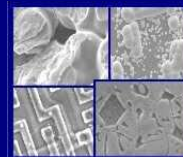




PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA E TECNO-  
LOGIA DE MATERIAIS

Faculdade de Engenharia  
Faculdade de Física  
Faculdade de Química



PGETEMA

**DESENVOLVIMENTO DE UM ALGORITMO PARA RECON-  
STRUÇÃO DE IMAGENS UTILIZANDO A TÉCNICA DE TOMO-  
GRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA**

**JEFFERSON SANTANA MARTINS**

BACHAREL EM FÍSICA MÉDICA E LICENCIADO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA  
E TECNOLOGIA DE MATERIAIS**

**Porto Alegre**

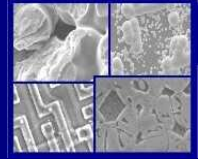
**Julho, 2012**



PUCRS

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA E TECNO-  
LOGIA DE MATERIAIS

Faculdade de Engenharia  
Faculdade de Física  
Faculdade de Química



PGETEMA

## DESENVOLVIMENTO DE UM ALGORITMO PARA RECON- STRUÇÃO DE IMAGENS UTILIZANDO A TÉCNICA DE TOMO- GRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA

**Jefferson Santana Martins**

BACHAREL EM FÍSICA MÉDICA E LICENCIADO EM FÍSICA

ORIENTADOR: Prof. Dr. Rubem Mário Figueiró Vargas

COORDENADOR: Prof. Dr. Cássio Stein Moura

Trabalho realizado no Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia de Materiais (PGETEMA) da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia e Tecnologia de Materiais.

*Trabalho vinculado ao Projeto Imagens Petrobras*

**Porto Alegre  
Julho, 2012**

"They did not know it was impossible, so they did it!"

(Jean Cocteau)

*Meu desenho não representava um chapéu. Representava uma jibóia digerindo um elefante. Desenhei então o interior da jibóia, a fim de que as pessoas grandes pudessem compreender. ("O Pequeno Príncipe" de Antoine de Saint-Exupéry)*

## DEDICATÓRIA

À Anna Luiza, Luciane, Teresinha, Danilo  
e à vida, nesse pálido ponto azul.

## SUMÁRIO

RESUMO .....	10
ABSTRACT .....	11
1. INTRODUÇÃO .....	12
2. OBJETIVOS .....	16
2.1 Objetivos Específicos .....	16
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	17
3.1 Introdução a TIE .....	17
3.2 Modelagem do Problema Direto .....	20
3.3 O Método das Diferenças Finitas .....	23
3.4 Problema Inverso .....	33
3.5 Recozimento Simulado e o problema inverso da TIE .....	36
4. METODOLOGIA.....	39
4.1 Problema Direto.....	39
4.2 Problema Inverso .....	52
5. RESULTADOS .....	61
5.1 Problema Direto.....	61
5.2 Problema Inverso .....	73
6. CONCLUSÃO .....	88
REFERÊNCIAS .....	93
ANEXO A .....	96
ANEXO B .....	99
ANEXO C .....	104
ANEXO D .....	111

## Lista de Ilustrações

Figura 1: Padrão adjacente de injeção de corrente elétrica no domínio. Extraído de: TRIGO, 2006.....	18
Figura 2: Padrão diametral de injeção de corrente elétrica no domínio. Extraído de: TRIGO, 2006.....	18
Figura 3: Região avaliada.....	21
Figura 5: Discretização do domínio avaliado. Extraído de: SILVA NETO et al., 2009..	24
Figura 6: A) Estêncil de cinco pontos; B) Estêncil de nove pontos.....	26
Figura 7: Esquema mostrando que a equação (12) é soma de duas aproximações por diferenças finitas com estêncil de cinco pontos.....	32
Figura 8: Região Avaliada. Extraído de: MENIN, 2009.....	40
Figura 9: Região Avaliada. Modificado de: MENIN, 2009.....	41
Figura 10: Rótulos atribuídos a cada um dos lados da região avaliada.....	45
Figura 11: Disposição dos eletrodos no contorno da região avaliada.....	48
Figura 12: Forma da distribuição de condutividade utilizada durante os testes. Para a região em azul, inicialmente foi utilizado o valor para condutividade de 20 u.m.c, enquanto para a região em vermelho o valor utilizado foi de 110 u.m.c.....	50
Figura 13: Matriz de números antes do processo de filtragem de baixas frequências.	54
Figura 14: Matriz de números após do processo de filtragem de baixas frequências. .	54
Figura 15: Padrão de injeção de corrente diametral. Eletrodos com a mesma cor correspondem a um determinado par de eletrodos onde é injetada corrente para determinado conjunto de medidas. A figura possui eletrodos com oito diferentes cores, cada cor representa um arranjo de injeção de corrente.....	56
Figura 16: Padrão de injeção de corrente adjacente. Cada número representa um arranjo de injeção de corrente. As chaves, por sua vez, representam quais são os pares de eletrodos onde são realizadas as injeções. Como é representado pela figura, para o padrão adjacente são obtidos doze conjuntos de medidas. ....	57
Figura 17: Primeira distribuição de condutividade utilizada para solução do problema inverso, a região em vermelho possui condutividade igual a 110 u.m.c. e a região de cor azul possui condutividade igual a 20 u.m.c.. ....	58
Figura 18: Segunda distribuição de condutividade utilizada para solução do problema inverso, a região em vermelho possui condutividade igual a 110 u.m.c. e a região de cor azul possui condutividade igual a 20 u.m.c.. ....	58

Figura 19: Solução analítica para o PVC1, apresentada em uma malha 25 x 25 pontos. .....	62
Figura 20: Solução numérica para o PVC1, calculada em uma matriz 25 x 25. A) Solução utilizando o estêncil de cinco pontos; B) solução utilizando o estêncil de nove pontos. ....	62
Figura 21: Erro relativo percentual calculado em cada ponto da matriz 25x25, utilizando as soluções numérica e analítica do PVC1. A) Erro para a solução utilizando o estêncil de cinco pontos; B) erro para solução utilizando o estêncil de nove pontos. ....	63
Figura 22: Solução analítica para o PVC2, apresentada em uma matriz 25 x 25. ....	64
Figura 23: Solução analítica para o PVC2, calculada em uma matriz 25 x 25. A) Solução utilizando o estêncil de cinco pontos; B) Solução utilizando o estêncil de nove pontos. ....	64
Figura 24: Erro relativo percentual calculado em cada ponto da matriz 25x25, utilizando as soluções numérica e analítica do PVC2. A) Erro da solução numérica utilizando a aproximação com estêncil de cinco pontos; B) Erro da solução numérica utilizando a aproximação com estêncil de nove pontos. ....	64
Figura 25: Solução analítica para o PVC2, apresentada em uma matriz 50 x 50. ....	65
Figura 26: Solução numérica para o PVC2, calculada em uma matriz 50 x 50. A) Solução utilizando o estêncil de cinco pontos; B) solução utilizando o estêncil de nove pontos. ....	65
Figura 27: Erro relativo percentual calculado em cada ponto da matriz 50x50, utilizando as soluções numérica e analítica do PVC2. A) Erro da solução numérica utilizando a aproximação com estêncil de cinco pontos; B) erro da solução numérica utilizando a aproximação com estêncil de nove pontos. ....	65
Figura 28: Solução analítica para o PVC2, apresentada em uma matriz 100 x 100. ....	66
Figura 29: Solução numérica para o PVC2, calculada em uma matriz 100 x 100. A) Solução utilizando o estêncil de cinco pontos; B) solução utilizando o estêncil de nove pontos. ....	66
Figura 30: Erro relativo percentual calculado em cada ponto da matriz 100x100, utilizando as soluções numérica e analítica do PVC2. A) Erro da solução numérica utilizando a aproximação com estêncil de cinco pontos; B) Erro da solução numérica utilizando a aproximação com estêncil de nove pontos. ....	66
Figura 31: Solução do problema direto, utilizando o padrão adjacente de injeção de correntes, utilizando o estêncil de cinco e nove pontos, para as matrizes 25x25, 50x50 e 100x100. As regiões em azul e em vermelho nos gráficos são as regiões onde estão localizados os eletrodos de injeção de corrente. ....	67

- Figura 32: Gráficos do perfil do potencial traçado na região onde estão posicionados os eletrodos de injeção, para a matriz 25x25, 50x50 e 100x100. A) Gráfico traçado utilizando a aproximação (12); B) gráfico traçado utilizando a aproximação (11). 68
- Figura 33: Solução numérica do problema direto utilizando matrizes 25x25, 50x50 e 100x100, para as aproximações (29), (30) e (34). As regiões em azul e em vermelho nos gráficos são as regiões onde estão localizados os eletrodos de injeção de corrente..... 69
- Figura 34: Gráficos do perfil do potencial traçado na região onde estão posicionados os eletrodos de injeção, para a matriz 25x25, 50x50 e 100x100. A) Gráfico traçado utilizando a aproximação (29); B) gráfico traçado utilizando a aproximação (30); gráfico traçado utilizando a aproximação (34)..... 70
- Figura 35: Comparação entre as soluções numéricas para um domínio com distribuição de condutividade homogênea igual 20 u.m.c. e outro com distribuição de condutividade heterogênea igual a da Figura 12, para todos os tamanhos de matriz..... 72
- Figura 36: Comparação entre as soluções do problema inverso para um domínio com distribuição de condutividade igual à da Figura 15. A) regularização do problema inverso mediante a aplicação do filtro gaussiano e a multiplicação da matriz  $\partial\sigma(M,N)$  pela matriz de condutividade  $\sigma_{k-1}(M,N)$ ; B) regularização do problema inverso somente através da aplicação do filtro gaussiano. .... 74
- Figura 37: Soluções obtidas para duas diferentes regularizações com critério de parada de  $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p)<sup>2</sup> e representação da distribuição de condutividade do domínio reconstruído. A) reconstrução utilizando a regularização 1; B) distribuição de condutividade do domínio; C) reconstrução utilizando a regularização 2. .... 75
- Figura 38: Comparação entre as soluções do problema inverso para um domínio com distribuição de condutividade igual à da Figura 16. A) regularização do problema inverso mediante a aplicação do filtro gaussiano e a multiplicação da matriz  $\partial\sigma(M,N)$  pela matriz de condutividade  $\sigma_{k-1}(M,N)$ ; B) regularização do problema inverso somente através da aplicação do filtro gaussiano ..... 77
- /:Figura 39: Soluções obtidas para duas diferentes regularizações com critério de parada de  $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p)<sup>2</sup> e representação da distribuição de condutividade do domínio reconstruído. A) reconstrução utilizando a regularização 1; B) distribuição de condutividade do domínio; C) reconstrução utilizando a regularização 2. .... 78
- Figura 40: Comparação entre as soluções do problema inverso para um domínio com distribuição de condutividade igual a da Figura 15. A) Utilizando  $T_1 = 100$ ; B) utilizando  $T_1 = 1000$ . .... 80
- Figura 41: Comparação entre as soluções do problema inverso para um domínio com distribuição de condutividade igual a da Figura 16. A) Utilizando  $T_1 = 100$ ; B) utilizando  $T_1 = 1000$ . .... 81



Figura 42: Soluções obtidas para o domínio da Figura 15, utilizando três diferentes valores para T com critério de parada de  $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p)<sup>2</sup> e representação da distribuição de condutividade do domínio reconstruído. A) reconstrução utilizando  $T_1 = 0$ ; B) reconstrução utilizando  $T_1 = 100$ ; C) reconstrução utilizando  $T_1 = 1000$ ; D) distribuição de condutividade do domínio. .... 82

Figura 43: Soluções obtidas para o domínio da Figura 16, utilizando três diferentes valores para T com critério de parada de  $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p)<sup>2</sup> e representação da distribuição de condutividade do domínio reconstruído. A) reconstrução utilizando  $T_1 = 0$ ; B) reconstrução utilizando  $T_1 = 100$ ; C) reconstrução utilizando  $T_1 = 1000$ ; D) distribuição de condutividade do domínio. .... 83

Figura 44: soluções do problema inverso utilizando o padrão adjacente de injeção de corrente. A) Para um domínio com distribuição de condutividade igual à da Figura 15. B) Para um domínio com distribuição de condutividade igual à da Figura 16.85

Figura 45: Soluções obtidas para dois diferentes padrões de injeção de corrente, com critério de parada de  $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p) <sup>2</sup>, e representação da distribuição de condutividade do domínio (Figura 15). A) reconstrução utilizando o padrão diametral de injeção de corrente; B) distribuição de condutividade do domínio; C) reconstrução utilizando o padrão adjacente..... 86

Figura 46: Soluções obtidas para dois diferentes padrões de injeção de corrente, com critério de parada de  $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p) <sup>2</sup>, e representação da distribuição de condutividade do domínio reconstruído (Figura 16). A) reconstrução utilizando o padrão diametral de injeção de corrente; B) distribuição de condutividade do domínio; C) reconstrução utilizando.o padrão adjacente..... 86

## RESUMO

SANTANA MARTINS, Jefferson . **Desenvolvimento de um Algoritmo para Reconstrução de Imagens Utilizando a Técnica de Tomografia por Impedância Elétrica.** Porto Alegre. 2010. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia de Materiais, PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL.

Este trabalho faz um estudo matemático para solução do problema de reconstrução de imagens da Tomografia por Impedância Elétrica. Nesta técnica são posicionados eletrodos no contorno/fronteira de um volume a ser estudado. Em dois deles, são “injetados” padrões de correntes e nos eletrodos restantes são medidos potenciais e correntes elétricas. Através desses dados é possível estimar a condutividade ou resistividade elétrica no interior da região avaliada, formando assim uma imagem da mesma, utilizando suas propriedades elétricas. Para fazer esta estimativa, é necessário resolver dois problemas, um deles chamado de problema direto e o outro de problema inverso. O problema direto consiste na solução da equação generalizada de Laplace, a qual rege o potencial no interior da região. Para isso, são utilizados métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno ou ainda, o Método das Diferenças Finitas que é o método utilizado nesse trabalho. Através da solução do problema direto e das medidas dos potenciais no contorno é resolvido o problema inverso. Nesse processo, os potenciais calculados e medidos são colocados dentro de um funcional de erro e busca-se a distribuição de condutividade que minimiza o valor desse funcional. Para isso são utilizados métodos de minimização, tal como o método de recozimento simulado utilizado neste trabalho. Esse método, por sua vez, mostrou-se capaz de resolver o problema inverso da Tomografia por Impedância Elétrica.

Palavras-chaves: Tomografia por Impedância Elétrica, Métodos Numéricos, Imageamento Não invasivo.

## ABSTRACT

SANTANA MARTINS, Jefferson. **Development of an Algorithm for Image Reconstruction Using the Technique of Electrical Impedance Tomography**. Porto Alegre. 2010. Master's thesis. Postgraduate Program in Materials Engineering and Technology, PONTIFICAL CATHOLIC UNIVERSITY OF RIO GRANDE DO SUL.

This work makes a mathematical study aiming to solve the problem of image's reconstruction in Electrical Impedance Tomography. In this image technique, electrodes are positioned on the boundary/border of a volume to be studied. In two of them, patterns of currents are "injected" and in the remaining electrodes electric potentials are measured. Through these data it is possible to estimate the electrical conductivity or resistivity within the region assessed, thus forming an image of it using its electrical properties. In order to establish this estimate, it is necessary to solve two problems: the forward and the inverse problem. The forward problem consists in solving the generalized Laplace equation, which governs the potential within the studied region. To accomplish that, numerical methods are used, such as the Finite Element Method, the Boundary Element Method or the Finite Difference Method which was the method used in this work. By solving the forward problem and the measurements of the potential contour the inverse problem is solved. In this process, the potential is calculated and measured values of potential are placed in an error functional and the distribution of conductivity that minimizes the value of this functional is searched. A Minimization procedure known as simulated annealing applied to the functional can to resolve the Electrical Impedance Tomography's inverse problem.

Key-words: Electrical impedance tomography, numerical methods, non-invasive imaging.

## 1. INTRODUÇÃO

A técnica de tomografia por impedância elétrica (TIE) é um método de imageamento não invasivo, onde são utilizadas informações elétricas de um objeto para formar imagens de uma seção transversal do seu interior. Por propriedades elétricas se entende especificamente a condutividade e a permissividade elétrica. Assim sendo, no processo de obtenção de imagens por TIE, é necessário alocar eletrodos no contorno de uma determinada região do objeto, em conjunto com uma fonte de corrente. A fonte de corrente, por sua vez, utiliza dois dos eletrodos alocados no contorno, para “injetar” corrente no interior do domínio e, através das medidas dos potenciais elétricos realizadas nos demais eletrodos, obter imagens de um plano transversal do corpo, onde cada *pixel* da imagem representa um valor estimado da impedância ou condutividade desse corpo, em determinada posição do plano transversal analisado.

Uma das vantagens apresentadas pela TIE, pelo menos do ponto de vista teórico, está relacionada a um possível ganho de contraste da imagem em relação a outras técnicas de imageamento não invasivo, como a tomografia computadorizada, a qual utiliza raios X para obtenção de imagens. Isso pode ser compreendido, ao ser comparada a condutividade elétrica ao coeficiente de atenuação de raios X<sup>1</sup>, para alguns tecidos do corpo humano. Ao ser confrontada a condutividade do osso com a condutividade dos músculos e do sangue, nota-se que a condutividade do primeiro é duas ordens de grandeza menor que a condutividade dos outros dois. Fazendo a mesma comparação em relação ao coeficiente de atenuação de raios X para os mesmos tecidos, a diferença não passa de uma ordem de grandeza (MENIN, 2009).

---

<sup>1</sup> O coeficiente de atenuação de raios X é a grandeza responsável pelo contraste em imagens produzidas por tomografia computadorizada convencional.

