o conhecimento não é construído, e o fenômeno de compartimentalização se evidencia. Segundo Elia e Spyrou (2006), os estudantes, nesse caso, provavelmente consideram os diferentes registros de representação como objetos matemáticos diferentes e autônomos, e não como formas diferentes de representar uma mesma função.

4.3 PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Outra vertente de trabalhos que envolvem também representações de objetos matemáticos é formada por pesquisadores que têm apresentado resultados de investigações relacionadas ao sentido do número, do símbolo e do gráfico, em encontros do grupo de Psicologia da Educação Matemática (*Psychology of Mathematics Education*), PME, que surgiu em 1976, na cidade de Karlsruhe, na Alemanha, durante o III *International Congress on Mathematics Education* (ICME), a partir de uma dissidência dentro desse que era, até então, o grupo de maior destaque em Educação Matemática. O objetivo desses novos pesquisadores era incentivar a pesquisa em Educação Matemática através de interações e cooperações entre psicólogos, matemáticos e educadores matemáticos.

Nesse contexto, a Psicologia da Educação Matemática surge como uma vertente de pesquisa, reflexão teórica e aplicação prática, que possui, como cerne, a análise da atividade matemática e, como objetivo principal, o oferecimento de subsídios psicológicos para discussões envolvendo a Educação Matemática. As contribuições provenientes de suas pesquisas se distinguem, principalmente, em três aspectos: a preocupação com a atividade mental do estudante real, inserido em um contexto peculiar, que percorrerá as diversas etapas de aprendizagem; a preocupação com a conceitualização em Matemática; e o compromisso com a construção do conhecimento científico. (FALCÃO, 2003).

Os principais objetivos do grupo[26] são o contato internacional e a conseqüente troca de informações na área de Educação Matemática, o estímulo à pesquisa interdisciplinar na área, bem como o aprofundamento da compreensão dos aspectos psicológicos envolvidos no processo de ensinar e aprender Matemática.

[26] Veja no link About PME em http://igpme.org.

Neste texto, serão mencionadas, dentre os mais variados estudos e pesquisas realizados por membros do PME, algumas expressões que são destacadas nas produções do grupo.

4.3.1 Sentido das Representações

O papel das representações na compreensão e aprendizado de Matemática é uma questão central no seu ensino: a falta de competências para coordenar múltiplas representações de um mesmo conceito pode ocasionar inconsistências e atrasos na aprendizagem. (ELIA; GAGATSIS, 2006). Ao se trabalhar com função, não é diferente: faz-se uso de diversas representações para construir o seu conceito e para transitar entre elas, na busca da representação mais adequada a cada situação-problema ou construção a ser feita. Nesse sentido, Falcão (2003) explica que,

> No que diz respeito ao aluno, é importante considerar que, se os conceitos matemáticos têm sempre uma contrapartida operatória, referente a invariantes psicológicos, sua construção e utilização é sempre situada (ou seja, referente a uma situação concreta que contextualiza) e fortemente condicionada pelos suportes simbólicos disponíveis. (p. 57).

Há, portanto, a necessidade de se trabalhar com os estudantes na construção efetiva das representações dos conceitos que se deseja explorar. O uso de múltiplas representações proporciona ao aluno a possibilidade de construir uma melhor conceitualização, e, por sua vez, a habilidade de conectar diferentes modos de representação de uma situação-problema ou de um conceito, o que é fundamental para a construção do conhecimento matemático. (ELIA; GAGATSIS, 2006).

Cabe acrescentar, ainda, que, para o desenvolvimento da capacidade de utilizar diversas representações em situações matemáticas, ou seja, para uma compreensão plena do conteúdo em questão, é necessário que o estudante, primeiramente, construa o sentido de cada uma dessas representações. Dessa forma, ele incorporará seus sentidos como partes integrantes de si próprio e terá a capacidade de trazê-los à tona e de construir significados sobre as representações, naturalmente, aproximando-se da idéia de uma ação reflexiva.

4.3.1.1 Sentido do Número

Na construção do conhecimento matemático, é inconfundível a importância do papel da representação numérica. Nessa perspectiva, surge a idéia, no final da década de 1980, de estudar o que se caracterizaria como uma verdadeira compreensão dos números, das relações numéricas, de seu poder e da sua utilidade na resolução das mais diversas situações-problema. Surge, então, a idéia do Sentido do Número como a convergência das capacidades de planejar, inferir, monitorar e interpretar cálculos aritméticos e, ainda, de perceber como os números são afetados pelas operações que lhes são aplicadas.

Segundo Cebola (2002),

> [...] o *sentido do número* pode ainda definir-se como sendo a compreensão genérica que cada pessoa tem dos números e das operações. Esta compreensão inclui não só a capacidade, mas também a tendência que se possui para desenvolver estratégias úteis que envolvam números e operações como um meio de comunicação, processamento e interpretação de informação, na resolução de problemas. (p. 226. Grifos do autor).

Nesse aspecto, o Sentido do Número se torna algo pessoal, desenvolvido de formas diferentes nas diversas individualidades que constroem seu conhecimento. Com a intenção de articular uma estrutura específica, capaz de organizar e relacionar alguns componentes comumente aceitos como manifestações do sentido do número, McIntosh, Reys e Reys (apud Pierce, 2001, p. 23) propõem um modelo, reproduzido a seguir, na figura 3, para caracterização básica do Sentido do Número.

Os autores afirmam, entretanto, que o quadro apresentado não é uma lista completa de todos os aspectos possíveis do Sentido do Número, mas uma ferramenta que identifica componentes observáveis importantes e os agrupa de acordo com temas comuns.

COMPONENTES-CHAVE	COMPREENSÕES	EXEMPLOS IMPORTANTES
1 Conhecimento e facilidade com NÚMEROS	1.1 Sentido de ordenação dos números	1.1.1 Valor posicional
		1.1.2 Relação entre tipos de números
		1.1.3 Ordenação dos vários tipos de números
	1.2 Múltiplas representações dos números	1.2.1 Gráfica/ simbólica
		1.2.2 Formas numéricas equivalentes (incluindo decomposição/recomposição)
		1.2.3 Comparação entre marcas de referência
	1.3 Sentido de magnitude relativa e absoluta dos números	1.3.1 Comparando a um referencial físico
		1.3.2 Comparando a um referencial matemático
	1.4 Sistema de comparações	1.4.1 Matemático
		1.4.2 Pessoal
2 Conhecimento e facilidade com OPERAÇÕES	2.1 Compreensão do efeito das operações	2.1.1 Operando com números inteiros
		2.1.2 Operando com frações /decimais
	2.2 Compreensão das propriedades matemáticas	2.2.1 Comutatividade
		2.2.2 Associatividade
		2.2.3 Distributividade
		2.2.4 Identidades
		2.2.5 Inversos
	2.3 Compreensão das relações entre operações	2.3.1 Adição/multiplicação
		2.3.2 Subtração/divisão
		2.3.3 Adição/subtração
		2.3.4 Multiplicação/divisão
3 Aplicação do conhecimento e facilidade com números e operações em AJUSTES COMPUTACIONAIS	3.1 Compreensão das relações entre o contexto do problema e o cálculo necessário	3.1.1 Reconhecer dados exatos ou aproximados
		3.1.2 Ter a consciência de que soluções podem ser exatas ou aproximadas
	3.2 Conscientização de que existem múltiplas estratégias	3.2.1 Habilidade de criar e/ou inventar estratégias
		3.2.2 Habilidade de aplicar diferentes estratégias
		3.2.3 Habilidade de selecionar estratégias eficientes
	3.3 Inclinação para utilizar um método e/ou representação eficiente	3.3.1 Facilidade em vários métodos (mental, calculadora, papel e lápis)
		3.3.2 Facilidade para escolher número(s) eficiente(s)
	3.4 Inclinação para revisar, por sensibilidade, dados e resultados	3.4.1 Reconhecer a razoabilidade de dados
		3.4.2 Reconhecer a razoabilidade de cálculos

Figura 3 – Estrutura para considerar o sentido do número
Fonte: Pierce 2001, p. 23.

4.3.1.2 Sentido do Símbolo

A partir da idéia de Sentido do Número, surge a indagação acerca da existência de seu paralelo em álgebra. Destaca-se, então, a importância de um estudo sobre o Sentido do Símbolo, considerando-se, principalmente, o fato de que, segundo Arcavi (1994), muitos alunos, mesmo após anos de instrução algébrica, constroem pouco significado sobre os símbolos literais. Apesar de desenvolverem a capacidade de manejar técnicas algébricas, costumeiramente, não conseguem identificar a álgebra como uma ferramenta para a compreensão, expressão e comunicação de generalidades, com o objetivo de estabelecer conexões e formular argumentos matemáticos.

Em um passado não muito distante, a proficiência em rotinas matemáticas manipulativas era a grande perspectiva no Ensino de Matemática. Entretanto, de acordo com Fey (1990), a evolução tecnológica envolvendo computadores e calculadoras capazes de construir gráficos, trabalhar com manipulações simbólicas e, até mesmo, com operações envolvendo matrizes, sugere algumas novas possibilidades curriculares. Segundo o autor, "estudantes do Ensino Médio podem lidar com questões sobre variáveis, funções e relações expressas em linguagem algébrica muito antes de dominar as regras de manipulação dessas expressões." (p. 64).

Pierce (2001) destaca, entretanto, que a correta manipulação algébrica e os cálculos ainda são fundamentais para ascensão para um nível mais elevado de Matemática e afirma que o uso de tecnologias no processo de construção do conhecimento matemático não significa que as máquinas resolverão os problemas espontânea e isoladamente. Nesse sentido, de acordo com Fey (1990),

> Mesmo se as máquinas assumirem a maior parte da computação, ainda será importante para os seus usuários planejar corretamente as operações e interpretar com inteligência os resultados. O planejamento de cálculos requer a compreensão do significado das operações – das características das ações que correspondem a várias operações aritméticas. A interpretação dos resultados exige o julgamento sobre a probabilidade do dado de saída da máquina estar correto ou de que um erro possa ter sido cometido na entrada dos dados, na escolha das operações, ou no desempenho da máquina. (p. 79).

Fey (1990) propõe, então, a idéia do Sentido do Símbolo, fundamentado na perspectiva de desenvolver nos alunos, além das tradicionais capacidades acerca de conceitos e resolução de problemas, habilidades exigidas para trabalhar de forma efetiva com expressões simbólicas e operações algébricas. A importância da construção do Sentido do Símbolo baseia-se na exigência de um olhar crítico dos estudantes frente às operações realizadas, tanto por computadores como por calculadoras sofisticadas, que realizam, além de cálculos aritméticos, manipulações algébricas. Aceitando todos os dados de saída das máquinas, pode-se homologar, por exemplo, a construção do gráfico de uma função como $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$, que é simplificada para $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, sem restrições de domínio e sem a verificação de sua descontinuidade no ponto $x=-2$.

Nesse contexto, segundo Fey (1990), devem ser estimuladas e desenvolvidas para a construção do Sentido do Símbolo as habilidades de:

a) a partir de uma expressão algébrica, inferir padrões e ou representações gráficas. Por exemplo, dada a função $f(x)=3x+5$, um estudante com o Sentido do Símbolo pode esboçar o seu gráfico e perceber que se trata de uma função monótona e crescente em todo o seu domínio.

b) fazer comparações sobre a ordem de magnitude para funções com leis da forma n^1, n^2, n^3... Segundo Fey (1990), essa habilidade é uma "ponte" entre o sentido do número e o sentido do símbolo.

c) examinar uma tabela de valores, um gráfico ou informações verbais acerca de uma função e construir uma provável representação algébrica que expresse o padrão estabelecido. Como exemplo, um aluno com o sentido do símbolo pode refletir sobre a informação de que um estacionamento cobra uma taxa fixa de R$20,00 por mês mais R$0,10 por dia de utilização e construir a função $f(x)=ax+b$, onde $f(x)$ é o valor a pagar no mês, a é o valor pago por dia de utilização, e b é o valor fixo pago mensalmente, ou seja, $f(x)=0{,}10x+20$.

d) analisar operações algébricas realizadas e predizer a forma do resultado, ou, a partir do resultado, julgar a probabilidade de que a resolução tenha sido desenvolvida corretamente. Exemplificando, um aluno deveria ser capaz de perceber naturalmente que, se o determinante calculado para encontrar as raízes de uma função do segundo grau for zero, essa função não pode ter duas raízes reais distintas.

e) escolher, entre as formas equivalentes, a mais apropriada para a resolução de determinado problema. Por exemplo, um estudante com o sentido do símbolo pode perceber que, em alguns casos, é mais simples fatorar a expressão algébrica de uma função para encontrar suas raízes do que aplicar técnicas de cálculo diferencial sem a devida reflexão.

Arcavi (1994) vai além, transcende a relação do sentido do símbolo com as novas tecnologias e, apesar de evitar definir formalmente a expressão, propõe um conjunto de comportamentos mais amplo que, na sua visão, demonstra a presença do Sentido do Símbolo e que consolida um objetivo desejável para a Educação Matemática. Segundo o autor,

> A partir de exemplos reunidos, emerge um amplo espectro de interessantes formas de compreensão dos significados. Uma destilação do núcleo do que observei me levou a propor uma definição de "sentido dos símbolos". Uma definição desse tipo pode passar a ser um meio para captar a idéia, refiná-la e convertê-la em operativa, seja como um marco para investigar a aprendizagem (de álgebra) ou como uma ferramenta para desenhar o ensinar, ou para ambos. Portanto, a definição, longe de ser fixa e estrita, é mais bem uma ferramenta de trabalho para estimular novas reflexões. (ARCAVI, 2007, p. 1).