Outras vantagens da TIE são a sua portabilidade, a sua facilidade de manutenção e o preço do equipamento para obtenção das imagens. De forma efetiva, um tomógrafo por impedância elétrica consiste basicamente de uma fonte de excitação (corrente ou tensão), de eletrodos e de um computador. O sistema é pequeno e pode ser instalado mesmo em locais com pouco espaço. Em relação ao valor do equipamento, estimativas apontam para um baixo custo do tomógrafo por impedância elétrica em comparação a um tomógrafo computadorizado por raios X (AGUILAR, 2009). Além disso, por não utilizar radiação ionizante, o equipamento de TIE pode ser mantido conectado a pacientes ou amostras por longos períodos de tempo sem apresentar danos aos mesmos nem a terceiros. Entretanto, apesar dessas vantagens, a TIE necessita ainda melhorar a resolução espacial das imagens produzidas e diminuir o tempo computacional necessário para fazer a reconstrução das imagens devido à complexidade dos algoritmos utilizados.

As principais aplicações da TIE estão relacionadas à sua capacidade de produzir imagens do interior de objetos. Assim sendo, existem diversas áreas em que ela pode ser aplicada, tais como: Medicina, Geofísica, Ciências Ambientais, Química, Engenharia e em testes não destrutivos em materiais. Na Medicina é possível destacar: a detecção de êmbolos em pulmões, o monitoramento de apnéia, o monitoramento da função esofágica e gastrointestinal, o monitoramento do fluxo sanguíneo do coração e a detecção de câncer. Em Geofísica e em Ciências Ambientais a TIE é útil para localização de depósitos minerais, localização de minérios subterrâneos, monitoramento de fluxos de fluidos injetados na terra, na extração de petróleo e para detecção de vazamentos em tanques de armazenamento subterrâneo. Na Química, a TIE pode ser empregada para o acompanhamento de reações em recipientes fechados ou no fluxo de reagentes. Em Engenharia pode ser utilizada a técnica de TIE para acompanhar o fluxo de gases, líquidos ou bolhas no interior de encanamentos fechados. Em testes não destrutivos a TIE pode ser aplicada na detecção de corrosão e pequenas fissuras ou vazios em metais (AGUILAR, 2009).

Do ponto de vista matemático, os algoritmos utilizados para reconstrução de imagens para TIE, devem resolver um problema inverso, mal condicionado e que apresenta grande sensibilidade em relação a ruídos experimentais

e erros numéricos. Na maioria das abordagens utilizadas, a reconstrução de imagens da TIE pode ser dividida em duas etapas. A primeira delas busca resolver o chamado problema direto da TIE. Nele, tenta-se calcular os potenciais no contorno e no interior do domínio, a partir do valor da corrente injetada e de uma distribuição de condutividade qualquer. A segunda etapa pretende resolver o problema inverso da TIE, o qual corresponde à determinação da distribuição condutividade no interior da região avaliada, a partir das medidas realizadas no contorno da região e dos potenciais calculados na solução do problema direto (HERRERA, 2007).

Buscando colaborar para o desenvolvimento de um equipamento de TIE, este trabalho desenvolveu estudos numéricos aplicados na solução do problema direto e propôs e testou uma solução para o problema inverso de reconstrução de imagens utilizando essa técnica.

Este trabalho está vinculado a um projeto de pesquisa, o qual pretende produzir imagens de depósitos sedimentares em tanques de sedimentação de materiais de interesse geológico. A disposição dos eletrodos no tanque de deposição construído para os testes e simulação, possui geometria retangular. Por isso, para a solução do problema direto, tendo em vista a sua simplicidade do ponto de vista matemático e seus bons resultados para geometria retangular, foi utilizado o Método das Diferenças Finitas (MDF).

Para a solução do problema inverso, foi escolhida uma técnica de minimização que utiliza ensaios aleatórios. Neste grupo de técnicas, a busca pelo ponto de mínimo é realizada de forma sequencial, utilizando variações aleatórias da condutividade. Entre aquelas técnicas onde são empregados ensaios aleatórios, foi utilizada a técnica de recozimento simulado (*simulated annealing*), porque esta técnica consegue convergir para mínimos globais mesmo sem uma boa aproximação inicial para a distribuição de condutividade no domínio avaliado.

Este trabalho começa por uma breve descrição do problema direto e inverso da TIE. Logo após, é apresentado um modelo teórico responsável por modelar o potencial no interior do domínio avaliado, sendo de vital importância

para solução do problema direto. Em seguida, é apresentado o MDF e sua aplicação ao problema direto da TIE. Sendo que, primeiramente, ele é aplicado para aproximar a solução do problema direto em um domínio retangular com condutividade constante e, a seguir, ele é aplicado para calcular a distribuição do potencial em um domínio com condutividade variável. Para isso foram apresentadas e comparadas três diferentes equações, uma da literatura e duas propostas pelo autor. Por último é abordado o problema inverso, sendo explicada e aplicada a técnica de recozimento simulado. Ela, por sua vez, foi utilizada para inferir a distribuição de condutividade em dois domínios fictícios criados computacionalmente.

## **2. OBJETIVOS**

Realizar estudos numéricos com objetivo de contribuir para solução do problema direto da Tomografia por Impedância Elétrica e indicar possibilidades para solução do seu problema inverso.

### **2.1 Objetivos Específicos**

1. Resolver o problema direto da TIE, para um domínio com distribuição de condutividade homogênea;
2. Resolver o problema direto da TIE, para um domínio com distribuição de condutividade heterogênea;
3. Propor uma solução para o problema inverso da TIE;
4. Desenvolver um algoritmo matemático que implemente a solução do problema inverso proposto.



### **3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

A revisão bibliográfica deste trabalho foi dividida em quatro partes. Na primeira parte é apresentada uma introdução à TIE. Posteriormente, é realizada a exposição do modelo teórico necessário para a solução do problema direto. Em seguida, utilizando o Método das Diferenças Finitas, foram abordadas três aproximações para a equação generalizada de Laplace. Para finalizar, é proposta uma solução para o problema inverso da TIE utilizando o método de recozimento simulado.

#### **3.1 Introdução a TIE**

A TIE é uma técnica de imageamento não invasivo, onde são produzidas imagens através do mapeamento da condutividade ou permissividade elétrica do interior de uma região de interesse, mediante a “injeção” de corrente elétrica e medidas de potenciais no contorno da região. Para fazer a “injeção” de corrente no domínio e a medida dos potenciais no seu contorno, é necessário dispor eletrodos na fronteira da seção reta onde se deseja produzir a imagem.

A corrente aplicada no contorno obedece a certo padrão de excitação, este padrão pode ser adjacente ou diametral. No padrão adjacente a corrente é aplicada utilizando dois eletrodos vizinhos. Já no padrão diametral a corrente é aplicada em dois eletrodos em posições diametralmente opostas (LIMA, 2006). As Figuras 1 e 2 são representações desses dois procedimentos de obtenção de dados experimentais para TIE.

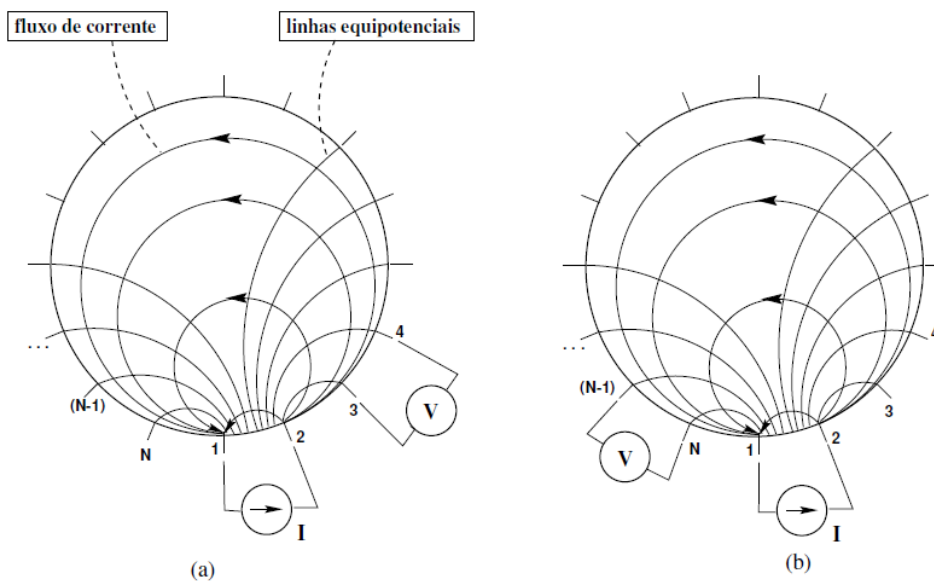


Figura 1: Padrão adjacente de injeção de corrente elétrica no domínio. Extraído de: TRIGO, 2006.

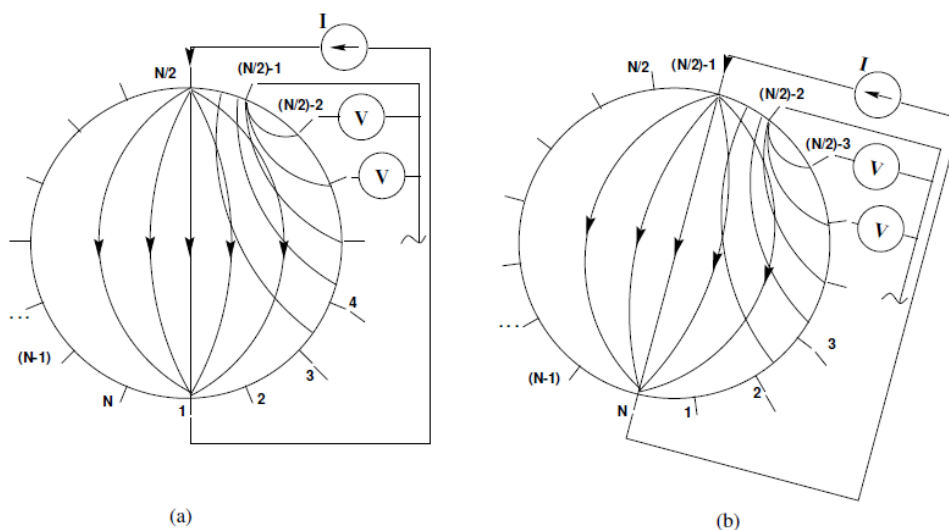


Figura 2: Padrão diametral de injeção de corrente elétrica no domínio. Extraído de: TRIGO, 2006.

Nos dois casos os potenciais elétricos são medidos nos eletrodos restantes, efetuando a medida sempre em pares de eletrodos adjacentes, com exceção dos pares formados pelos eletrodos de injeção da corrente. Para um total de  $N$  eletrodos posicionados no contorno da região de interesse são obtidas  $\frac{N(N-3)}{2}$  e  $\frac{N(N-4)}{2}$  medidas independentes de potenciais, para as configurações adjacente e diametral, respectivamente. Existem outras configurações com múltiplas fontes de correntes, que injetam corrente e medem poten-

ciais em todos os eletrodos simultaneamente. No entanto, nesse trabalho serão tratados apenas esses dois casos (BEVILACQUA, 2003).

Do ponto de vista experimental, um circuito eletrônico se encarrega de distribuir as correntes pelos eletrodos e medir as diferenças de potencial. Os dados das medidas são passados a um computador que, utilizando um algoritmo adequado, pode fazer a estimativa da distribuição de condutividade (ou resistividade) no plano avaliado. A cada ponto da região medida é associado um *pixel*, o qual corresponde ao valor da condutividade estimada (LIMA, 2006).

Os algoritmos que fazem a reconstrução das imagens de TIE resolvem basicamente dois problemas matemáticos: o problema direto e o problema inverso. De modo geral, os problemas diretos envolvem a determinação de um efeito<sup>2</sup> a partir de uma causa<sup>3</sup> conhecida (CEZARO, 2006). No caso específico da TIE, o problema direto envolve a determinação dos potenciais no interior da região avaliada e da resposta no contorno, supondo conhecida a distribuição da condutividade ou da permissividade no interior (MENIN, 2009). No entanto, na TIE não se conhece a distribuição da impedância elétrica do material no interior da região. As únicas informações disponíveis são as de excitação (injeção de corrente elétrica no domínio) e as de resposta (medidas de potenciais elétricos no contorno), por isso para fazer a reconstrução de imagens utilizando a TIE, também é necessário resolver um segundo problema, o chamado problema inverso. Problemas inversos são problemas onde são determinadas causas a partir de efeitos (CEZARO, 2006). No caso da TIE o seu problema inverso procura, a partir dos dados de excitação e resposta, determinar a distribuição da impedância ou condutividade elétrica no interior de uma região de interesse (MENIN, 2009).

A solução do problema direto da TIE é de extrema importância para a solução do problema fundamental de reconstrução de imagens utilizando esta

---

<sup>2</sup> *Efeitos*, num modelo matemático, são as propriedades calculadas a partir de um modelo direto, como o campo de temperatura, concentração de partículas, corrente elétrica - etc. (Problemas diretos e inversos).

<sup>3</sup> *Causas*, num modelo matemático, são as condições iniciais e de contorno, termos de fonte/sumidouros e propriedades do sistema (material). (Problemas diretos e inversos).

técnica, o chamado problema inverso. Por isso, é necessário tecer alguns comentários sobre a relação existente entre esses dois problemas.

A abordagem funcional mais utilizada para fazer a resolução do problema inverso, basicamente faz a comparação de dados obtidos a partir de dois modelos diferentes, um numérico, resolvido computacionalmente, e outro experimental, obtido a partir de medidas reais (MENIN, 2009). O modelo numérico faz justamente a solução do problema direto, o qual deve produzir uma solução ao mesmo tempo precisa e que não necessite de grande poder computacional, tendo em vista a necessidade de produzir uma imagem de qualidade em curto espaço de tempo. No caso específico deste trabalho, o tempo de processamento tem prioridade menor em comparação com a resolução da imagem.

A comparação entre os dados numéricos e experimentais é realizada na maioria das vezes mediante a criação de um funcional do erro, capaz de avaliar a diferença entre as informações obtidas pelos dois modelos. Este deve ser minimizado através de um processo de otimização, tais como os Algoritmos Genéticos, o Método de Otimização Topológica e/ou o *Simulated Annealing* (MENIN, 2009).

A seguir será apresentado o modelo numérico que foi utilizado neste trabalho, capaz de modelar a distribuição de potencial no domínio, considerando distribuições de condutividades não homogêneas.

### 3.2 Modelagem do Problema Direto

Esta parte do trabalho inicia a abordagem teórica necessária para fazer a aproximação da solução do problema direto da TIE. Sendo assim, inicialmente foi definida a região a ser avaliada, a qual será utilizada para construir a solução numérica. Ela, por sua vez, será aqui representada pelo símbolo  $\Omega$  e é uma região bidimensional com contorno  $\partial\Omega$ . Por sua vez, é possível dividir  $\partial\Omega$  em duas partes,  $\partial\Omega_1$  e  $\partial\Omega_2$ , de modo que  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 + \partial\Omega_2$ . Essa divisão do contorno é necessária para separar os dados de excitação e resposta. A Figura 3 ilustra o domínio analisado.

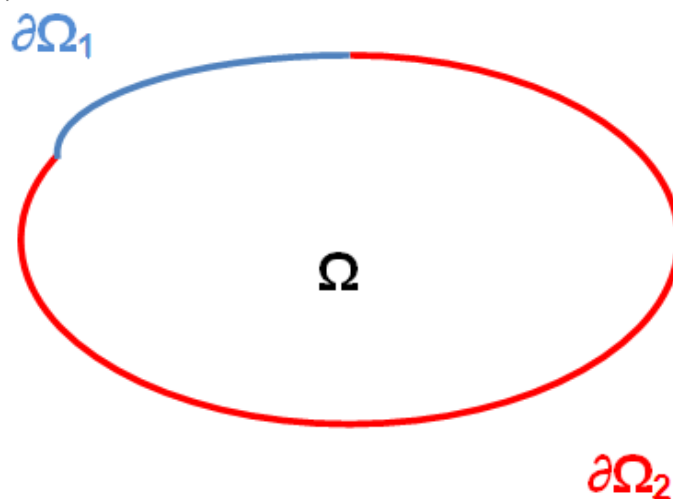


Figura 3: Região avaliada.

O problema direto da TIE envolve a determinação da distribuição dos potenciais no interior de  $\Omega$  e a resposta em  $\partial\Omega$ , supondo conhecida a distribuição da condutividade. A modelagem matemática desse problema é realizada, considerando uma superfície com distribuição de condutividade dependente apenas das coordenadas de posição e supondo que esta região apresenta características puramente condutivas. Com isto, é obtida uma equação diferencial parcial capaz de modelar o potencial em  $\Omega$ , sua dedução pode ser vista no anexo A e ela é apresentada a seguir:

$$\bar{\nabla} \cdot (\sigma \bar{\nabla} u) = 0 \text{ no interior de } \Omega \quad (1)$$

Onde  $u$  é o potencial e  $\sigma$  é a condutividade elétrica em um ponto qualquer no interior da região.

Como já mencionado, a TIE é uma técnica que constrói imagens de uma determinada região através da estimativa das propriedades elétricas dessa região em cada ponto do domínio analisado. A grandeza responsável por fazer esta estimativa é a impedância elétrica.

Propriedades elétricas, tais como a impedância elétrica e a permissividade elétrica, determinam o comportamento de materiais quando submetidos a campos elétricos externos. A impedância elétrica é o inverso da admitância, a qual é representada por um número complexo, onde a parte real é dada pela

condutividade elétrica e a parte imaginária é dada pela frequência angular da corrente elétrica multiplicada pela permissividade do meio, como mostrado na equação a seguir:

$$\gamma(x, \omega) = \sigma(x) + i\omega\xi(x) \quad (2)$$

Onde  $\sigma$  é a condutividade,  $\omega$  é a frequência angular da corrente injetada e  $\xi$  é a permissividade elétrica do meio.