Nesse contexto, Arcavi (1994) destaca o Sentido do Símbolo como uma apreciação, uma compreensão, um instinto complexo e multifacetado em relação aos símbolos e propõe o seguinte conjunto de comportamentos que, na sua concepção, caracterizam a existência do Sentido do Símbolo:

a) ter uma compreensão sobre o poder dos símbolos, tendo-os sempre presentes e disponíveis para refletir criticamente sobre quando podem e devem ser utilizados para indicar relações, generalizações e provas que, de outra forma, estariam escondidas, invisíveis;

b) ter o sentimento de quando os símbolos devem ser preteridos seja por uma representação mais adequada à situação envolvida, seja para encontrar uma solução mais elegante ao problema proposto;

c) ir além da manipulação algébrica, complementando-a com a leitura dos significados das representações simbólicas envolvidas na resolução de um problema;

d) ter a consciência de que informações verbais ou gráficas, necessárias para a evolução da resolução de um problema, podem ser expressas algebricamente e ter, também, a habilidade de construir a expressão algébrica desejada dentro das condições apresentadas;

e) ter a habilidade de escolher uma representação simbólica para um problema e, se necessário, ter a capacidade reconhecer a incorreção da opção e de buscar uma representação mais adequada;

f) perceber a necessidade constante de buscar significados nos símbolos e nas manipulações algébricas no processo de resolução de um problema e compará-los com a expectativa criada intuitivamente para o problema;

g) perceber que os símbolos podem desempenhar papéis diferentes em diferentes contextos e construir, assim, uma noção dessas diferenças.

Arcavi (1994) afirma, porém, que, apesar de a idéia de uma lista de comportamentos capazes de indicar a presença do sentido do símbolo ser tentadora, esta lista está longe de ser exaustiva e de contemplar todas as possibilidades de expressão da presença desse sentido.

Novos comportamentos e habilidades podem complementar essa idéia e uma definição satisfatória do Sentido do Símbolo deve se pautar pela união de idéias filosóficas e teóricas com detalhadas observações da prática de resolução de problemas.

4.3.1.3 Sentido do Gráfico

No processo de ensino e aprendizagem, o recurso gráfico é de distinta importância. Com efeito, cotidianamente, surgem situações nas quais esse tipo de representação se faz presente, seja em questões expostas por meio de gráficos já construídos, seja através de sua utilização em situações-problema difíceis de serem resolvidas ou comunicadas através de outras representações e que são simplificadas por essa visualização alternativa e também pela interação entre o sujeito e a nova representação do objeto matemático.

Segundo Arcavi (1999), a visualização[27] está presente de forma muito efetiva na vida do ser humano atual, uma vez que as informações são transmitidas, em sua maioria, visualmente e que a tecnologia desenvolve e possibilita comunicação essencialmente visual. Nesse sentido, considerando que o estudante se insere nesse contexto, a visualização tem um papel importante na formação matemática, principalmente, quando a solução visual de um problema possibilita ao aluno a construção de relações entre conceitos e significados que, em uma abordagem estritamente algébrica, não são construídas.

Considerando-se a importância da visualização no processo de construção do conhecimento matemático, destaca-se, de forma inconfundível, o papel central da representação gráfica, que permite a percepção e a visualização de uma ampla gama de dados assim como a possibilidade de se olhar além desses dados, realizando-se interpretações e inferindo outras informações.

Arcavi (1999) traz como exemplo o exercício que questiona as características comuns da família das funções lineares da forma $f(x) = ax + a$. A solução meramente algébrica do problema implica apenas uma simples manipulação, $f(x) = a(x+1)$, e sua interpretação, concluindo-se que, independentemente dos valores de *a*, todas as funções passam pelo ponto (-1, 0). Contudo, a partir da construção gráfica da questão (ilustrada a seguir), os estudantes podem construir soluções envolvendo maior nível de abstração, raciocínio e relação entre conceitos. Assim, se *a* é o coeficiente angular e também o coeficiente linear da função e

[27] Definida pelo autor como a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação e reflexão sobre as mais diversas representações e que tem como objetivo a comunicação de informações, o pensamento sobre os objetos representados e o desenvolvimento de idéias anteriormente desconhecidas.

sabendo-se que o coeficiente angular é a tangente do ângulo formado pela reta construída e o sentido positivo do eixo x, sendo essa tangente obtida pela razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao referido ângulo no triângulo formado pela interseção entre a reta e os eixos ordenados, conclui-se que o cateto adjacente só pode ter medida igual a 1. Ou ainda, seja qual for o valor de *a*, todas as funções da família $f(x) = ax + a$ passam pelo ponto (-1, 0).

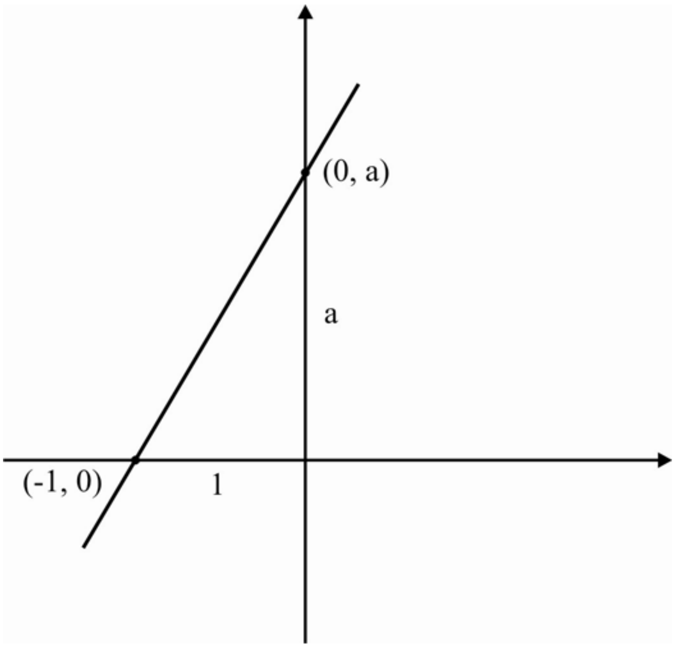

Figura 4 – Representação gráfica de *f(x) = ax + a*

A compreensão de um gráfico, porém, não é um processo simples. Diferentemente do que normalmente se pensa, esse processo não está relacionado apenas à sua leitura e interpretação, mas vai além, chegando ao ideal de construir gráficos, entender a relação existente entre os dados utilizados e inferir outros comportamentos. Nesse contexto, segundo Kramarski (2004), a construção é muito diferente da interpretação. Enquanto a interpretação se fundamenta na reação do estudante, a construção de um gráfico requer o desenvolvimento de idéias que geralmente estão implícitas.