Sendo assim, teoricamente seria possível construir um modelo teórico considerando a condutividade apresentada por  $\Omega$ , a qual seria utilizada para produzir imagens. Estas imagens seriam formadas a partir da estimativa do valor da condutividade em cada ponto analisado do domínio. De outro modo, também poderia ser construído um modelo levando em consideração apenas a permissividade do meio. Logo, imagens produzidas por esse modelo seriam uma estimativa da permissividade apresentada em cada ponto analisado do domínio. Esses dois modelos podem ser utilizados separados ou conjuntamente para produzir imagens de um determinado domínio. No entanto, como pode ser observado através da equação (1), neste trabalho o modelo teórico considera  $\Omega$  uma região puramente condutiva, desse modo só a condutividade está sendo levada em consideração.

Existe uma infinidade de funções que satisfazem a equação (1). Por isso, para determinar uma solução para essa equação diferencial parcial (EDP), é necessário adicionar condições de contorno (CC), as quais, para o problema da TIE, correspondem aos valores de correntes/potenciais aplicados e medidos no contorno. Matematicamente, elas correspondem às seguintes expressões:

$$u = \bar{u} \text{ em } \partial\Omega_1 \text{ (Condição de contorno de Dirichlet)} \quad (3)$$

$$J_n = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n} \text{ em } \partial\Omega_2 \text{ (Condição de contorno de Neumann)} \quad (4)$$

Onde  $\bar{u}$  é o potencial no contorno da região,  $n$  é um versor normal à superfície do objeto e  $J_n$  é o fluxo de corrente na direção do versor  $n$ .

Na expressão (3) é dado o valor da variável de interesse (potencial) no contorno, essa condição de contorno é chamada de CC de Dirichlet. Na expressão (4) em vez da variável de interesse, é dada a sua derivada na direção normal ao contorno, essa CC é chamada de CC de Neumann.

O problema direto pode, assim, ser definido matematicamente como a solução da equação (1) para a condição de contorno formada pelas expressões (3) e (4).

A resolução do problema direto, na maioria dos casos, não pode ser realizada de forma analítica, por isso são utilizados métodos numéricos de discretização para a sua solução (MENIN, 2009). Entre eles, alguns dos mais utilizados são: o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (MENIN, 2009). A seguir será apresentada uma descrição simplificada do MDF, bem como um exemplo utilizando este método para aproximar a solução de uma equação diferencial parcial com valores de contorno.

### **3.3 O Método das Diferenças Finitas**

Os métodos numéricos são introduzidos para resolução de problemas complexos que não possuem solução analítica. Tratando especificamente do MDF, este é utilizado há muitas décadas em engenharia para resolução de diferentes tipos de problemas. Ele é um dos métodos numéricos mais utilizados, entre outros motivos, pela eficiência dos seus algoritmos, uma vez que é possível obter formulações explícitas que não necessitam de resolução de sistemas algébricos ou inversão de matrizes, sendo, por isso, o método mais utilizado quando se trata de problemas que envolvam malhas com grande número de nós (BARTOLO, 2010). Além disso, o MDF possui maior facilidade de implementação computacional e maior simplicidade matemática em comparação com outros métodos numéricos como MEF, sem, no entanto, perder em precisão em relação às respostas fornecidas (BARTOLO, 2010).

Basicamente, a essência dos métodos numéricos está na discretização do contínuo. É essa discretização que torna “finito” um problema, viabilizando a sua solução através da utilização de computadores (CUNHA, 2003). Por isso,

como anteriormente mencionado, para produzir uma solução numérica, inicialmente é necessário discretizar a região onde a solução é procurada. Nesse passo será definida uma malha, que é um número finito de pontos frequentemente chamados de nós da malha (CUNHA, 2003). No MDF o domínio é discretizado na forma de retângulos ou quadrados, como mostra a Figura 5.

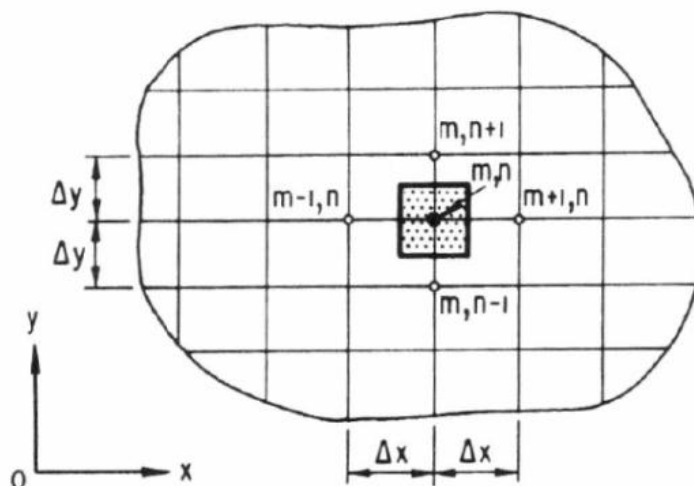


Figura 4: Discretização do domínio avaliado. Extraído de: SILVA NETO et al., 2009.

Utilizando uma malha retangular, como a da figura acima, dividida em intervalos definidos por  $\Delta x = \frac{x_N}{N}$  e  $\Delta y = \frac{y_M}{M}$ , onde  $N$  e  $M$  são números inteiros positivos que representam o número de divisões do domínio na coordenada  $x$  e  $y$ , respectivamente (CARNAHAN et. al. 1969). Portanto, o ponto nodal  $(i, j)$  possui as coordenadas  $(x_i, y_j)$ , dadas por  $x_i = x_0 + \Delta x i$  e  $y_j = y_0 + \Delta y j$ . O número máximo de linhas em  $x$  é denotado por  $i_{\max} = N$  e o número total de linhas em  $y$  é denotado por  $j_{\max} = M$ .

No MDF, o segundo passo consiste em discretizar as derivadas presentes na equação diferencial.

Considerando a condutividade constante em  $\Omega$  a equação (1) se reduz a:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Equação de Laplace}) \quad (5)$$

Fazendo a expansão por séries de Taylor da função  $u(x, y)$  à direita e à esquerda do ponto  $x_0$  são obtidas as seguintes equações:

$$u(x_0 + h, y) = u(x_0, y) + u'(x_0, y)h + \frac{1}{2!}u''(x_0, y)h^2 + \frac{1}{3!}u'''(x_0, y)h^3 + \dots \quad (6)$$

e

$$u(x_0 - h, y) = u(x_0, y) - u'(x_0, y)h + \frac{1}{2!}u''(x_0, y)h^2 - \frac{1}{3!}u'''(x_0, y)h^3 + \dots \quad (7)$$

Somando (6) e (7) e explicitando a derivada de segunda ordem de  $u$  em relação à  $x$  é obtido:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (8)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para a coordenada em  $y$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + O[(\Delta y)^2] \quad (9)$$

Substituindo (8) e (9) em (1) é obtida a seguinte equação:

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + O[(\Delta y)^2] + O[(\Delta x)^2] = 0 \quad (10)$$

Considerando  $\Delta x = \Delta y = h$  e isolando  $u_{i,j}$  na equação (10):

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4} + O(h^2) \quad (11)$$

Para ilustrar a utilização do MDF, ao fazer a aproximação da solução de equações diferenciais com dados de contorno, o método foi aplicado à solução de um problema de condução de calor, essa solução é mostrada no Anexo B.

Como uma alternativa para a aproximação (11), o potencial no interior de  $\Omega$  pode também ser aproximado através da equação (12), mostrada a seguir, reproduzida do trabalho de Adams, Levegue & Young (1988).

$$u_{i,j} = \frac{4(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1})}{20} + O(h^6) \quad (12)$$

A equação (12) possui maior acurácia em comparação à equação (11). A principal diferença entre as duas está relacionada ao tamanho do estêncil utilizado para aproximação do potencial no ponto  $(i, j)$ . O tamanho do estêncil depende basicamente da quantidade de pontos empregados para aproximação. Na equação (11), a aproximação do potencial é realizada através do cálculo da média dos potenciais nos quatro pontos mais próximos ao ponto  $(i, j)$ . O estêncil utilizado na equação (11), por relacionar o potencial de cinco pontos no interior do domínio  $\Omega$ , é chamado de estêncil de cinco pontos. A equação (12), por sua vez, emprega os oito pontos mais próximos para fazer a aproximação do potencial em  $(i, j)$ , ou seja, relaciona o potencial de nove diferentes pontos do domínio discretizado. Por isso, o estêncil empregado pela equação (12) é chamado de estêncil de nove pontos. A Figura 6, apresentada a seguir, mostra o estêncil utilizado pela equação (11) e pela equação (12).

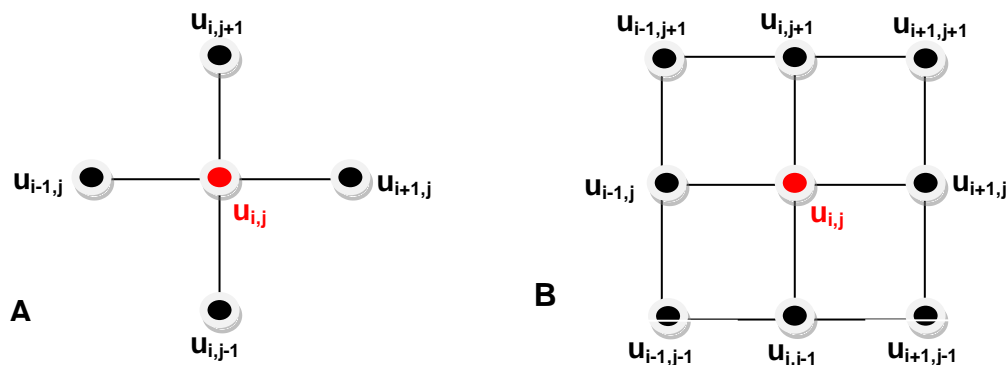


Figura 5: A) Estêncil de cinco pontos; B) Estêncil de nove pontos.

Caso seja necessário aproximar a solução de um PVC com CC de Neumann ou de Cauchy, também é necessário discretizar a derivada na direção normal à superfície.

Uma derivada direcional é definida como o produto escalar do gradiente de  $u$  por um versor, neste caso um versor normal à superfície de  $\Omega$ , como mostra a definição matemática dada a seguir:

$$Du_n = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}u = \vec{n} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} \right) \quad (13)$$

onde  $\vec{n}$  é um versor normal à superfície.

A aproximação por diferenças finitas das derivadas de primeira ordem presentes em (13), depende do grau de precisão escolhido. Existem diversas maneiras de fazê-lo, no entanto, neste trabalho, foram utilizadas apenas duas diferentes aproximações para o contorno. Uma dessas aproximações pode ser obtida utilizando uma expansão por séries de Taylor da função  $u(x,y)$  a esquerda do ponto  $x_0$ :

$$u(x_0 + h, y) = u(x_0, y) + u'(x_0, y) \cdot h + \frac{1}{2!} \cdot u''(x_0, y) \cdot h^2 + \frac{1}{3!} \cdot u'''(x_0, y) \cdot h^3 + \dots \quad (14)$$

Utilizando a equação (6) até o terceiro termo à direita da igualdade e isolando  $u'(x_0, y)$  é obtida a seguinte aproximação para derivada parcial em relação à  $x$  no ponto  $x_0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{(u_{i,j} - u_{i-1,j})}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} u''(x_0, y) \quad (15)$$

Fazendo na equação (15)  $u''(x_0, y) = \frac{(u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j})}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]$  é obtida a

seguinte aproximação para  $\frac{\partial u}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j})}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (16)$$

Logo, por simetria:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(3u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j})}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (17)$$

Substituindo (16) em (13), omitindo o termo do erro associado a aproximação e utilizando a mesma aproximação para a coordenada  $y$ , a equação (13) torna-se:

$$Du_n \approx \bar{n} \cdot \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2\Delta x} \bar{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{2\Delta y} \bar{j} \right) \quad (18)$$

fazendo o mesmo para (17)

$$Du_n \approx \bar{n} \cdot \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{2\Delta x} \bar{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{2\Delta y} \bar{j} \right) \quad (19)$$

A outra aproximação por diferenças finitas, utilizada neste trabalho para fazer a aproximação das derivadas direcionais no contorno, foi extraída do livro *Mathematics and Algorithms* (<http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/NDSolvePDE.html>), ela é apresentada a seguir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i-1,j} + 450u_{i-2,j} - 400u_{i-3,j} + 225u_{i-4,j} - 72u_{i-5,j} + 10u_{i-6,j})}{60\Delta x} + O[(\Delta x)^6] \quad (20)$$

Logo, por simetria.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i+1,j} + 450u_{i+2,j} - 400u_{i+3,j} + 225u_{i+4,j} - 72u_{i+5,j} + 10u_{i+6,j})}{60\Delta x} + O[(\Delta x)^6] \quad (21)$$

Substituindo (20) em (13), omitindo o termo do erro associado a aproximação e utilizando a mesma aproximação para a coordenada  $y$ , a equação (13) torna-se:

$$Du_n \approx \bar{n} \cdot \left( \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i-1,j} + 450u_{i-2,j} - 400u_{i-3,j} + 225u_{i-4,j} - 72u_{i-5,j} + 10u_{i-6,j})}{60\Delta x} \bar{i} + \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j-1} + 450u_{i,j-2} - 400u_{i,j-3} + 225u_{i,j-4} - 72u_{i,j-5} + 10u_{i,j-6})}{60\Delta y} \bar{j} \right) \quad (22)$$

Substituindo (21) em (13) e utilizando a mesma aproximação para a coordenada  $y$ , é obtida a seguinte expressão:

$$Du_n \approx \vec{n} \cdot \left( \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i+1,j} + 450u_{i+2,j} - 400u_{i+3,j} + 225u_{i+4,j} - 72u_{i+5,j} + 10u_{i+6,j})}{60\Delta x} \vec{i} + \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j+1} + 450u_{i,j+2} - 400u_{i,j+3} + 225u_{i,j+4} - 72u_{i,j+5} + 10u_{i,j+6})}{60\Delta y} \vec{j} \right) \quad (23)$$

O vetor unitário  $\vec{n}$  em coordenadas cartesianas é definido como  $\vec{n} = [\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}]$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{n}$  e o eixo da coordenada  $x$  no plano.

Para a solução do problema direto da TIE é necessário considerar ainda a variação da condutividade no domínio. Portanto, para aproximar a solução do problema direto pelo MDF, é necessário fazer a discretização da equação (1). Isso pode ser realizado como exposto a seguir:

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} u) = \vec{\nabla} \sigma \cdot \vec{\nabla} u + \sigma (\nabla^2 u) = 0 \quad (24)$$

Explicitando os operadores nabla e laplaciano, temos:

$$\vec{\nabla} \sigma \cdot \vec{\nabla} u + \sigma (\nabla^2 u) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} \right) + \left[ \sigma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] = 0 \quad (25)$$

Dividindo os dois lados da equação por  $\sigma$  e calculando o produto escalar, ficamos com

$$\frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (26)$$

Isolando o termo à direita da equação, chegamos a

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (27)$$

Discretizando os dois lados da equação por diferenças finitas, utilizando as seguintes aproximações para as derivadas de primeira ordem<sup>4</sup>

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})}{2\Delta x} + O(h^2), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})}{2\Delta y} + O(h^2)$$

e fazendo  $\Delta x = \Delta y$ , é obtida a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + O(h^2) \\ &= -\frac{1}{4\sigma_{i,j}} \left[ (\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j})(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + (\sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j-1})(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Isolando  $u_{i,j}$  e omitindo o termo do erro associado a aproximação, vemos que:

$$\begin{aligned} u_{i,j} &\approx \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4} \\ &+ \frac{1}{16\sigma_{i,j}} \left[ (\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j})(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + (\sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j-1})(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

A equação (29), quando aplicada a um domínio com distribuição de condutividade homogênea, se reduz a equação (11).

Neste trabalho foram testadas ainda outras duas diferentes aproximações para o potencial elétrico, para regiões com condutividade heterogênea. Uma dessas aproximações foi extraída do trabalho de Kim & Lee (2005). Assim como a equação (29), esta equação se reduz a equação (11) em um domínio com condutividade homogênea, como pode ser observado abaixo:

$$u_{i,j} = \left[ \frac{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j}) + (\sigma_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-1,j}) + (\sigma_{i,j+\frac{1}{2}} u_{i,j+1}) + (\sigma_{i,j-\frac{1}{2}} u_{i,j-1})}{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j} + \sigma_{i-\frac{1}{2},j} + \sigma_{i,j+\frac{1}{2}} + \sigma_{i,j-\frac{1}{2}})} \right] \quad (30)$$

Onde  $\sigma_{i+\frac{1}{2},j}$ ,  $\sigma_{i-\frac{1}{2},j}$ ,  $\sigma_{i,j+\frac{1}{2}}$  e  $\sigma_{i,j-\frac{1}{2}}$ , são os valores da condutividade em pontos localizados centralmente entre os pontos  $(i,j)$  e  $(i+1,j)$ ,  $(i,j)$  e  $(i-1,j)$ ,  $(i,j)$  e  $(i,j+1)$  e  $(i,j)$  e  $(i,j-1)$ , respectivamente. A condutividade nesses pontos pode ser obtida através do cálculo da média harmônica da condutividade entre

---

<sup>4</sup> As mesmas aproximações foram utilizadas para aproximar  $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$ , é realizada apenas a troca da variável  $u$  pela variável  $\sigma$ .

as regiões adjacentes avaliadas. Portanto, a condutividade no ponto médio entre os pontos  $(i+a, j+b)$  e o ponto  $(i, j)$ , sendo  $a$  e  $b$  números inteiros quaisquer, é dada por:

$$\sigma_{i+\frac{a}{2}, j+\frac{b}{2}} = \frac{(\sigma_{i+a, j+b} \sigma_{i, j})}{\left( \frac{\sigma_{i+a, j+b} + \sigma_{i, j}}{2} \right)} \quad (31)$$

Além das equações (30) e (29), utilizando a equação (12) e a própria aproximação (30), foi proposta uma terceira equação para aproximar o potencial numa região com condutividade heterogênea.