De acordo com Friel, Curcio e Bright (2001),

> Em geral, a compreensão de informação escrita ou simbólica envolve três tipos de comportamentos que parecem estar relacionados a compreensão gráfica, translação, interpretação e extrapolação/interpolação. *Translação* requer a mudança da forma de comunicação. [...] *Interpretação* requer um rearranjo de material e a separação dos fatores importantes dos menos importantes.[...] *Extrapolação* e *interpolação*, consideradas a extensão da interpretação, requerem declarar não apenas a essência

> da comunicação, mas também identificar algumas de suas conseqüências. No trabalho com gráficos, pode-se extrapolar ou interpolar notando-se tendências percebidas através dos dados ou especificando implicações. (p. 129. Grifos dos autores).

A compreensão de gráficos, portanto, envolve a capacidade de ler e interpretar gráficos já construídos, de considerar o processo de sua construção a partir dos dados expostos e, ainda, a habilidade de construí-los a partir de outras representações que se apresentem ou da interpretação de dados propostos. Segundo Friel, Curcio e Bright (2001), são identificados três níveis principais de habilidades na compreensão de gráficos:

- *ler os dados*: baseado na capacidade de ler os dados e informações diretamente do gráfico, compreendendo as convenções do seu desenho;
- *ler entre os dados*: caracterizado pela habilidade de encontrar relações e manipular, através de comparações, as informações contidas no gráfico;
- *ler além dos dados*: baseado na capacidade de generalizar, predizer, ou identificar tendências e relacionar as informações do gráfico com o contexto da situação dada.

Os autores definem, então, como compreensão de gráficos, a habilidade de construir significados na sua construção ou na interpretação de gráficos já existentes. Salientam, também, que muitos fatores influenciam nessa compreensão: o objetivo da utilização de gráficos, o contexto das tarefas, a singularidade do conteúdo e as características individuais dos estudantes.

Nesse sentido, Friel, Curcio e Bright (2001) propõem a idéia de Sentido do Gráfico como um arranjo de comportamentos envolvendo a leitura, descrição, interpretação, análise e extrapolação de dados dos gráficos. Descrevem, ainda, que o sentido do gráfico se desenvolve, gradualmente, na criação de gráficos, na utilização de gráficos já disponíveis em uma variedade de contextos e problemas que necessitam da compreensão de dados e no trabalho com gráficos além do limite da sua construção ou da simples extração de dados.

A partir da definição de Friel, Curcio e Bright (2001) acerca de gráficos de vários tipos (gráficos de barras, circulares, etc.), utilizados em vários contextos, pode-se construir um grupo de comportamentos ligados ao trabalho com gráficos cartesianos que, juntos, demonstram a presença do sentido do gráfico:

a) a habilidade de reconhecer os componentes dos gráficos, suas inter-relações e o efeito desses componentes na apresentação das informações. Nesse contexto, os gráficos são utilizados para a visualização de quantidades relacionadas;

b) falar a linguagem específica dos gráficos quando construir raciocínios sobre a representação dada. Utilizando a linguagem relacionada à comunicação de idéias contidas nas representações gráficas, os estudantes constroem consciência dos componentes de um gráfico e suas interações no contexto em que estão dadas as informações;

c) compreender as relações entre tabelas, gráficos e os dados analisados. Os estudantes devem atentar para a representação simbólica e espacial e para as formas nas quais tabelas e gráficos podem ser úteis nas situações-problema que se apresentem;

d) responder a diferentes níveis de problemas associados à compreensão gráfica e à interpretação das informações contidas nos gráficos. Os três níveis de questões envolvem a extração de dados dos gráficos, a compreensão das relações entre as variáveis apresentadas e a extrapolação dos dados interpretando essas relações;

e) ter consciência das relações entre as variáveis, na construção e interpretação dos gráficos, e do contexto no qual essas estão sendo utilizadas, com o objetivo de evitar a personalização[28] dos dados representados. Apesar de a contextualização ser útil para os estudantes resgatarem seus conhecimentos prévios, esses conhecimentos podem levar a interpretações equivocadas[29] das informações dos gráficos. A personalização do contexto pode levar o aluno a um diferente tipo de abstração que pode tirar sua atenção dos objetivos principais da construção do conhecimento. Portanto, compreender os equívocos que a personalização dos dados pode causar é fator preponderante para uma interpretação correta das informações contidas em um gráfico.

De acordo com Kramarski (2004), o sentido do gráfico significa, portanto, poder olhar para um gráfico, ou parte dele, e construir o significado sobre a relação entre as variáveis e sobre seu padrão de co-variação.

---

[28] A expressão “Personalização” está sendo usada no sentido de levar as informações para um contexto pessoal e previamente construído a partir das experiências vivenciadas pelo sujeito.
[29] Obstáculos Epistemológicos, na definição da Didática Francesa.

5 CONCLUSÕES

Imergindo no estudo e nas investigações acerca do conceito de função, envolvendo sua construção e as perspectivas atuais em Educação Matemática trazidas para esse plano, destaca-se a afirmação de Duval (2003), alertando que “é suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático.” (p. 13). Assim, relacionando essa afirmação com o contexto investigado, evidencia-se a precisão da sua afirmação, pois cada passo dado nesse caminho evolutivo foi subsidiado pelo desenvolvimento de novos registros de representação semiótica desse objeto do conhecimento matemático.

Por meio da recapitulação da construção histórica do conceito de função, fica claro que o surgimento dessa idéia foi alicerçado pela introdução, na civilização babilônica, de representações tabulares de funções elementares para cálculos envolvendo o movimento dos planetas na esfera celeste. A primeira noção evidenciada de função, mesmo que ainda muito rudimentar e distante de um pensamento formal e abstrato, é relacionada, então, à utilização do registro de representação semiótica tabular.

Novos avanços relativos às representações precisaram ocorrer para elevar a Matemática a um posto de destaque entre as ciências e também para que a idéia de relação funcional se desenvolvesse. Foram necessárias, então, contribuições como as de Oresme no estudo da intensidade das formas, desenvolvendo o registro de representação gráfico, abordando idéias sobre quantidades variáveis dependentes, para que o conceito de função se desenvolvesse na direção de uma idéia mais geral.

A construção desse conceito foi novamente catalisada quando houve o desenvolvimento da álgebra simbólica, fundamentado em contribuições como as de Diofanto e Viète no desenvolvimento do registro de representação algébrico. Com essa evolução em mais um registro de representação, ocorreu a introdução do conceito de função como uma relação entre conjuntos numéricos e como uma expressão analítica através de fórmulas.

Com os registros de representação tabular, gráfico e algébrico bem desenvolvidos, há, então, a partir das idéias de Descartes de aplicação da álgebra à geometria, o componente que levou o conceito de função a se desenvolver mais rapidamente e a alcançar o cerne de toda a Matemática atual. A partir das idéias e inovações de Descartes, foi possível desenvolver-se, então, o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, da Análise Matemática e de outros campos fundamentais para o desenvolvimento da ciência moderna.