Como já mencionado, a equação (12) aproxima o potencial em um ponto  $(i, j)$ , utilizando os oito pontos adjacentes mais próximos a ele (estêncil de nove pontos). No entanto, fazendo algumas manipulações em (12), é possível mostrar que ela, na realidade, é uma combinação de duas aproximações por diferenças finitas com estêncil de cinco pontos. Para demonstrar essa afirmação é necessário rearranjar a equação (12), como mostrado a seguir:

$$4u_{i, j} + u_{i, j} = 4 \left( \frac{u_{i-1, j} + u_{i+1, j} + u_{i, j+1} + u_{i, j-1}}{4} \right) + \left( \frac{u_{i+1, j+1} + u_{i+1, j-1} + u_{i-1, j+1} + u_{i-1, j-1}}{4} \right) \quad (32)$$

O primeiro termo a direita da igualdade é idêntico à equação (11) multiplicada pelo número 4, enquanto o segundo termo, à direita do sinal de igualdade, é uma segunda aproximação por diferenças finitas com estêncil de cinco pontos. A seguir, é apresentada uma representação esquemática mostrando como pode ser obtida a equação (12), a partir da soma de duas aproximações por diferenças finitas com estêncil de cinco pontos.

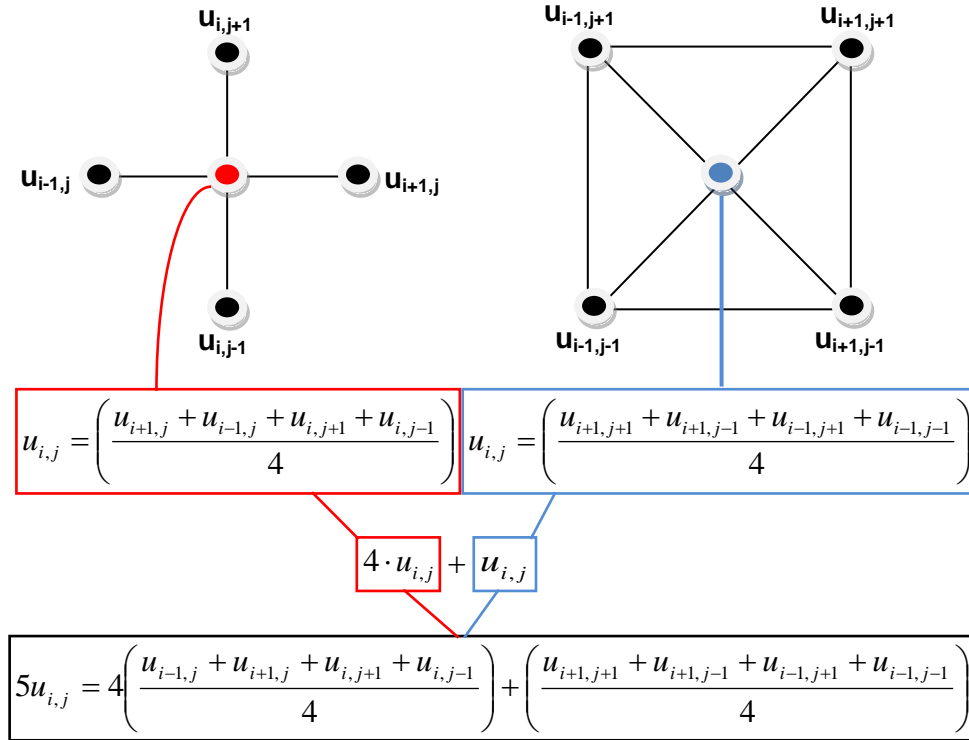


Figura 6: Esquema mostrando que a equação (12) é soma de duas aproximações por diferenças finitas com estêncil de cinco pontos.

Partindo das observações expostas no esquema acima, é possível propor uma nova aproximação por diferenças finitas, para o potencial em uma região com condutividade heterogênea. Para tal, a equação no interior do grande retângulo vermelho da Figura 7 (equação (11)), deve ser substituída pela equação (30). Além disso, a segunda equação, localizada no interior do grande retângulo azul da Figura 7, deve ser substituída por uma aproximação análoga a essa para uma região com condutividade heterogênea. Essa equação foi obtida através de uma comparação com a equação (30). Ela é apresentada a seguir:

$$u_{i,j} = \left[ \frac{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{i+1,j+1}) + (\sigma_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u_{i+1,j-1}) + (\sigma_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{i-1,j+1}) + (\sigma_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u_{i-1,j-1})}{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \sigma_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \sigma_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \sigma_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})} \right] \quad (33)$$

Fazendo as substituições na equação (32) e isolando  $u_{i,j}$ , é obtida a seguinte expressão:



$$u_{i,j} = \frac{4}{5} \left[ \frac{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j}) + (\sigma_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-1,j}) + (\sigma_{i,j+\frac{1}{2}} u_{i,j+1}) + (\sigma_{i,j-\frac{1}{2}} u_{i,j-1})}{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j} + \sigma_{i-\frac{1}{2},j} + \sigma_{i,j+\frac{1}{2}} + \sigma_{i,j-\frac{1}{2}})} \right] + \frac{1}{5} \left[ \frac{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{i+1,j+1}) + (\sigma_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u_{i+1,j-1}) + (\sigma_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{i-1,j+1}) + (\sigma_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u_{i-1,j-1})}{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \sigma_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \sigma_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \sigma_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})} \right] \quad (34)$$

É interessante observar que a equação (34), quando aplicada a uma distribuição de condutividade homogênea, se reduz a equação (12).

Antes de terminar este capítulo é importante tecer alguns comentários a respeito do erro associado às aproximações por diferenças finitas até o momento expostas. Para cada aproximação, tanto para derivada de primeira quanto para derivada de segunda ordem, produzidas utilizando diferenças finitas, existe certo erro associado. Este erro está relacionado à quantidade de termos da série de Taylor utilizados para fazer a aproximação. Por exemplo, para chegar até equação (8) foram empregados os três primeiros termos da série de Taylor. Desse modo, o terceiro termo da série, dado por  $\frac{1}{2!} u''(x_0, y) h^2$ , é o termo que define a ordem de grandeza do erro associado à aproximação produzida; nesse caso o erro é da ordem de  $h^2$ . O conhecimento do erro, por sua vez, é deveras importante, principalmente para aqueles PVCs que possuem condições de contorno do tipo Neumann. Esse conhecimento é necessário porque não é adequado utilizar aproximações mais precisas, como a aproximação (20), conjuntamente com outras de menor precisão, como a aproximação (11). Por isso, nesta dissertação, para a aproximação da solução do problema direto e de um PVC com condições de contorno de Neumann, foram utilizadas apenas determinadas combinações de equações. As escolhas das aproximações do contorno e para o interior da região avaliada, serão explicadas na Metodologia do presente trabalho.

A seguir será apresentada uma introdução ao problema inverso da TIE em conjunto com uma proposta para sua solução.

### 3.4 Problema Inverso

O problema inverso da TIE busca obter uma aproximação para a condutividade no interior de  $\Omega$ , a partir das medidas dos potenciais elétricos no con-

torno da região de interesse. Este problema é difícil de ser resolvido porque é não linear e, principalmente, é mal condicionado. Ser mal condicionado significa que grandes mudanças de condutividade no interior de  $\Omega$ , produzem pequenas variações nos valores das diferenças de potencial medidas no contorno. Esse fato faz da TIE uma técnica de imageamento extremamente sensível a erros de medidas e ruídos experimentais (MENIN, 2009).

A solução do problema inverso, geralmente, é iniciada através da solução do problema direto, a partir de uma distribuição de condutividade inicial arbitrária. Os potenciais calculados no contorno pelo problema direto são comparados aos potenciais medidos, através do cálculo da diferença quadrada entre ambos, nas regiões do contorno onde foram dispostos os eletrodos. Sucessivamente, o problema direto é resolvido até ser encontrada a distribuição de condutividade que minimiza a diferença entre as medidas e os valores obtidos durante a simulação.

Para procurar a distribuição de condutividade que minimiza a diferença entre os potenciais são utilizados métodos de otimização. Na literatura existem três conjuntos principais de métodos de otimização: métodos determinísticos, métodos estocásticos e métodos enumerativos (SOARES, 1997).

Os métodos de otimização determinísticos geralmente calculam e utilizam derivadas e/ou uma aproximação do gradiente para procurar o ponto de mínimo. Esses métodos apresentam grande velocidade de convergência em comparação com outros métodos de otimização. No entanto, muitas vezes, eles convergem para pontos de mínimos locais e não globais, necessitando de uma aproximação inicial acurada para atingirem o ponto de mínimo global do sistema (SOARES, 1997). O método dos mínimos quadrados é um dos métodos determinísticos empregados para solução do problema inverso da TIE, como pode ser visto no trabalho de Cheney (1990).

Os métodos enumerativos procuram analisar todas as combinações de domínios possíveis e, a partir disso, encontrar aquela configuração do domínio que otimiza o valor da função de interesse. O grande problema desses métodos é o tempo computacional necessário para analisar todas as configurações possíveis de domínio, principalmente quando ele for de grande dimensão e/ou

discretizado utilizando uma grande quantidade de pontos (SOARES,1997). Na literatura não foram encontrados trabalhos utilizando métodos enumerativos para solução do problema inverso da TIE.

Os métodos estocásticos são aqueles que empregam ensaios aleatórios para encontrar a distribuição de condutividade desejada. Estes métodos possuem a desvantagem de convergirem para um mínimo de forma mais lenta em comparação aos métodos determinísticos. No entanto, técnicas pertencentes a esse grupo não necessitam de boas aproximações iniciais para atingirem mínimos globais. Na literatura é comum encontrar trabalhos que utilizam métodos baseados em ensaios aleatórios para solução do problema inverso da TIE. Dois métodos estocásticos comumente utilizados são os algoritmos genéticos e o recozimento simulado (*simulated annealing*), o primeiro foi abordado no artigo de Olmi et al. (2000) e o segundo na dissertação de mestrado de Herrera, (2007). Os dois métodos foram testados conjuntamente no trabalho de Cheng e Chen, (1998).

O método de recozimento simulado é um método heurístico, baseado numa analogia com o processo de recozimento físico. Basicamente, esse método consiste em obter os estados de mais baixa energia de um sólido, através do aquecimento do sólido até o seu estado líquido. Esse processo é então seguido por um processo de arrefecimento até o regresso do sólido a temperatura ambiente. Quanto maior a temperatura e menor a taxa de arrefecimento, ao final do processo, mais próximo da estrutura cristalina de menor energia estará o sólido (KIRKPATRICK, GELATT E VECCHI,1983).

O recozimento simulado foi o método de otimização escolhido para solucionar o problema inverso neste trabalho, isso se deve a sua facilidade de aplicação e, principalmente, a sua convergência para mínimos globais e não locais.

A seguir é descrito com mais detalhes o método do recozimento simulado e a sua aplicação ao problema inverso da TIE.

### 3.5 Recozimento Simulado e o problema inverso da TIE

Métodos baseados em ensaios aleatórios como forma de aproximar o ponto ótimo de uma função, chamaram a atenção da comunidade científica a partir de década de 60 (TAVARES E CORREIA, 1999). Quando não é conhecida a expressão analítica que se deseja otimizar, parece ser uma via intuitiva ensaiar pontos do domínio com o intuito de identificar pontos candidatos a pontos de otimização (TAVARES E CORREIA, 1999).

No problema inverso da TIE é necessário minimizar uma funcional  $E(\sigma)$ , onde  $\sigma$  é a condutividade do domínio, a qual é representada por uma matriz de tamanho  $N \times M$ .

A solução desse problema, utilizando a versão mais simples de um algoritmo que utiliza ensaios aleatórios, é realizada mediante a utilização do algoritmo descrito a seguir:

- 1) Para uma determinada interação,  $k$ , é necessário gerar uma matriz de números aleatórios  $d(M, N)$ , com valores entre 0 e 1;
- 2) Todos os valores da matriz  $d(M, N)$  são multiplicados por um número real,  $L$ , chamado de passo, gerando uma nova matriz  $\partial\sigma(M, N)$ ;
- 3) É realizada a soma da matriz de condutividade atual  $\sigma_{k-1}(M, N)$ , obtida na interação  $k-1$ , pela matriz  $\partial\sigma(M, N)$ , gerando uma nova matriz condutividade  $\sigma_k(M, N)$ ;
- 4) É resolvido o problema direto utilizando a nova matriz de condutividade  $\sigma_k(M, N)$ ;
- 5) Calcula-se o valor de  $E(\sigma_k)$ ;

**6)** Se  $E(\sigma_k) < E(\sigma_{k-1})$ , é aceita a nova distribuição de condutividade  $\sigma_k(M, N)$ , senão é mantida a matriz condutividade  $\sigma_{k-1}(M, N)$  e o processo é repetido até esse satisfazer um critério de parada.

O algoritmo descrito acima (baseado em um algoritmo descrito no livro de Tavares e Correia, (1999)) é bastante semelhante ao algoritmo costumeiramente utilizado para implementar o recozimento simulado. A única diferença entre ambos é a adição de um termo exponencial, definidor de uma probabilidade  $P$ , necessária para simulação do processo de recozimento físico. Assim, quando uma nova configuração de condutividade  $\sigma_k$  é gerada, como no algoritmo anteriormente exposto, no recozimento simulado ela também será aceita se for melhor que a configuração antecedente. No entanto, esta nova configuração, mesmo sendo pior, poderá também ser aceita no recozimento simulado. Isso dependerá do valor de um número aleatório, localizado no intervalo entre 0 e 1, gerado a cada interação  $k$  e do valor da probabilidade  $P$ , definida pela equação mostrada a seguir:

$$P = e^{-\left[\frac{E(\sigma_k) - E(\sigma_{k+1})}{C_k}\right]} \quad (35)$$

Onde  $C_k$  é um valor qualquer que diminui com o aumento de  $k$  (TAVARES E CORREIA, 1999).

Fazendo algumas modificações no algoritmo apresentado na página anterior, adicionando a simulação do processo de recozimento físico, é obtido o seguinte algoritmo:

- 1) Para uma determinada interação,  $k$ , é necessário gerar uma matriz de números aleatórios  $d(M, N)$ , com valores entre 0 e 1;
- 2) Todos os valores da matriz  $d(M, N)$  são multiplicados por um número real,  $L$ , chamado de passo, gerando uma nova matriz  $\partial\sigma(M, N)$ ;

- 3) É realizada a soma da matriz de condutividade atual  $\sigma_{k-1}(M, N)$ , obtida na interação  $k-1$ , pela matriz  $\partial\sigma(M, N)$ , gerando uma nova matriz condutividade  $\sigma_k(M, N)$ ;
- 4) É resolvido o problema direto utilizando a nova matriz de condutividade  $\sigma_k(M, N)$ ;
- 5) Calcula-se o valor de  $E(\sigma_k)$ ;
- 6) É calculado o valor de  $C_k$ , definido pela equação  $C_k = C_0 \cdot F(k)$ , onde  $F(k)$  é uma função qualquer dependente de  $k$ ;
- 7) Calcula-se o valor de  $P$  através da equação (31);
- 8) É gerado um número aleatório  $R$  entre 0 e 1;
- 9) Se  $E(\sigma_k) < E(\sigma_{k-1})$  ou  $R < P$ , é aceita a nova distribuição de condutividade  $\sigma_k(M, N)$ , caso contrário, é mantida a matriz condutividade  $\sigma_{k-1}(M, N)$  e o processo é repetido até esse satisfazer um critério de parada.

As partes sublinhadas do algoritmo apresentado acima são aquelas necessárias para simular o recozimento simulado. Mais detalhes sobre esse o *simulated annealing* podem ser encontrados em KIRKPATRICK, GELATT E VECCHI (1983).

A aplicação desse algoritmo para solução do problema inverso da TIE será mais bem discutida na segunda parte da metodologia deste trabalho.

## 4. METODOLOGIA

A metodologia desta dissertação foi dividida em duas partes. Na primeira é abordada a solução do problema direto utilizando o MDF em geometria cartesiana. Nessa parte, também será explicada a avaliação das aproximações, tanto do ponto de vista da precisão como também de aspectos relacionados à convergência. Na segunda parte da metodologia, o problema inverso é abordado, sendo apresentados os testes e o método de otimização utilizado para fazer a solução desse problema.

### 4.1 Problema Direto

Tendo em vista o objetivo inicial deste trabalho de resolver o problema direto da TIE, foram implementados dois algoritmos no ambiente virtual Matlab®, capazes de solucionar PVCs que envolvam a Equação de Laplace e a Equação (1). Esses algoritmos foram desenvolvidos pelo autor, com base em métodos numéricos disponíveis na literatura (CUNHA, 2003), onde alguns algoritmos para solução de PVCs utilizando o MDF são apresentados. Alguns destes algoritmos utilizam o método iterativo de Gauss-Seidel, enquanto outros empregam o algoritmo iterativo de sobre-relaxação sucessiva (SOR). No Anexo D, os dois algoritmos são apresentados com maiores detalhes.