Analisando, cuidadosamente, a grande contribuição de Descartes, que foi fundamental para os estudos de cientistas como Newton e Leibniz, entre outros, percebe-se que nasceu, nessa inovação, a rotina de construir transformações de objetos matemáticos entre diferentes registros de representação semiótica. Com a idéia da geometria analítica, surge, então, a prática da transformação denominada atualmente por Duval de conversão.

As transformações propostas por Descartes consistiam em converter a representação de objetos matemáticos do registro de representação gráfico para o registro de representação algébrico, assim como no sentido inverso. Uma reta, uma parábola, uma circunferência, poderiam, então, ser representadas no plano, mas poderiam ser convertidas em expressão algébrica dentro de um registro diverso, para que algumas de suas propriedades ficassem mais evidentes ou para que problemas envolvendo esses objetos fossem resolvidos mais facilmente. Dissemina-se, assim, a partir do séc. XIV, a prática da conversão, destacada por Duval como habilidade fundamental para a compreensão matemática e como uma prática capaz de diferenciar as representações dos objetos matemáticos representados.

Desse modo, emerge a importância do desenvolvimento das habilidades inerentes a cada uma das representações - gráfica, algébrica, tabular - e também da habilidade de transitar entre elas, realizando constantes conversões, como fundamentais para uma construção sólida do conceito de função e, por conseqüência, do pensamento funcional. Assim, surge, de forma inconfundível, a necessidade de se trabalhar com os estudantes na construção do sentido dessas representações, buscando o desenvolvimento da capacidade de, através de cada uma delas, perceber o objeto matemático em questão, e não apenas sua representação isoladamente.

A partir do surgimento e desenvolvimento da prática da conversão, pode-se, inclusive, entender que se quebram paradigmas quanto ao entendimento do que seria uma compreensão em Matemática. Enquanto o pensamento matemático restringia-se, em cada campo, a apenas um registro de representação, a compreensão sobre o conceito de determinados objetos matemáticos era compartimentalizada, restringindo-se a esse registro.

Esse aspecto, ainda tão comum na transposição didática do saber científico ao saber escolar, estendeu-se à compreensão sobre álgebra, tabelas e gráficos, constituindo-se um incentivo ao fenômeno de compartimentalização do conhecimento e também como um obstáculo epistemológico para a ascensão dos alunos a pensamentos matemáticos mais sofisticados e abstratos. Enquanto a conversão não figurar como prática comum na matemática escolar, restringindo-se essa, em cada conteúdo, a apenas um registro de representação, a possibilidade de compreensão de conceitos como o de função e a resolução de problemas envolvendo esse domínio são possivelmente inalcançáveis. Nesse contexto de conhecimento segregado, considera-se como compreensão plena sobre álgebra a habilidade de fazer manipulações algébricas através de regras pré-determinadas, a compreensão sobre gráficos se restringe a plotar pontos no plano cartesiano e a ligá-los com uma curva, enquanto as tabelas continuam sendo utilizadas unicamente como recursos para calcular esses pontos. Obviamente, pode-se, até mesmo, obter aprovação na disciplina sem transpor esses obstáculos, mas a construção do pensamento matemático, do pensamento funcional, não estará sendo privilegiada.

Com essa percepção da importância das idéias de Duval - que inclusive afirma que a conversão de objetos matemáticos de uma representação para outra é condição fundamental para se resolverem problemas matemáticos com sucesso - as certezas sobre a caracterização de compreensões, principalmente sobre os registros de representação algébrico e gráfico, transformam-se. Se compreender Matemática requer a habilidade de transitar entre as mais variadas representações, entendendo o objeto matemático dentro de sua abstração e diferenciando-o de suas possíveis representações, surge, então, a necessidade de compreender as representações de uma nova forma, inclusive tendo a capacidade de intuir quando é o momento de abandonar um sistema de representação e entrar em outro. Nessa perspectiva, chega-se à importância de construir o sentido das representações envolvidas na atividade matemática e, no caso das funções, destaca-se a importância do Sentido do Símbolo e do Sentido do Gráfico.

Nesse momento, surge um campo de convergência entre as idéias das duas vertentes de Educação Matemática investigadas. Para ocorrer um trânsito freqüente entre as diversas representações, há a necessidade de se construir o sentido dessas representações que, inclusive, também são caracterizados pela capacidade de perceber que tipo de representação é mais adequado para cada situação. Nesse sentido, a construção do sentido das representações é fundamental para a construção da capacidade de conversão entre registros de representação.

Dentro desse contexto, no caminho rumo à construção do conceito de função, é imprescindível, portanto, dedicar-se ao estudo de representações algébricas, construindo o Sentido do Símbolo, trabalhando com esse intuito, já a partir da transição da aritmética à álgebra, quando um símbolo deixa de representar um valor desconhecido para se tornar o representante de possíveis valores pertencentes a um conjunto. Nesse momento, já se está contribuindo para a construção do conceito de variável, que, segundo Caraça (2005), "é, afinal, o símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um de seus membros, mas não se reduz a ela." (p. 120).

Estudando as representações algébricas e explorando seus significados, as implicações de suas articulações e o que representam, o estudante poderá perceber a álgebra como ferramenta para resolução de problemas e generalizações, e não apenas como um somatório de técnicas de articulações sem relação com a realidade e outros conteúdos. A partir do momento em que o aluno constrói o Sentido do Símbolo, esse passa a perceber também a necessidade de outras representações, de criar conexões constantes entre essas e também de realizar conversões.

Da mesma forma, surge, como fundamental para uma construção sólida do conceito de função, o desenvolvimento do Sentido do Gráfico, trabalhando com situações em que gráficos sejam utilizados como fonte para extração e análise de tendências, como o crescimento ou decréscimo de valores, e ainda em situações-problema em que sejam construídos gráficos a partir de dados propostos. Com esse trabalho, o aluno desenvolve a capacidade de ter a representação gráfica sempre disponível como opção para resolução de situações-problema mais indicadas a esse registro de representação, facilitando a visualização de certos comportamentos que, algebricamente, seriam mais complexos de serem percebidos.

Esse processo de interação com a representação gráfica é gradual e leva o aluno a extrapolar a simples construção de gráficos e leitura de dados a partir de um gráfico dado. O estudante passa a interagir com a representação, lendo, primeiramente, entre os dados, ou seja, encontrando relações e estabelecendo comparações entre as informações dos gráficos, para, depois, passar a ler além dos dados, generalizando, inferindo e identificando tendências através da construção e interpretação das representações.

Surge, assim, a oportunidade de o aluno visualizar relações de dependência entre as variáveis envolvidas em uma determinada situação, estudando a influência de cada uma delas no comportamento da outra e de visualizar, a partir dos gráficos, generalizações para relações funcionais estabelecidas.