O MDF foi inicialmente aplicado para solução de dois PVCs em geometria cartesiana, extraídos do trabalho de Menin, (2009). Esses problemas, regulados pela equação de Laplace, são mostrados a seguir:

#### PVC1

$$\text{CC: } \begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ u(0,y) &= 0 \\ u(x,1) &= x \\ u(1,y) &= y \end{aligned}$$

cuja solução analítica é  $u(x, y) = xy$ .

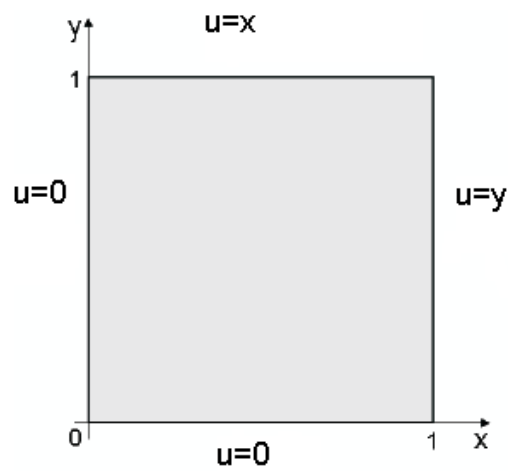


Figura 7: Região Avaliada. Extraído de: MENIN, 2009

## PVC2

$$u(0, y) = 0$$

$$u(1, y) = \cos(\pi y)$$

$$\text{CC: } \frac{\partial u}{\partial n}(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, 1) = 0$$

cuja solução analítica é  $u(x, y) = \frac{\sinh(\pi x) \cos(\pi y)}{\sinh(\pi)}$



Região:

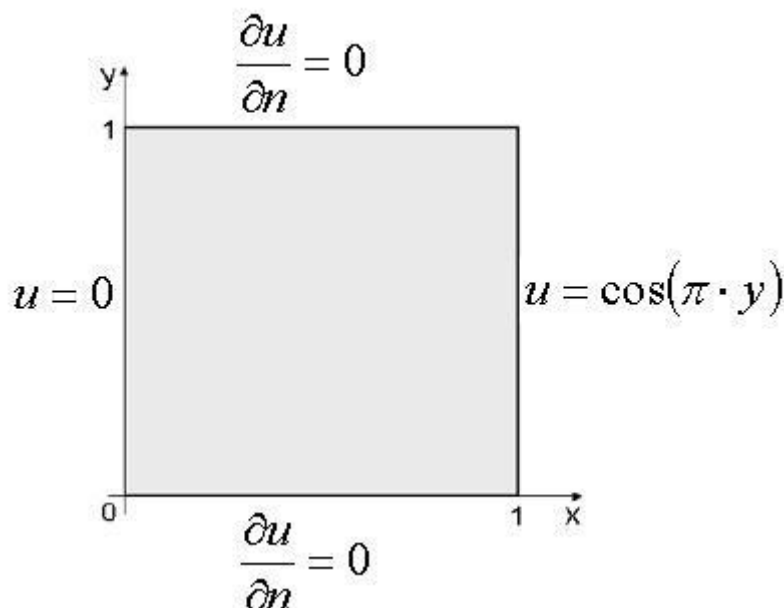


Figura 8: Região Avaliada. Modificado de: MENIN, 2009

No PVC1 a condição de contorno é do tipo Dirichlet, no PVC2 a condição de contorno é formada tanto por CC de Neumann quanto por CC de Dirichlet.

A solução das equações foi realizada utilizando três diferentes malhas regulares com matrizes de 25x25, 50x50 e 100x100.

Para a solução do sistema linear foi utilizado o algoritmo iterativo SOR, o qual para esse problema apresenta maior velocidade de convergência se comparado ao algoritmo de Gauss-Seidel.

Foi realizada a aproximação do valor da variável de interesse em cada nó, por meio das equações (11) e (12).

Em relação ao PVC2, foram utilizadas as equações (18) e (19) para aproximar os valores das derivadas do contorno, como mostrado a seguir:

Para a equação (18) com  $y = 1$  e ângulo de  $90^\circ$ .

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(90^\circ) \vec{i} + \sin(90^\circ) \vec{j}] \cdot \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2\Delta x} \vec{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{2\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{2\Delta y} = 0$$

Isolando  $u_{i,j}$ , temos:

$$u_{i,j} \approx \frac{4u_{i,j-1} - u_{i,j-2}}{3} \quad (36)$$

Para a equação (19) com  $y = 0$  e ângulo de  $270^\circ$ , vemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(270^\circ)\vec{i} + \sin(270^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{2\Delta x} \vec{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{2\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{2\Delta y} = 0$$

Isolando  $u_{i,j}$ , chegamos a:

$$u_{i,j} \approx \frac{4u_{i,j+1} - u_{i,j+2}}{3} \quad (37)$$

Utilizando as equações (22) e (23) são obtidas as seguintes aproximações para as derivadas no contorno do PVC2:

Para a equação (22) com  $y = 1$  e ângulo de  $90^\circ$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(90^\circ)\vec{i} + \sin(90^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i-1,j} + 450u_{i-2,j} - 400u_{i-3,j} + 225u_{i-4,j} - 72u_{i-5,j} + 10u_{i-6,j})}{60\Delta x} \vec{i} + \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j-1} + 450u_{i,j-2} - 400u_{i,j-3} + 225u_{i,j-4} - 72u_{i,j-5} + 10u_{i,j-6})}{60\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j-1} + 450u_{i,j-2} - 400u_{i,j-3} + 225u_{i,j-4} - 72u_{i,j-5} + 10u_{i,j-6})}{60\Delta y} = 0$$

Isolando  $u_{i,j}$ , vemos que:

$$u_{i,j} \approx \frac{(360u_{i,j-1} - 450u_{i,j-2} + 400u_{i,j-3} - 225u_{i,j-4} + 72u_{i,j-5} - 10u_{i,j-6})}{147} \quad (38)$$

Para a equação (23) com  $y = 0$  e ângulo de  $270^\circ$ , obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(270^\circ)\vec{i} + \sin(270^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i+1,j} + 450u_{i+2,j} - 400u_{i+3,j} + 225u_{i+4,j} - 72u_{i+5,j} + 10u_{i+6,j})}{60\Delta x} \vec{i} + \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j+1} + 450u_{i,j+2} - 400u_{i,j+3} + 225u_{i,j+4} - 72u_{i,j+5} + 10u_{i,j+6})}{60\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j+1} + 450u_{i,j+2} - 400u_{i,j+3} + 225u_{i,j+4} - 72u_{i,j+5} + 10u_{i,j+6})}{60\Delta y} = 0$$

Isolando  $u_{i,j}$ , chegamos a

$$u_{i,j} \approx \frac{(360u_{i,j+1} - 450u_{i,j+2} + 400u_{i,j+3} - 225u_{i,j+4} + 72u_{i,j+5} - 10u_{i,j+6})}{147} \quad (39)$$

As equações (36) e (37) foram utilizadas associadas à equação (11), enquanto as equações (38) e (39) foram utilizadas conjuntamente à equação (12) para a aproximação da solução do PVC2.

O erro associado a cada aproximação foi o fator principal considerado para a escolha do conjunto de equações utilizadas durante a solução numérica. No caso das equações (36) e (37), elas possuem erro da ordem de  $h^2$ , de acordo com o livro *Mathematics and Algorithms* (<http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/NDSolvePDE.html>), da mesma ordem de grandeza da equação (11). Enquanto, de acordo com essa referência, o erro associado às equações (38) e (39) é aproximadamente igual a  $h^6$ , exatamente a mesma ordem de grandeza associado à equação (12) (KUO & LEVY, 1987). Se as equações (36) e (37) fossem utilizadas coligadas à equação (12), por possuírem menor precisão, elas diminuiriam a exatidão da solução aproximada. Por outro lado, utilizar as equações (38) e (39), mais complexas que as equações (36) e (37), conjuntamente à equação (11), não melhora a acurácia da aproximação produzida, pois a precisão estaria limitada pelo erro associado a (11).

A escolha de dois conjuntos de equações para os testes, um utilizando estêncil de nove pontos e outro de cinco pontos, teve por objetivo testar a acu-

rácia e o custo computacional de cada uma das aproximações. Certamente, se as aproximações utilizando nove pontos apresentarem razoável ganho de precisão sem ou com pequeno aumento do custo computacional, sua aplicação para a solução do problema direto, em relação a aproximações com estêncil de cinco pontos, se justifica. Isso porque, seria possível produzir soluções com precisão igual ou maior em malhas de pequena dimensão, diminuindo o tempo para produzir a solução. Sendo assim, durante a solução do problema inverso, isso pode aumentar a velocidade para fazer a reconstrução da imagem e/ou produzir imagens com maior resolução.

Após a introdução das CC e a obtenção do valor da variável de interesse em cada nó, foi calculado o erro relativo para as soluções aproximadas em relação à solução analítica. O erro relativo foi calculado em cada um dos nós da malha, sendo obtida assim uma distribuição para esse índice no domínio.

Os valores calculados foram dispostos em gráficos bidimensionais, onde as cores dos gráficos representam os valores de determinada variável de interesse em todos os nós da malha. Por sua vez, os gráficos construídos representam todos os dados obtidos na solução numérica, na solução analítica e no cálculo do erro relativo.

O erro poderia ser representado pelo erro médio em cada ponto da malha, sendo expresso assim de forma mais simples apenas por um número. No entanto, a representação gráfica possui a vantagem de facilitar a visualização das regiões onde as discrepâncias entre a solução numérica e a solução analítica são mais acentuadas, possibilitando a elaboração de estratégias capazes de minimizar o erro nessas regiões.

Posteriormente, neste trabalho foi resolvido o problema direto da TIE para uma geometria retangular, considerando um domínio com condutividade constante.

Em relação à discretização do contorno, nos pontos onde não havia presença de eletrodos de injeção de corrente, a derivada normal à superfície do potencial foi considerada como possuindo valor zero. Assim, quatro discretizações para o contorno, dependendo do lado do retângulo considerado, foram

obtidas. Para facilitar a compreensão das quantizações realizadas, cada lado foi chamado de L1, L2, L3 e L4, como mostrado na Figura 10 apresentada a seguir.

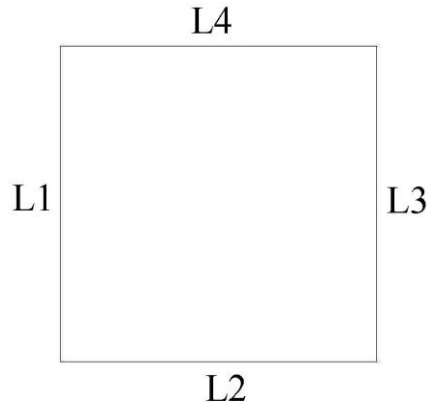


Figura 9: Rótulos atribuídos a cada um dos lados da região avaliada.

Nos eletrodos de injeção de corrente, o valor da densidade superficial de corrente  $J$ , definida como a razão entre o valor nominal da corrente e a área superficial do eletrodo, foi estimado como mostra a equação a seguir:

$$J = \frac{i}{A} \quad (40)$$

Ela também pode ser definida como:

$$J = -\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial n} \quad (41)$$

A expressão (41) é equivalente à expressão (4), onde  $\sigma_0$  representa a condutividade no contorno da região  $\Omega$ .

As discretizações por diferenças finitas foram obtidas igualando o termo à direita da expressão (41) ao termo à direita da expressão (40) e valendo-se das equações (18), (19), (22) e (23), para L1, L2, L3 e L4.

As equações produzidas a partir das aproximações da derivada no contorno (18) e (19), foram utilizadas conjuntamente com a equação (11), em um domínio com condutividade homogênea, e com as equações (29) e (30) para

uma região com condutividade heterogênea. Já as equações produzidas por meio das aproximações (22) e (23), foram utilizadas com a equação (12), para um domínio com condutividade homogênea, e com a equação (34) para uma região com condutividade heterogênea

Todas as aproximações obtidas para o contorno estão reunidas na Tabela 1 e Tabela 2. A dedução de todas as aproximações pode ser vista no Anexo C.

Tabela 1: Discretização do contorno utilizadas para a solução do problema direto utilizando aproximações com estêncil de cinco pontos

Lado	Região de injeção de corrente	Região sem injeção de corrente
L1	$u_{i,j} = \frac{4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{3} - \frac{2\Delta xi}{3\sigma_0 A}$	$u_{i,j} = \frac{4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{3}$
L2	$u_{i,j} = \frac{4u_{i,j+1} - u_{i,j+2}}{3} - \frac{2\Delta yi}{3\sigma_0 A}$	$u_{i,j} = \frac{4u_{i,j+1} - u_{i,j+2}}{3}$
L3	$u_{i,j} = \frac{4u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{3} - \frac{2\Delta xi}{3\sigma_0 A}$	$u_{i,j} = \frac{4u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{3}$
L4	$u_{i,j} = \frac{4u_{i,j-1} - u_{i,j-2}}{3} - \frac{2\Delta yi}{3\sigma_0 A}$	$u_{i,j} = \frac{4u_{i,j-1} - u_{i,j-2}}{3}$

Tabela 2: Discretização do contorno utilizadas para a solução do problema direto utilizando aproximações com estêncil de nove pontos.

Lado	Região de injeção de corrente	Região sem injeção de corrente
L1	$u_{i,j} = \frac{\begin{pmatrix} 360u_{i+1,j} - 450u_{i+2,j} + 400u_{i+3,j} \\ -225u_{i+4,j} + 72u_{i+5,j} - 10u_{i+6,j} \end{pmatrix}}{147} - \frac{60\Delta xi}{147\sigma_0 A}$	$u_{i,j} = \frac{\begin{pmatrix} 360u_{i+1,j} - 450u_{i+2,j} + 400u_{i+3,j} \\ -225u_{i+4,j} + 72u_{i+5,j} - 10u_{i+6,j} \end{pmatrix}}{147}$
L2	$u_{i,j} = \frac{\begin{pmatrix} 360u_{i,j+1} - 450u_{i,j+2} + 400u_{i,j+3} \\ -225u_{i,j+4} + 72u_{i,j+5} - 10u_{i,j+6} \end{pmatrix}}{147} - \frac{60\Delta xi}{147\sigma_0 A}$	$u_{i,j} = \frac{\begin{pmatrix} 360u_{i,j+1} - 450u_{i,j+2} + 400u_{i,j+3} \\ -225u_{i,j+4} + 72u_{i,j+5} - 10u_{i,j+6} \end{pmatrix}}{147}$
L3	$u_{i,j} = \frac{\begin{pmatrix} 360u_{i-1,j} - 450u_{i-2,j} + 400u_{i-3,j} \\ -225u_{i-4,j} + 72u_{i-5,j} - 10u_{i-6,j} \end{pmatrix}}{147} - \frac{60\Delta xi}{147\sigma_0 A}$	$u_{i,j} = \frac{\begin{pmatrix} 360u_{i-1,j} - 450u_{i-2,j} + 400u_{i-3,j} \\ -225u_{i-4,j} + 72u_{i-5,j} - 10u_{i-6,j} \end{pmatrix}}{147}$
L4	$u_{i,j} = \frac{\begin{pmatrix} 360u_{i,j-1} - 450u_{i,j-2} + 400u_{i,j-3} \\ -225u_{i,j-4} + 72u_{i,j-5} - 10u_{i,j-6} \end{pmatrix}}{147} - \frac{60\Delta xi}{147\sigma_0 A}$	$u_{i,j} = \frac{\begin{pmatrix} 360u_{i,j-1} - 450u_{i,j-2} + 400u_{i,j-3} \\ -225u_{i,j-4} + 72u_{i,j-5} - 10u_{i,j-6} \end{pmatrix}}{147}$

O domínio analisado conta com 16 eletrodos dispostos em um quadrado com dimensões 1x1 unidades de medida de área (u.m.a.), sendo que quatro eletrodos foram arranjados em cada face do domínio. Todos os eletrodos possuem formato quadrado com dimensões 0,12 x 0,12 u.m.a..

O valor de  $\Delta x$  é numericamente igual ao valor de  $\Delta y$ , valor o qual irá depender do tamanho da matriz. Para os testes em um domínio com distribuição de condutividade homogênea, foi utilizado apenas um valor para condutividade, 20 unidades de medida de condutividade (u.m.c). Quanto à discretização, três distintos tamanhos de matrizes durante os testes foram empregados: 25x25, 50x50 e 100x100 elementos de matriz. Desse modo,  $\Delta x$  possui três distintos tamanhos: 0,04 unidades de medida de comprimento (u.m.cp.), 0,02 u.m.cp. e 0,01 u.m.cp., respectivamente. A Figura 11, a seguir, mostra o domínio analisado.

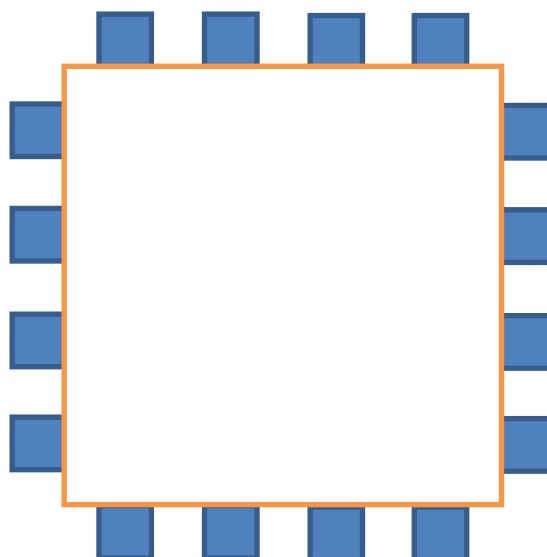


Figura 10: Disposição dos eletrodos no contorno da região avaliada.

Quanto à solução do sistema linear, o algoritmo iterativo de SOR foi utilizado, pois este apresenta taxa de convergência mais alta em comparação ao algoritmo de Gauss-Seidel, para a aproximação da solução do problema direto em um domínio com condutividade homogênea.

Antes de continuar descrevendo a metodologia empregada, é necessário explicar alguns critérios considerados durante o processo de avaliação das aproximações utilizadas.

A avaliação das aproximações procurou averiguar parâmetros como convergência (se para determinadas condições de contorno e, no caso de domínio com condutividade heterogênea, se para determinado domínio a aproximação convergia) e precisão<sup>5</sup> (variação dos valores de potencial calculados pela solução numérica, para diferentes tamanhos de matrizes e aproximações propostas).

---

<sup>5</sup> Precisão é o grau de variação dos resultados de uma medição. Nesse trabalho, por sua vez, considera-se precisão o grau de variação de uma solução em relação a outra solução, produzida a partir de outras aproximações ou tamanho de matriz. Além disso, a precisão será considerada como sinônimo de acurácia.



Foi realizado apenas um teste para analisar a convergência das aproximações. Esse teste, obviamente, foi realizado somente para as aproximações utilizadas em domínio com distribuição de condutividade heterogênea. Resumidamente, foram utilizados domínios com diferentes variações de condutividade e foi verificado se determinada solução convergia ou não. Na continuidade da metodologia será explicado mais detalhadamente o teste realizado.

Em relação à precisão, a avaliação das aproximações pode ser agrupada em dois grupos, mesmo que cada avaliação possua características específicas. Em um dos grupos estão reunidos aqueles testes onde as soluções produzidas foram comparadas entre si, utilizando como referência a solução produzida a partir da aproximação extraída da literatura ou, caso se conheça, a aproximação mais precisa. A segunda categoria agrega aqueles testes onde é realizada a comparação das soluções produzidas a partir de determinada aproximação, para diferentes tamanhos de matriz.

Após fazer a aproximação do potencial, foram realizadas comparações entre diferentes tamanhos de matriz. Isso foi realizado mediante a construção de gráficos do potencial em função de  $x$  ou  $y$ , para um  $y$  ou  $x$  específico. Basicamente, as regiões escolhidas para traçar os gráficos foram as regiões do contorno, mais especificamente aquelas regiões onde estavam dispostos os eletrodos de injeção. O principal objetivo desse teste é observar a diferença entre os potenciais calculados por uma mesma aproximação, para diferentes tamanhos de matriz.

Após os testes em um domínio com condutividade homogênea, a solução do problema direto foi aproximada em domínios com condutividade heterogênea. Os testes realizados valeram-se das equações (29), (30) e (34) para aproximar o potencial no interior de  $\Omega$ . As equações (29) e (30) foram utilizadas conjuntamente com as aproximações da Tabela 1, enquanto que para a equação (34), as aproximações empregadas foram aquelas apresentadas na Tabela 2.

A distribuição de condutividade utilizada para os testes de precisão possui dois distintos valores. Numericamente, eles são 20 u.m.c. e 110 u.m.c., para região em azul e vermelho, respectivamente, da Figura 12, apresentada a seguir.

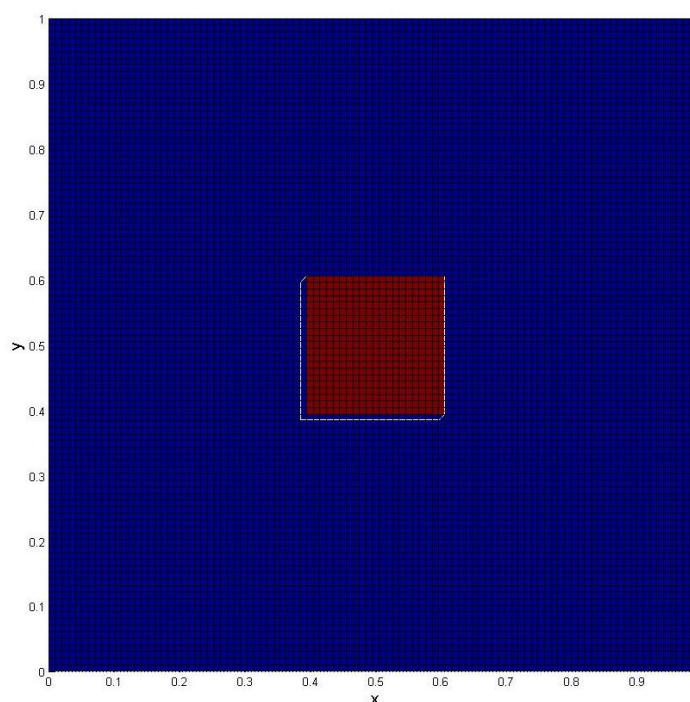


Figura 11: Forma da distribuição de condutividade utilizada durante os testes. Para a região em azul, inicialmente foi utilizado o valor para condutividade de 20 u.m.c, enquanto para a região em vermelho o valor utilizado foi de 110 u.m.c

Uma corrente de 3 u.m.cr. e malhas de 25x25, 50x50 e 100x100 foram empregadas para obter as soluções. Para solução do sistema de equações lineares, foi empregado o algoritmo iterativo de Gauss-Seidel, pois o algoritmo iterativo SOR não convergiu.

A primeira das avaliações procurou testar a confiabilidade das aproximações do potencial, produzidas por cada uma das soluções, em domínios com distribuição de condutividade igual à exibida na Figura 12. Tendo em vista esse objetivo, os resultados obtidos empregando as diferentes aproximações, foram comparados à solução do problema direto para um domínio com distribuição de condutividade homogênea igual a 20 u.m.c.. Isso foi realizado mediante o cálculo do módulo da diferença entre os potenciais elétricos calculados,

para duas distribuições de condutividade, em cada um dos pontos da malha, considerando todas as aproximações e tamanhos de matriz empregados. Esperava-se que a diferença mais acentuada entre os valores de potencial, fosse encontrada na região onde as distribuições de condutividade são distintas, ou seja, na região de formato quadrado, representada pela cor vermelha e localizada no centro da Figura 12.

Na avaliação seguinte, foram realizadas comparações entre diferentes tamanhos de matriz<sup>6</sup>. Para realizar essa comparação, gráficos de perfil do potencial foram produzidos naquelas regiões do contorno, onde estavam localizados os eletrodos de injeção de corrente. Os dados obtidos foram dispostos em gráficos do potencial em função de  $x$  ou  $y$  para um par,  $x$  e  $y$ , específico. Esse teste, para um domínio com distribuição de condutividade heterogênea, tem objetivo diferente daquele realizado em domínios com distribuição de condutividade homogênea. Em domínios com distribuição de condutividade homogênea, o objetivo do teste foi observar a diferença entre as distintas soluções, sendo que era conhecida a aproximação de maior acurácia. Isso permitiu observar qual das aproximações variava menos com o aumento ou a diminuição da matriz empregada durante a solução. No caso de domínios heterogêneos, o objetivo do teste é observar o comportamento das soluções em relação à aproximação que utiliza a equação (30). Essa avaliação, além de observar a variação das soluções em comparação a uma aproximação, permite ainda fazer a averiguação da forma do potencial no contorno ao ser variada a condutividade, para todas as aproximações avaliadas.

O último teste procurou analisar a convergência de cada uma das aproximações em relação a diferentes distribuições de condutividade. O principal objetivo desse teste foi verificar se determinada aproximação numérica converge, quando aplicada a domínios com variações abruptas de condutividade. Para realizar essa avaliação, uma distribuição de condutividade com duas distintas regiões, com o mesmo formato da distribuição apresentada na Figura 12, foi utilizada. O valor da condutividade na região em azul (Figura 12) foi fixado

---

<sup>6</sup> Esse teste também já foi abordado na página 49 do presente trabalho, quando o mesmo foi aplicado para avaliar as aproximações (11) e (12).

em 1 u.m.c e, para a região em vermelho, foram testados os valores de 10 u.m.c, 100 u.m.c, 1000 u.m.c e 10000 u.m.c. Para cada valor da condutividade testada para região em vermelho, foi verificado se a solução empregada convergia.

Nas próximas páginas é exposta a segunda parte da metodologia, a qual tem por objetivo apresentar a abordagem utilizada para solucionar o problema inverso da TIE.

## 4.2 Problema Inverso

Para fazer a solução do problema inverso da TIE utilizando o método do recozimento simulado, é necessário adaptá-lo a esse problema. Antes de tudo, no entanto, por ser um problema mal condicionado, é necessário adicionar informação ao problema, a qual tem por objetivo torná-lo bem condicionado, processo esse chamado de regularização. No caso da TIE, geralmente é utilizado o método de regularização generalizada de Tikhonov (KIM ET AL. 2005), mais detalhes sobre esse método podem ser obtidos no livro de HAYKIN, (1999) e em TIKHONOV e ARSENIN, (1977). Neste trabalho, a regularização do problema inverso foi realizada de maneira diferente daquela comumente apresentada na literatura. No entanto, antes de explicar a regularização utilizada, é necessário tecer alguns comentários sobre problemas inversos e métodos de regularização.

Os problemas inversos são formulados como problemas de otimização com restrições, matematicamente,  $\min \|A(u) - f\|^2$ , onde  $A(u)$  é a solução do problema direto e  $f$  são dados medidos empiricamente. A regularização pode ser realizada adicionando à função a ser minimizada um operador, matematicamente,  $\min \|A(u) - f\|_2^2 + \alpha \|\Omega(u)\|_2^2$ , onde  $\Omega(u)$  é o operador de regularização e  $\alpha$  é um número real qualquer, chamado de parâmetro de regularização (TIKHONOV & ARSENIN, 1977).

O operador de regularização é o termo responsável por garantir a suavidade (regularidade) da solução, fazendo com que o problema se torne bem

condicionado. Ele atua de modo a representar a irregularidade da solução, ou seja, em uma dada iteração, mesmo se a diferença entre a solução do problema direto e os dados empíricos diminuïrem, a função a ser minimizada pode ter um acréscimo no seu valor, porque ocorre aumento na irregularidade da solução nessa iteração. Assim sendo, considerando processos estocásticos de minimização, somente variações suaves para matriz de condutividade são aceitas, garantindo a suavidade da solução procurada.

Por outro lado, quando é realizada a solução do problema inverso da TIE sem empregar regularização, utilizando o recozimento simulado, ao final do processo, quando o algoritmo satisfaz o critério de parada, não é obtida uma imagem de um domínio qualquer que se quer reconstruir, mas sim uma imagem sem qualquer padrão reconhecível. Isso acontece devido (como já referido) ao mau condicionamento do problema inverso e à técnica de ensaios aleatórios empregada. Como o problema aceita diversas soluções e, sucessivamente, a matriz de condutividade  $\sigma_k(M, N)$  é somada a uma matriz de números aleatórios  $d(M, N)$  muito pouco regular, ao final do processo de reconstrução, é obtida uma imagem bastante irregular sem qualquer similaridade com o domínio avaliado. No entanto, isso pode ser contornado caso a matriz  $d(M, N)$  passe por um processo de filtragem de baixas frequências antes de ser adicionada a  $\sigma_k(M, N)$ . Esse processo deixa a matriz  $d(M, N)$  mais suave e, por consequência, deixa também  $\sigma_k(M, N)$  mais regular, fazendo com que não seja necessário utilizar o operador de regularização.

Devido aos motivos expostos anteriormente, no algoritmo testado neste trabalho, após o processo de geração da matriz de números<sup>7</sup> aleatórios  $d(M, N)$ , a matriz gerada passa por um processo de filtragem de baixas frequências, através da utilização de um filtro gaussiano com janela 3x3, dado pela matriz  $G(i, j)$ , exibida a seguir:

---

<sup>7</sup> Olhar as páginas 35 e 36 desse trabalho.

$$G(i, j) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

As Figuras 13 e 14 representam uma matriz de números aleatórios, gerados em um intervalo entre -1 e 1, antes e depois da filtragem gaussiana, demonstrando a suavização da matriz  $d(M, N)$ <sup>8</sup> após esse processo.

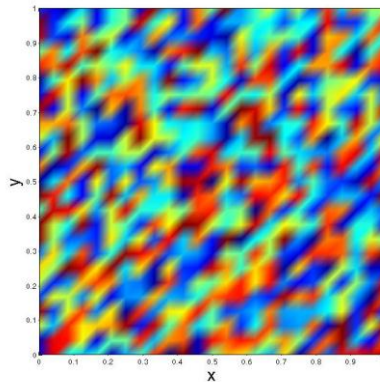


Figura 12: Matriz de números antes do processo de filtragem de baixas frequências.

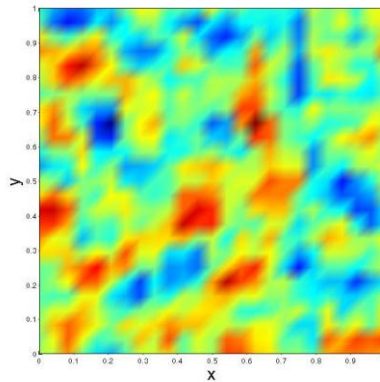


Figura 13: Matriz de números após do processo de filtragem de baixas frequências.

A regularização pode ainda ser melhorada multiplicando a matriz  $d(M, N)$ , pela matriz de condutividade  $\sigma_{k-1}(M, N)$  na interação  $k$ . Intuitivamente, parece ser lógico pensar que em determinada interação  $k$ , a matriz de condu-

---

<sup>8</sup> Para gerar a matriz de números aleatórios foi utilizado o comando “rand(a,b)” e o comando “sign(a,b)” do Matlab®. O primeiro gera uma matriz de tamanho axb, de números aleatórios entre zero e um. O segundo gera uma matriz aleatória com os números 1 e -1. A multiplicação das matrizes resulta em uma matriz de números aleatórios entre -1 e 1.

tividade  $\sigma_{k-1}(M, N)$  contenha informação do domínio final procurado. Isso justifica a multiplicação dos elementos de  $\sigma_{k-1}(M, N)$  por  $d(M, N)$  e, como será mostrado nos resultados, na prática esse procedimento melhora a velocidade e a acurácia das reconstruções produzidas.

Modificando o algoritmo apresentado na página 36 para adicionar o processo proposto para regularização do problema inverso, este passa ter a seguinte estrutura (as partes sublinhadas são aquelas adicionadas ao algoritmo da página 36):

- 1) Para uma determinada interação,  $k$ , é necessário gerar uma matriz de números aleatórios  $d(M, N)$ , com valores entre 0 e 1;
- 2) Todos os valores da matriz  $d(M, N)$  passam por um processo de filtragem de baixas frequências, utilizando um filtro gaussiano com janela 3x3, gerando uma nova matriz  $d(M, N)$ ;
- 3) Todos os valores da nova matriz  $d(M, N)$  são multiplicados por um número real,  $L$ , chamado de passo, gerando uma nova matriz  $\partial\sigma(M, N)$ ;
- 4) Os valores da matriz  $\partial\sigma(M, N)$  são multiplicados pelos valores  $M$  e  $N$  correspondentes da matriz de condutividade  $\sigma_{k-1}(M, N)$ , gerando uma nova matriz  $\partial\sigma(M, N)$ ;
- 5) É realizada a soma da matriz de condutividade atual  $\sigma_{k-1}(M, N)$ , obtida na interação  $k-1$ , pela nova matriz  $\partial\sigma(M, N)$ , gerando uma nova matriz condutividade  $\sigma_k(M, N)$ ;
- 6) É resolvido o problema direto utilizando a nova matriz de condutividade  $\sigma_k(M, N)$ ;
- 7) Calcula-se o valor de  $E(\sigma_k)$ ;

- 8) É calculado o valor de  $C_k$ , definido pela equação  $C_k = C_0 F(k)$ , onde  $F(k)$  é uma função qualquer dependente de  $k$ ;
- 9) Calcula-se o valor de  $P$  através da equação (31);
- 10) É gerado um número aleatório  $R$  entre 0 e 1;
- 11) Se  $E(\sigma_k) < E(\sigma_{k-1})$  ou  $R < P$ , é aceita a nova distribuição de condutividade  $\sigma_k(M, N)$ , senão é mantida a matriz condutividade  $\sigma_{k-1}(M, N)$  e o processo é repetido até esse satisfazer um critério de parada.

Quanto às medidas, estas foram consideradas como sendo as diferenças de potencial (ddp) entre os eletrodos. Em relação aos padrões de injeção, tanto o padrão adjacente como o padrão diametral de injeção de corrente foram utilizados.

No padrão diametral são obtidos oito conjuntos de medidas, um para cada par de eletrodos de injeção de corrente, os quais são representados esquematicamente na Figura 15, esta é apresentada a seguir:

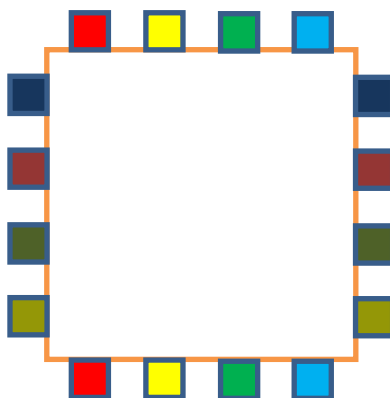


Figura 14: Padrão de injeção de corrente diametral. Eletrodos com a mesma cor correspondem a um determinado par de eletrodos onde é injetada corrente para determinado conjunto de medidas. A figura possui eletrodos com oito diferentes cores, cada cor representa um arranjo de injeção de corrente.