Desenvolvidos o Sentido do Símbolo e o Sentido do Gráfico e passando a utilizá-los adequadamente e a perceber a relação intrínseca entre as mais diversas formas de representação de um objeto matemático, estão construídos os componentes adequados para que se introduza o estudo do conceito de função. Uma vez que se tem consciência do papel das representações e se introduz o conceito de função, surge a necessidade de explorá-lo transitando entre suas diversas representações, conforme a idéia de Duval, de constante conversão entre os diferentes registros de representação semiótica.

Nesse contexto, torna-se necessário estudar as funções através de representações diversas, sempre que possível, fazendo a conversão entre essas representações e, de forma alguma, estudar e explorar uma representação semiótica específica isoladamente, esgotando-a, para passar a explorar outra.

Pode-se afirmar, portanto, que um estudo adequado sobre o conceito de função e suas implicações matemáticas deve se pautar, primeiramente, pelas teorias do Sentido das Representações, explorando a construção do Sentido do Símbolo e do Sentido do Gráfico, para, a seguir, introduzir a idéia de função como um objeto matemático abstrato, possível de ser visualizado por meio de diversas representações. Construindo-se o conceito de função a partir de diversas representações e explorando situações-problema que ilustrem que a capacidade de transitar entre elas leva a uma visualização mais ampla dos problemas e do caminho a ser tomado para resolvê-los, contribui-se para que o estudante adquira essa prática e transponha o paradoxo cognitivo do pensamento matemático, deixando de lado a compartimentalização e as articulações algébricas costumeiras e passando a realizar conversões entre os registros de representação naturalmente. Constroem-se, assim, condições para que o estudante desenvolva o pensamento funcional e passe a transitar livremente entre as mais variadas representações das funções.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Investigado e estudado criticamente todo o arcabouço teórico explorado nesta dissertação, surge a necessidade de se discutir a relevância e aplicabilidade, em práticas docentes voltadas para o Ensino Médio e também para disciplinas de Ciências Exatas no Ensino Superior, das teorias discutidas nesta pesquisa. Com esse propósito, é exposta uma situação-problema que abre a possibilidade de exploração dos conceitos abordados, bem como sugere uma linha de trabalho a ser utilizada, visando a contribuir para a construção do pensamento funcional, explorando a idéia de Duval de constantes conversões entre diferentes registros de representação semiótica a partir da construção dos sentidos das representações.

É relevante perceber a importância da construção do conceito de função principalmente durante a escola básica. Nesse contexto, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 72) destacam o papel central desse conteúdo na educação escolar e salientam que o estudo do tema pode ser iniciado com a exploração qualitativa das relações entre duas grandezas, como tempo e distância percorrida, em diferentes situações, destacando-se sempre a importância da representação gráfica dessas funções. Nesse sentido, também salientam que é fundamental instigar o aluno a construir suas próprias relações funcionais, esboçando os seus gráficos e inferindo padrões, como crescimento e decrescimento, nos seus comportamentos.

Dentro ainda das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Ibid., p. 72), é destacada a importância de se trabalhar o conteúdo abordando os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo nesse nível, como as funções lineares, afins, quadráticas, exponenciais e trigonométricas. Esses modelos, por sua vez, devem ser tomados em diferentes áreas do conhecimento e envolver contextos diversos, como queda livre, movimento uniforme, movimento uniformemente variado, rendimentos financeiros, crescimento de uma colônia de bactérias, entre outros. Ressalta-se, também, o ideal de construção dos gráficos de funções a partir da compreensão global da relação estabelecida entre as variáveis, evitando-se, assim, a construção de gráficos a partir da simples transcrição de pares ordenados obtidos através de uma tabela numérica.

Ratificando o papel central do conceito de função na Educação Matemática atual, as avaliações nacionais também abordam questões envolvendo funções e as habilidades que devem ser desenvolvidas pelos alunos no trabalho com esse conteúdo. Nas matrizes de referência para o terceiro ano do Ensino Médio do Sistema Nacional de Avaliação da

Educação Básica[30] (SAEB) (BRASIL, 2007), por exemplo, são destacadas as competências que devem ser desenvolvidas pelos estudantes a partir do trabalho com funções. Nesse sentido, são salientadas as habilidades de construir, a partir de uma tabela, expressões algébricas que representem uma função; analisar crescimento, decrescimento e zeros de funções reais apresentadas em gráficos; identificar um gráfico de uma função a partir de uma situação descrita textualmente; reconhecer, dado o seu gráfico, a representação algébrica de uma função.

No relatório pedagógico do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) (BRASIL, 2008, p. 42), também são descritas habilidades e competências a serem desenvolvidas pelos estudantes do Ensino Médio. Nesse contexto, destaca-se a competência de selecionar, organizar, relacionar e interpretar dados e informações apresentados de diferentes formas, com o objetivo de tomar decisões e resolver situações-problema. Surge também, como relevante, a habilidade de, a partir de uma situação-problema, dada em uma linguagem de determinada área do conhecimento, relacioná-la com sua formulação em outras linguagens ou vice-versa.

É importante também salientar que não só no Brasil essas indicações referendando a importância do conceito de função, suas representações e implicações, se fazem presentes. Em Portugal, por exemplo, no último Programa de Matemática do Ensino Básico (PONTE et al., 2008), é indicada, como capacidade a ser desenvolvida no Ensino Médio, a prática de trabalhar com idéias matemáticas em diversas representações, ou seja, os alunos devem ser capazes de ler e interpretar representações simbólicas, tabulares e gráficas e de apresentar, adequadamente, informação em qualquer dessas formas de representação; de traduzir informação de uma forma de representação para outra; de elaborar e usar representações para registrar, organizar e comunicar idéias matemáticas; de usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas.

Refletindo sobre esse conjunto de situações e citações que traduzem a importância ímpar do estudo do conceito de função, percebe-se, claramente, que há uma relação entre as habilidades e competências que idealmente devem ser desenvolvidas na construção desse conceito, a idéia dos Sentidos das Representações e também a teoria dos Registros de Representação Semiótica.

---

[30] Através do SAEB, são avaliadas, em Matemática, “habilidades e competências definidas em unidades chamadas descritores, agrupadas em temas que compõem a Matriz de Referência dessa disciplina.” (BRASIL, 2008, p. 1).

A importância dada à construção gráfica e, além disso, à capacidade de analisá-la, inferindo padrões e prevendo comportamentos da função, a partir da compreensão real da relação de dependências entre as variáveis, conduz diretamente aos pressupostos do Sentido do Gráfico. Destaca-se, dentre as habilidades inerentes ao sentido dessa representação, o conceito de ler além dos dados ou de extrapolar os dados do gráfico, referido, justamente, como a capacidade de generalizar, predizer e identificar tendências a partir das informações do gráfico relacionadas com o contexto da situação dada.