Para o padrão adjacente são obtidos doze conjuntos de medidas, representados pela Figura 16 mostrada abaixo:



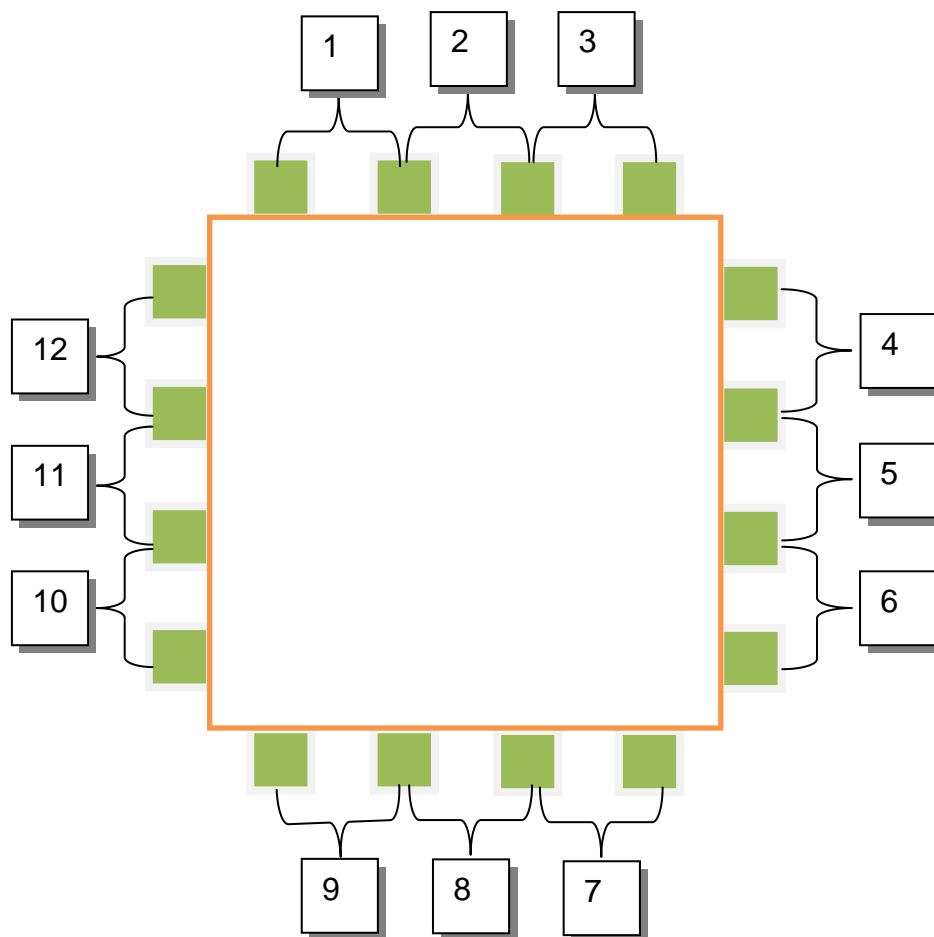


Figura 15: Padrão de injeção de corrente adjacente. Cada número representa um arranjo de injeção de corrente. As chaves, por sua vez, representam quais são os pares de eletrodos onde são realizadas as injeções. Como é representado pela figura, para o padrão adjacente são obtidos doze conjuntos de medidas.

Para cada padrão de injeção de corrente, tanto adjacente quanto diametral, as medidas das ddp são realizadas em eletrodos adjacentes. Assim sendo, para cada padrão de injeção são obtidas 12 medidas independentes do potencial no contorno. Isso significa que, utilizando o padrão diametral de injeção são obtidas 96 medidas independentes do potencial, enquanto que para o padrão adjacente são obtidas 144 medidas independentes do potencial.

A solução do problema inverso foi iniciada mediante a definição de dois domínios com distribuição de condutividade heterogênea e com a solução do problema direto para uma quantidade  $n$  de padrões de corrente injetadas nesses domínios. As distribuições de condutividade empregadas possuem dois diferentes valores, assim como mostram a Figura 17 e a Figura 18 a seguir:

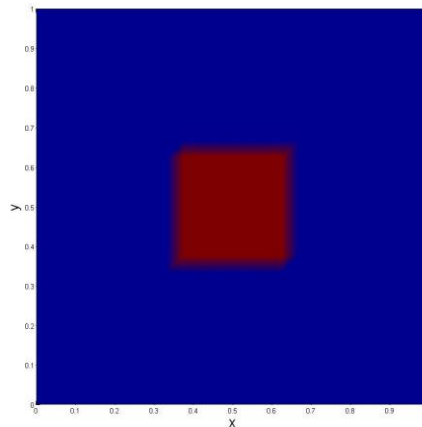


Figura 16: Primeira distribuição de condutividade utilizada para solução do problema inverso, a região em vermelho possui condutividade igual a 110 u.m.c. e a região de cor azul possui condutividade igual a 20 u.m.c..

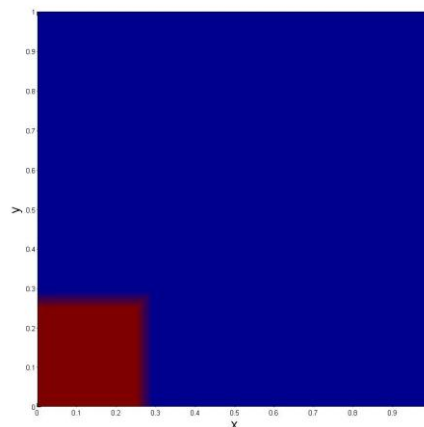


Figura 17: Segunda distribuição de condutividade utilizada para solução do problema inverso, a região em vermelho possui condutividade igual a 110 u.m.c. e a região de cor azul possui condutividade igual a 20 u.m.c..

A função erro foi calculada por meio da equação  $E(\sigma_k) = \frac{1}{L(PI)} \sum_{j=1}^{PI} \sum_{i=1}^L [V - U(\sigma_k)]^2$ , onde  $PI$  é o número de padrões de corrente utilizados,  $L$  é o número de ddp medidas no contorno,  $V$  são as “medidas virtuais” de ddp e  $U(\sigma_k)$  são as ddp calculadas para determinada distribuição de condutividade.

Em relação ao primeiro teste, o padrão de injeção de corrente diametral foi utilizado, principalmente porque ele necessita menor quantidade de soluções do problema direto em comparação ao padrão adjacente. Inicialmente, para distribuição de condutividade da Figura 17 e matriz de discretização 25x25, o problema direto foi resolvido para os oito padrões de injeção de corrente. Os dados obtidos com a solução foram considerados como sendo os valores de medidas, as quais neste trabalho serão chamadas de medidas virtuais.

A solução do problema inverso foi realizada de duas maneiras, uma utilizando o algoritmo apresentado na página 56 e outro utilizando o mesmo algoritmo sem o item 4, ou seja, sem a multiplicação de um determinado valor  $(i,j)$  da matriz  $d(M,N)$ , por determinado valor  $(i,j)$  da matriz de condutividade  $\sigma_{k-1}(M,N)$ , na interação  $k$ , para  $i$  e  $j$  variando de 1 a 25.

Posteriormente, o problema direto, para todos os padrões de injeção de corrente diametral, foi resolvido para a distribuição de condutividade mostrada na Figura 16. A partir dos dados obtidos com o problema direto, o problema inverso foi novamente resolvido utilizando o algoritmo da página 56 e para este sem o item 4.

Esses primeiros testes serviram tanto para mostrar a eficácia do método, como também para testar a regularização proposta pelo autor desse trabalho.

A comparação entre as soluções considerou o número de vezes que o problema direto foi resolvido, para cada uma das soluções. Isso possui relação com a velocidade para obter a solução e com a qualidade das soluções produzidas. A qualidade, por sua vez, foi avaliada de forma qualitativa através da comparação visual das soluções em relação às distribuições de condutividade das Figuras 17 e 18.

O algoritmo que apresentou os melhores resultados para as duas primeiras soluções foi utilizado para o restante dos testes, enquanto o algoritmo de pior resultado não mais foi utilizado.

Nos primeiros testes o parâmetro de temperatura<sup>9</sup> para a primeira iteração ( $T_1$ ) empregado possui valor numérico nulo. O Recozimento simulado assim se reduz ao algoritmo mais simples que utiliza ensaios aleatórios, descrito na página 35 deste trabalho. Por isso, o segundo teste buscou fazer a reconstrução dos domínios (Figuras 17 e 18) utilizando outros valores para o parâmetro de temperatura na primeira iteração. Além de  $T_1 = 0$ , foram também utilizados os valores de  $T_1 = 100$  e  $T_1 = 1000$  na primeira iteração. Por sua vez, a cada interação  $k$ , o parâmetro de temperatura foi determinado pela equação  $T_k = 0.92T_{k-1}$ , onde  $T_k$  é a temperatura na interação  $k$  e  $T_{k-1}$  é a temperatura na interação anterior  $k-1$ . Em todas as soluções foi utilizada matriz de discretização 25x25 e os dados da solução foram comparados da mesma maneira como foi realizado no teste anterior.

A última avaliação buscou testar todos os padrões de injeção de corrente, objetivando definir qual deles apresenta melhor resultado para a solução do problema inverso e/ou se os dois se equivalem. Para os domínios das Figuras 17 e 18, utilizando matriz de discretização 25x25 e considerando a temperatura na primeira iteração igual a zero ( $T_1 = 0$ ), o problema inverso foi resolvido utilizando o padrão adjacente de injeção de corrente e o resultado foi comparado qualitativamente aos dados obtidos para o mesmo valor para temperatura na primeira iteração e tamanho de matriz, alcançados por meio do emprego do padrão diametral de injeção de corrente.

No próximo capítulo são apresentados os resultados obtidos para todos os testes realizados durante o desenvolvimento do presente trabalho.

---

<sup>9</sup> Quando for mencionada a palavra “temperatura” neste trabalho, essa não corresponde à grandeza física definida pela termodinâmica. Por sua vez, o termo temperatura, no método do recozimento simulado, refere-se ao parâmetro que define a probabilidade de determinada variação da matriz de condutividade, em determinada iteração, ser aceita, mesmo que essa variação aumente o valor da função a ser minimizada

## 5. RESULTADOS

Assim como foi feito na descrição da metodologia, os resultados obtidos durante o decorrer do presente trabalho foram apresentados em duas partes. Na primeira, os resultados alcançados para a solução do problema direto foram expostos e discutidos de modo a tratar as possíveis virtudes e limitações das aproximações numéricas propostas. Na segunda, são apresentados e discutidos os resultados da aplicação dos algoritmos de otimização, com a finalidade de apresentar suas potencialidades e limitações, quando utilizados para a solução do problema inverso da TIE.

### 5.1 Problema Direto

Como já mencionado, os resultados obtidos através da utilização das aproximações numéricas para solução dos PVCs foram dispostos em gráficos bidimensionais, onde cada cor presente no gráfico representa o valor numérico da variável de interesse em determinado ponto do domínio analisado. Para os PVCs tratados, três diferentes tamanhos de malhas foram utilizados e, para cada tamanho de matriz, foram construídos três diferentes gráficos, um representando os dados da solução numérica, outro representando os dados da solução analítica e o terceiro representando os dados do erro relativo da solução numérica em comparação à solução analítica, para todos os pontos de discretização do domínio analisado. A seguir, são apresentados os gráficos da solução numérica, da solução analítica e do erro relativo entre as soluções para o PVC1, para os dois diferentes tamanhos de estênceis utilizados na discretização do laplaciano, cinco e nove pontos, considerando uma matriz de  $25 \times 25$  e utilizando o método SOR com 1000 iterações.

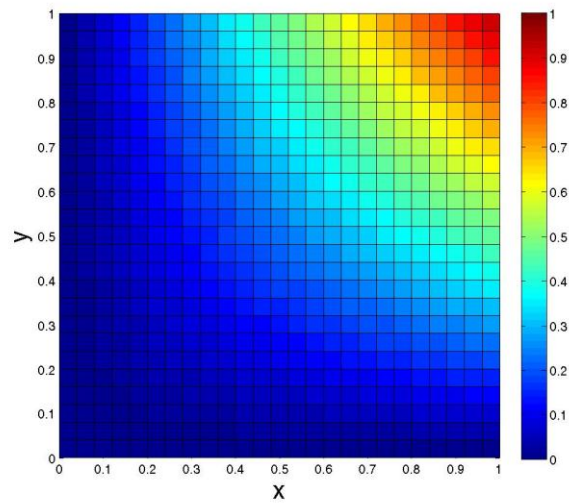


Figura 18: Solução analítica para o PVC1, apresentada em uma malha 25 x 25 pontos.

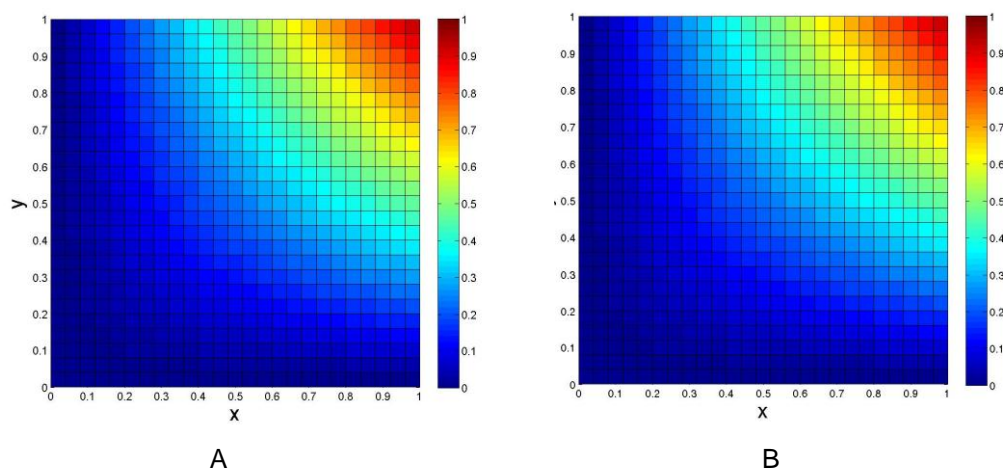


Figura 19: Solução numérica para o PVC1, calculada em uma matriz 25 x 25. A) Solução utilizando o estêncil de cinco pontos; B) solução utilizando o estêncil de nove pontos.

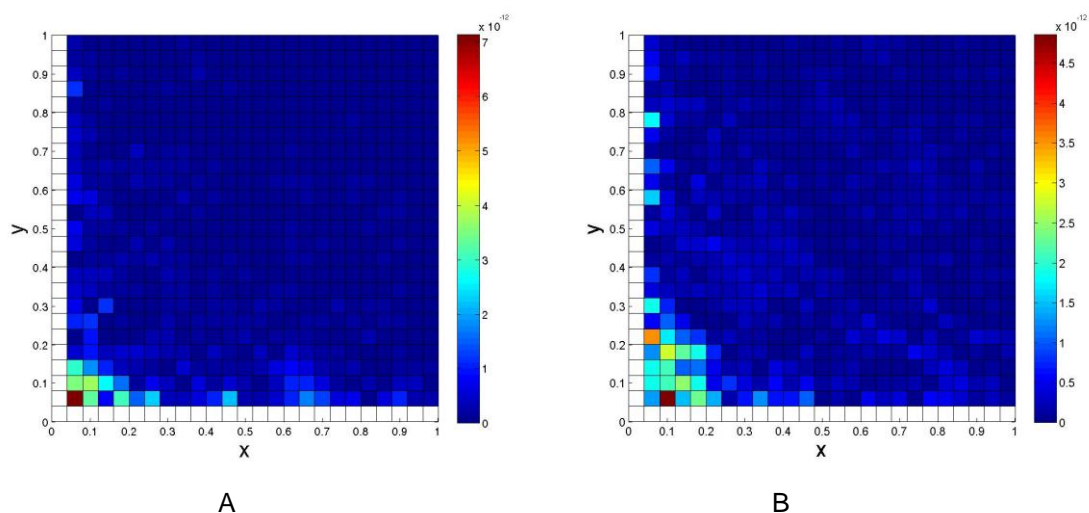


Figura 20: Erro relativo percentual calculado em cada ponto da matriz 25x25, utilizando as soluções numérica e analítica do PVC1. A) Erro para a solução utilizando o estêncil de cinco pontos; B) erro para solução utilizando o estêncil de nove pontos.

Os resultados obtidos para solução do PVC1 com matriz 25x25 mostram uma pequena diferença do erro relativo calculado a partir das diferentes aproximações. No entanto, elas apresentaram ótimos resultados, como pode ser observado na Figura 21, onde erro relativo máximo para cada uma delas ficou em torno de  $10^{-12}$  %.

Ainda foram produzidos gráficos semelhantes utilizando tamanhos de matriz 50x50 e 100x100. Os resultados foram semelhantes aos obtidos para matriz 25x25.

Diferentemente dos resultados apresentados pelo PVC1, os resultados alcançados para o PVC2 apresentaram grande discrepância entre os diferentes esquemas de diferenças finitas e entre as diferentes matrizes de discretização. Isso pode ser observado nas figuras exibidas a seguir, as quais apresentam os gráficos da solução numérica, da solução analítica e do erro relativo entre as soluções, para as malhas de discretização 25x25, 50x50 e 100x100 utilizando o método de SOR para solução do sistema linear com 10000 iterações.

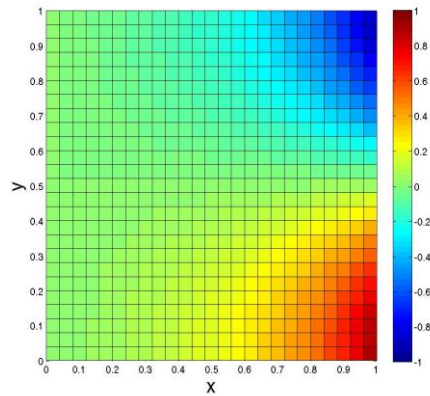


Figura 21: Solução analítica para o PVC2, apresentada em uma matriz 25 x 25.