Destacam-se também, principalmente na análise das matrizes de referência para terceiro ano do Ensino Médio, do SAEB, bem como nas análises do relatório pedagógico do ENEM e do Programa de Matemática do Ensino Básico de Portugal, referências que levam, mesmo que implicitamente, às idéias da teoria dos Registros de Representação Semiótica. Nesses documentos, é possível ler a importância dada pelas autoridades competentes, principalmente, à capacidade de conversão entre os diversos tipos de registros de representação semiótica. Ressalta-se a relevância da construção da capacidade de ler, interpretar e apresentar informações nas diversas formas de representação, principalmente, a algébrica e a gráfica, e também a capacidade transformar uma informação dada, de um registro para outro.

A partir dessa discussão, trazendo as referências feitas à importância do conceito de função por diferentes textos da área de Educação Matemática, apresento uma situação-problema que considero oportuna para explorar os conceitos de Sentido do Símbolo, Sentido do Gráfico e também a prática da conversão destacada por Duval na sua teoria dos Registros de Representação Semiótica. Não se trata de uma receita, ou de um modelo, que deve ser repetido necessariamente da mesma forma, mas de uma sugestão que deve ser estudada e adaptada à realidade de cada sala de aula, de cada turma, respeitando sempre as diferenças e individualidades.

Duas partículas deslocam-se em uma região plana e suas trajetórias distintas são dadas por meio dos pontos (x, sen(2x)) e (x, 2^{-x}), para $0 \leq x \leq 12\pi$. Analise os gráficos das trajetórias, verifique se as partículas se encontram e quantas vezes isso acontece.

O problema proposto apresenta aos alunos uma situação que, em uma primeira leitura, talvez não lhes pareça estar relacionada ao conceito de função. Uma análise mais criteriosa, entretanto, leva à conclusão de que, efetivamente, as trajetórias das duas partículas são dadas por funções de *x*. O professor pode, então, a partir de discussões, levar os alunos à compreensão de que as partículas se movem segundo as funções $f(x) = sen(2x)$ e $g(x) = 2^{-x}$, respectivamente. Essa interação entre estudantes, professor e a situação proposta[31], culminando com escrita das trajetórias por meio de funções, possibilita a prática do tratamento, ou seja, a transformação de uma representação simbólica em outra dentro do registro de representação algébrico. Mas esse tratamento também explora e incentiva o desenvolvimento de Sentido do Símbolo, pois possibilita ao aluno ir além da simples obtenção e manipulação da informação proposta, proporcionando a leitura do significado dos símbolos apresentados para a conclusão de que podem ser representados de uma forma diferente que, inclusive, provavelmente, facilita a resolução da situação-problema proposta.

Definidas as trajetórias das partículas como funções, no caso *f* e *g*, surge a necessidade da sua construção gráfica para responder às questões. A transformação de *f* e *g*, do registro de representação algébrico para o registro de representação gráfico, exige a habilidade definida por Duval como conversão e destacada pelo autor como condição fundamental para a compreensão matemática.

Nesse processo de conversão, destaca-se também a importância do Sentido do Gráfico, uma vez que as construções dessas representações se fundamentam, necessariamente, na consciência da relação existente entre as variáveis envolvidas e no contexto em que estão sendo utilizadas. Para a construção adequada dos gráficos das funções destacadas na questão, há também a necessidade de inferir o padrão de comportamento de cada representação. É necessário, por exemplo, discutir o período da função $f(x) = sen(2x)$, uma vez que a variável é multiplicada por uma constante. Além disso, para garantir que haja intersecção dos gráficos, deve ser analisado o fato de que a função exponencial $g(x) = 2^{-x}$ é monótona decrescente e que, para $x \in [0;\frac{\pi}{4}]$, seus valores pertencem ao intervalo $[2^{-\frac{\pi}{4}};1]$. Dessa forma, sendo a função $f(x) = sen(2x)$ crescente em $x \in [0;\frac{\pi}{4}]$, seus valores percorrem o intervalo [0;1] e, então, haverá pelo menos uma intersecção dos gráficos nesse intervalo. Todas essas discussões são pertinentes e relevantes uma vez que essas características são fundamentais para uma construção gráfica adequada para a resolução do problema, explorando o Sentido do Gráfico, e ainda exigem que os estudantes tenham o Sentido do Símbolo e que consigam realizar tratamentos dentro do registro algébrico.

---

[31] Situação Didática.

Feitos todos os tratamentos e conversões, exploradas as habilidades inerentes ao Sentido do Símbolo e ao Sentido do Gráfico, culminando com a construção dos gráficos das funções *f* e *g*, há, ainda, a necessidade de sua interpretação. Primeiramente, deve-se observar que a situação se restringe a valores de *x* pertencentes ao intervalo dado $[0;12\pi]$. Depois, deve-se inferir um padrão de comportamento envolvendo as duas representações, para concluir quantos são os pontos de intersecção. Novamente, já com a construção dos gráficos finalizada, há a necessidade do Sentido do Gráfico para analisar o comportamento das funções no intervalo $[0;\frac{\pi}{4}]$ estudado e, então, extrapolar seus dados para concluir a resolução da situação-problema.

Ilustrada a abrangência da situação proposta e das situações que surgem na sua resolução, capazes de proporcionar momentos adequados para discussão dos conceitos estudados neste trabalho, acredito que fica caracterizada a importância de integrar esse tipo de atividade ao cotidiano escolar. Trabalhando com problemas com essas características, criam-se oportunidades para que os alunos, em um ambiente sadio de debate e discussão, percebam a importância da conversão e dos sentidos das representações.

Dessa forma, explorando situações-problema semelhantes, além de deixar transparecer a importância dessas práticas, pode-se fomentar a construção do pensamento matemático e deixa-se de lado a visão de que a Matemática restringe-se a manipulações sucessivas, normalmente algébricas, sem sentido e significado para o estudante.

Essas situações são, portanto, possibilidades concretas de catalisar o pensamento crítico do aluno e sua autonomia, pois se elimina a idéia de “faça como o modelo” e criam-se condições para que cada aluno faça seus tratamentos, conversões e construa seus sentidos das representações a partir da sua visão singular. A necessidade de movimentar-se entre os registros algébrico e gráfico pode proporcionar aos alunos essa oportunidade de pensar crítica e autonomamente, pois cada estudante pode optar pelo seu passo inicial – algébrico ou gráfico – na resolução da questão, e cada escolha feita leva a caminhos diferentes. Com isso, estimula-se a discussão entre alunos e professor e, no final, todos esses caminhos devem levar à mesma resposta.

É imprescindível destacar, portanto, a importância de se trabalhar em sala de aula na busca da construção de situações didáticas capazes de proporcionar o desenvolvimento do sentido das representações, bem como da prática da conversão. Dessa forma, o pensamento matemático e a autonomia para escolha individual são privilegiados, enquanto os alunos crescem em conhecimento e se desenvolvem como pessoas críticas e criativas.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Lourdes; OLIVEIRA, Isolina. *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa, 1999.

ALVES-MAZZOTTI, Alda. O planejamento de pesquisas qualitativas. In: ALVES-MAZZOTTI, Alda; GEWANDSNAJDER, Fernando. *O método nas ciências naturais e sociais:* pesquisa quantitativa e qualitativa. 2 ed. São Paulo: Pioneira, 1999. p. 107-203.

ANTON, Howard. *Cálculo, um novo horizonte*. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ARCAVI, Abraham. The role of visual representations in the learning of mathematics. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., Cuernavaca, Mexico, 1999. *Proceedings…* Cuernavaca; PME, 1999. p. 55-80.

______. Symbol Sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematic*, v.14, n. 3, p. 24-35, 1994.

______. El Desarrollo y el Uso del Sentido de los Símbolos. *Revista de Didáctica de las Matemáticas.* n. 44, p. 59-75, 2007. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS. Acesso em: 20 nov. 2007.

BACHELARD, Gaston. *A Formação do Espírito Científico:* contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BOYER, Carl B. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRAGA, Ciro. *Função:* a alma do ensino da matemática. São Paulo: Annablume, Fapesp, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio:* ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 10 nov. 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica. *Matriz de referência – Matemática – 3º ano do Ensino Médio.* 2007. Disponível em: http://provabrasil.inep.gov.br/index.php?option=com_wrapper&Itemid=148. Acesso em: 10 nov. 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *ENEM:* Relatório Pedagógico 2007. Brasília, 2008. Disponível em: http://www.inep.gov.br/download/enem/Relatorio/ENEM_2007.pdf. Acesso em: 10 nov. 2008.

BROUSSEAU, Guy. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 48-72.

______. Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa: Gradiva, 2005.

CEBOLA, Graça. Do Número ao Sentido do Número. In: PONTE, João Pedro et. al. *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores*. Coimbra: SEM, 2002. p. 233-239. Disponível em: http://www.spce.org.pt/sem/156cebola.pdf. Acesso em: 20 jul. 2008.

CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique*: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: Editions La Pensée Sauvage, 1985.

D´AMBRÓSIO, Ubiratan. *Transdisciplinaridade*. São Paulo: Palas Athena, 1997.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara et. al. *Educação Matemática:* uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 135-154.

D'AMORE, Bruno. *Elementos de Didática da Matemática.* São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

______. *Epistemologia e Didática da Matemática.* São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DIEUDONNÉ, Jean. *A Formação da Matemática Contemporânea.* Lisboa: Dom Quixote, 1990.

DUVAL, Raymond. Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issue for Learning. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., Cuernavaca, Mexico, 1999. *Proceedings…* Cuernavaca: PME, 1999. p. 3-26.

______. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.). *Aprendizagem em Matemática:* registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

______. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, n. 61, p. 103-131, 2006.

ELIA, Ilíada; GAGATSIS, Athanasios. The Effects of Different Modes of Representation on Problem Solving: two experimental programs. CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 30; 2006, Praga. *Proceedings…* Praga: PME, 2006. v. 3, p. 25-32.

ELIA, Ilíada; SPYROU, Panayotis. How Students Conceive Function: a triarchic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept. *The Montana Mathematics Enthusiast*, v. 3, n. 2, p. 256-272, 2006.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FALCÃO, Jorge Tarcísio da Rocha. *Psicologia da Educação Matemática:* uma introdução. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

FEY, James T. Quantity. In: STEEN, Lynn Arthur (Ed.). *On the Shoulders of Giants:* New Approaches to Numeracy. Washington: National Academies Press, 1990. p. 61-94. Disponível em: http://books.google.com. Acesso em: 18 set. 2008.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. *Investigação em Educação Matemática:* percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FREITAS, J. L. M. Situações didáticas. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara et. al. *Educação Matemática:* uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 65-88.

FRIEL, Susan N.; CURCIO, Frances R.; BRIGHT, George W. Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 32, n. 2, p. 124-158, 2001.

GÁLVEZ, Grecia. A didática da matemática. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 26-34.

IGLIORI, Sônia Barbosa Camargo. A noção de "Obstáculo Epistemológico" e a Educação Matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara et. al. *Educação Matemática:* uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 89-113.

KRAMARSKI, Bracha. Making sense of graphs: does metacognitive instruction make a difference on students' mathematical conceptions and alternative conceptions? *Learning and Instruction*, n. 14, p. 593-619, 2004.

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. *Aprendizagem em Matemática:* registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

MONNA, A. F. The Concept of Functions in the 19^{th} and 20^{th} Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. *Archive for History of Exact Science*, v. 9, p. 57-84, 1972.

MORENO, C. Biquíni. *Zero Hora*, Porto Alegre, 26 abril 2008. Caderno Cultura, p. 7.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática:* uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

______. Transposição Didática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara et. al. *Educação Matemática:* uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 13-42.

PASSOS, C. L. B. et al. Desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática: uma meta-análise de estudos brasileiros. *Quadrante*, Lisboa, v. 15, n. 1-2, p. 193-219, 2006.

PIERCE, Robyn U. *An exploration of algebraic insight and effective use of computer algebra systems*. 2001. 353 f. Tese (Doutorado em Filosofia)- University of Melbourne, Australia, 2001.

PONTE, João Pedro et al. *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Portugal: Ministério da Educação, 2008. Disponível em: http://www.portugal.gov.pt/NR/rdonlyres/3AB727C1-F40E-4FC3-8EC1-09537D927C1A/0/Programa_Matematica_Basico.pdf. Acesso em: 10 nov. 2008.

PONTE, João Pedro. The History of the Concept of Function and Some Educational Implications. *Mathematics Educator*, v. 3, n. 2, p 3-8, 1992. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-uk/92%20Ponte%20(Functions).doc. Acesso em: 20 nov. 2007.

ROSSINI, Renata. *Saberes docentes sobre o tema função:* uma investigação das praxeologias. 2006. 382 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SAMPAIO, R. F.; MANCINI, M. C. Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. *Revista Brasileira de Fisioterapia*, v. 11, n. 1, p. 83-89, jan./fev. 2007. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/rbfis/v11n1/12.pdf. Acesso em: 10 jul. 2008.

SILVA, Benedito Antonio da. Contrato Didático. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara et. al. *Educação Matemática:* uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 43-64.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 16, n. 1, p. 37-85, 1976.

B928m Bueno, Rafael Winícius da Silva

As múltiplas representações e a construção do conceito de função / Rafael Winícius da Silva Bueno ; orientador, Lori Viali, 2009.
68 p.

Dissertação (mestrado) – PUCRS, 2009.

Bibliografia

1. Funções (Matemática) . 2. Matemática – Estudo e ensino. I. Viali, Lori. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática.

CDD : 517.5

Catalogação : Bibliotecária Edi Focking CRB-10/1197