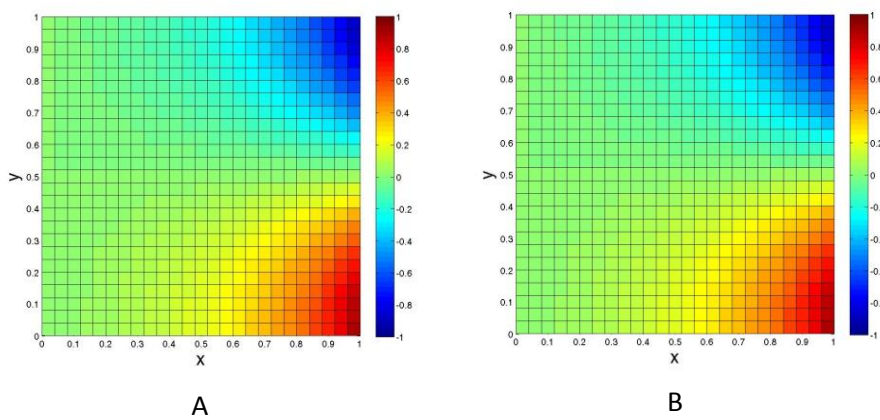


Figura 22: Solução analítica para o PVC2, calculada em uma matriz 25 x 25. A) Solução utilizando o estêncil de cinco pontos; B) Solução utilizando o estêncil de nove pontos.

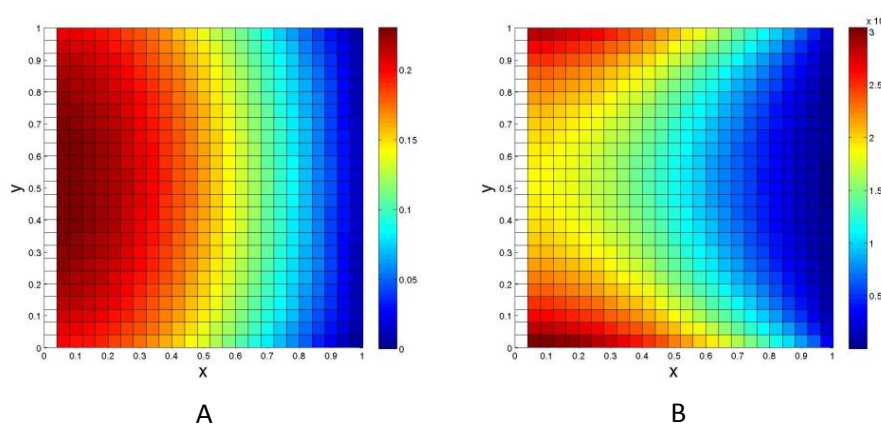


Figura 23: Erro relativo percentual calculado em cada ponto da matriz 25x25, utilizando as soluções numérica e analítica do PVC2. A) Erro da solução numérica utilizando a aproximação com estêncil de cinco pontos; B) Erro da solução numérica utilizando a aproximação com estêncil de nove pontos.



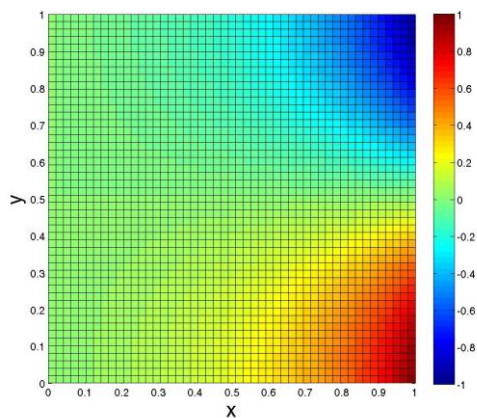


Figura 24: Solução analítica para o PVC2, apresentada em uma matriz 50 x 50.

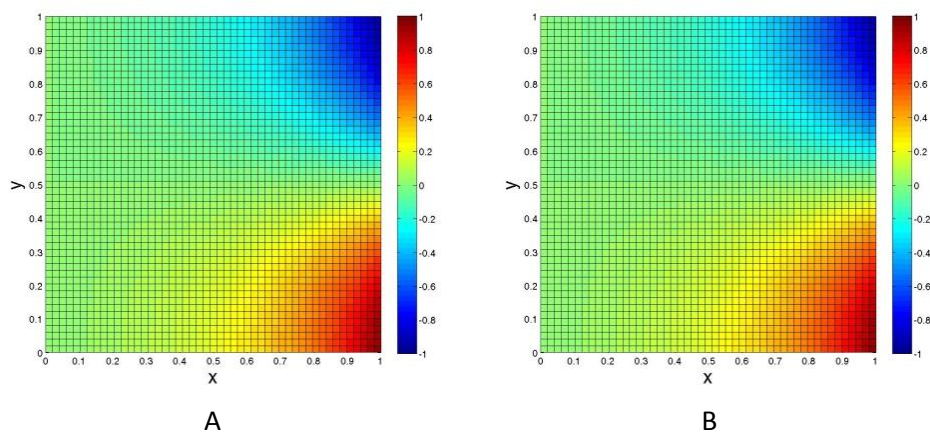


Figura 25: Solução numérica para o PVC2, calculada em uma matriz 50 x 50. A) Solução utilizando o estêncil de cinco pontos; B) solução utilizando o estêncil de nove pontos.

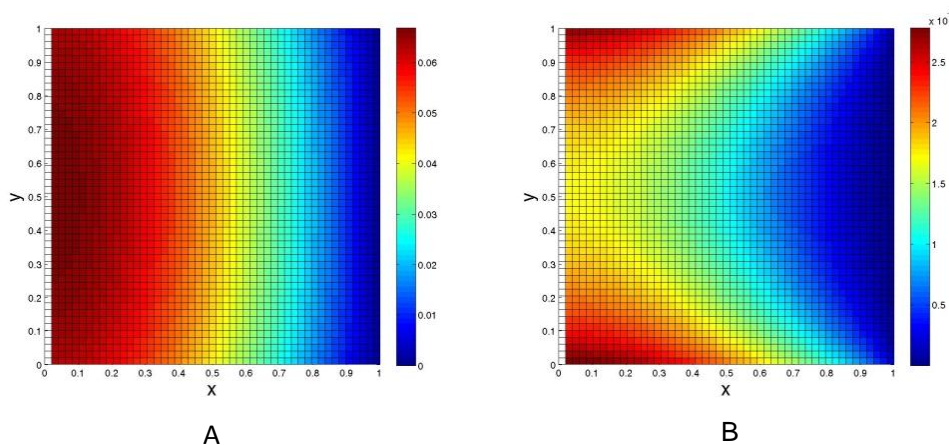


Figura 26: Erro relativo percentual calculado em cada ponto da matriz 50x50, utilizando as soluções numérica e analítica do PVC2. A) Erro da solução numérica utilizando a aproximação com estêncil de cinco pontos; B) erro da solução numérica utilizando a aproximação com estêncil de nove pontos.

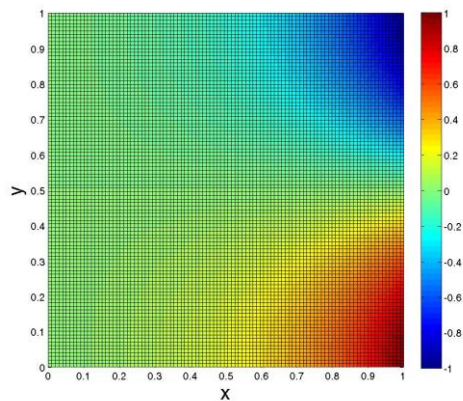


Figura 27: Solução analítica para o PVC2, apresentada em uma matriz 100 x 100.

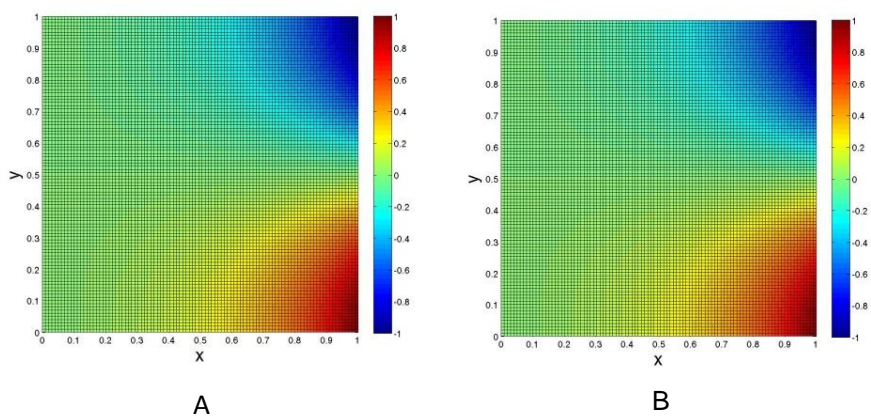


Figura 28: Solução numérica para o PVC2, calculada em uma matriz 100 x 100. A) Solução utilizando o estêncil de cinco pontos; B) solução utilizando o estêncil de nove pontos.

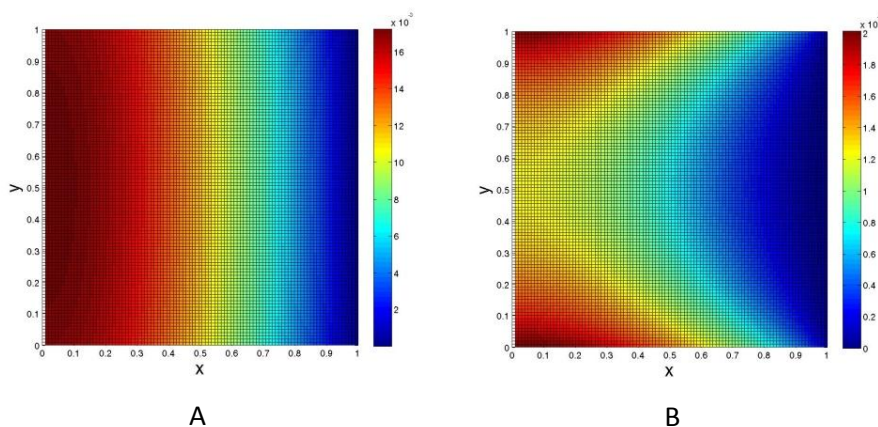


Figura 29: Erro relativo percentual calculado em cada ponto da matriz 100x100, utilizando as soluções numérica e analítica do PVC2. A) Erro da solução numérica utilizando a aproximação com estêncil de cinco pontos; B) Erro da solução numérica utilizando a aproximação com estêncil de nove pontos.

Diferentemente do comportamento apresentado pelo PVC1, o erro relativo diminuiu com o aumento da matriz de discretização para o PVC2. Isso pode ser observado ao ser comparado o erro máximo apresentado na Figura 24, ao erro máximo da Figura 27 e da Figura 30, para as duas soluções produzidas. Quanto às diferentes soluções, aquelas produzidas utilizando o estêncil de nove pontos (equação 12) conjuntamente as aproximações da Tabela 2, como esperado, apresentaram resultados superiores em relação à acurácia, se comparados aos dados obtidos por meio do emprego da aproximação (11) em conjunto com as discretizações para o contorno da Tabela 1. Ainda em relação à acurácia dos valores obtidos, é interessante observar que o erro apresentado utilizando o estêncil de nove pontos, foi em média cerca de  $10^4$  vezes menor em comparação ao erro obtido utilizando o estêncil de cinco pontos. Essa constatação é ainda mais relevante se for considerado o custo computacional, o qual não apresentou qualitativamente diferença significativa entre as duas aproximações numéricas.

Para a solução do problema direto em um domínio com distribuição de condutividade homogênea, foram obtidos os seguintes resultados, exibidos na Figura 31:

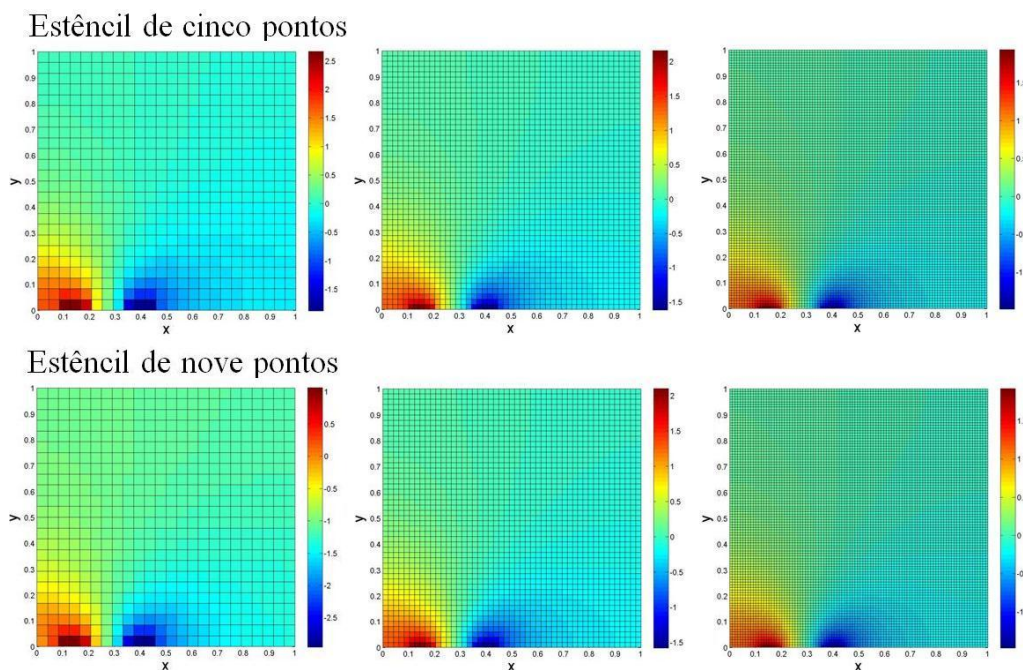


Figura 30: Solução do problema direto, utilizando o padrão adjacente de injeção de correntes, utilizando o estêncil de cinco e nove pontos, para as matrizes  $25 \times 25$ ,  $50 \times 50$  e  $100 \times 100$ . As regiões em azul e em vermelho nos gráficos são as regiões onde estão localizados os eletrodos de injeção de corrente.

A Figura 31 apresenta a solução do problema direto para um domínio com distribuição de condutividade constante igual 20 u.m.c. Esperava-se um comportamento do potencial semelhante àquele apresentado pelo potencial de um dipolo elétrico. Essa expectativa foi confirmada pelos dados, para as duas aproximações.

Apenas utilizando os gráficos do potencial elétrico  $u$  em função de  $x$  e  $y$ , é difícil avaliar as diferenças dos resultados obtidos para duas as soluções numéricas e diferentes tamanhos de matriz. Por isso, na região dos eletrodos, região de maior gradiente de potencial, foram traçados gráficos de  $u$  em função de  $x$  com  $y=0,00$  (u.m.cp). Os gráficos do perfil do potencial, exibidos a seguir na Figura 32, representam os dados obtidos para soluções do problema direto apresentadas na Figura 31.

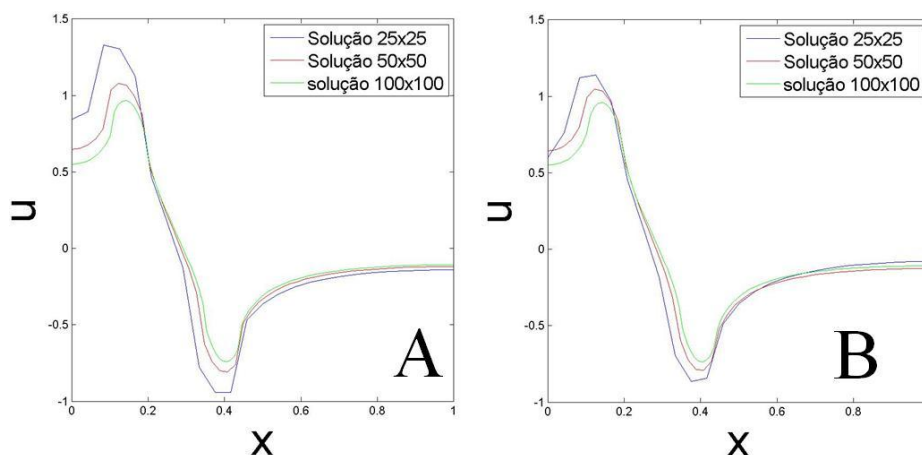


Figura 31: Gráficos do perfil do potencial traçado na região onde estão posicionados os eletrodos de injeção, para a matriz 25x25, 50x50 e 100x100. A) Gráfico traçado utilizando a aproximação (12); B) gráfico traçado utilizando a aproximação (11).

Os gráficos da Figura 32 representam a solução do problema direto para todos os tamanhos de matriz e, de forma individual, aproximações (estêncil de cinco e de nove pontos) testadas, na região dos eletrodos de injeção de corrente. Nessa região, como o potencial varia de forma mais intensa, supostamente seria mais facilmente observável a diferença entre os potenciais calculados utilizando diferentes tamanhos de matriz. Como a expressão (12) é mais precisa, quando comparada à expressão (11), era esperado que ela apresentasse menor variação entre as curvas traçadas. Observando a Figura 30, o gráfico A é aquele aonde há maior discrepância entre as curvas do potencial. Como ele foi traçado utilizando os dados da solução numérica do problema direto, obtidos

por meio do emprego da expressão (11), a expectativa em relação aos resultados desse teste se confirmou.

A seguir, são apresentados os resultados da solução do problema direto para uma distribuição de condutividade heterogênea, utilizando as aproximações (31), (32) e (36):

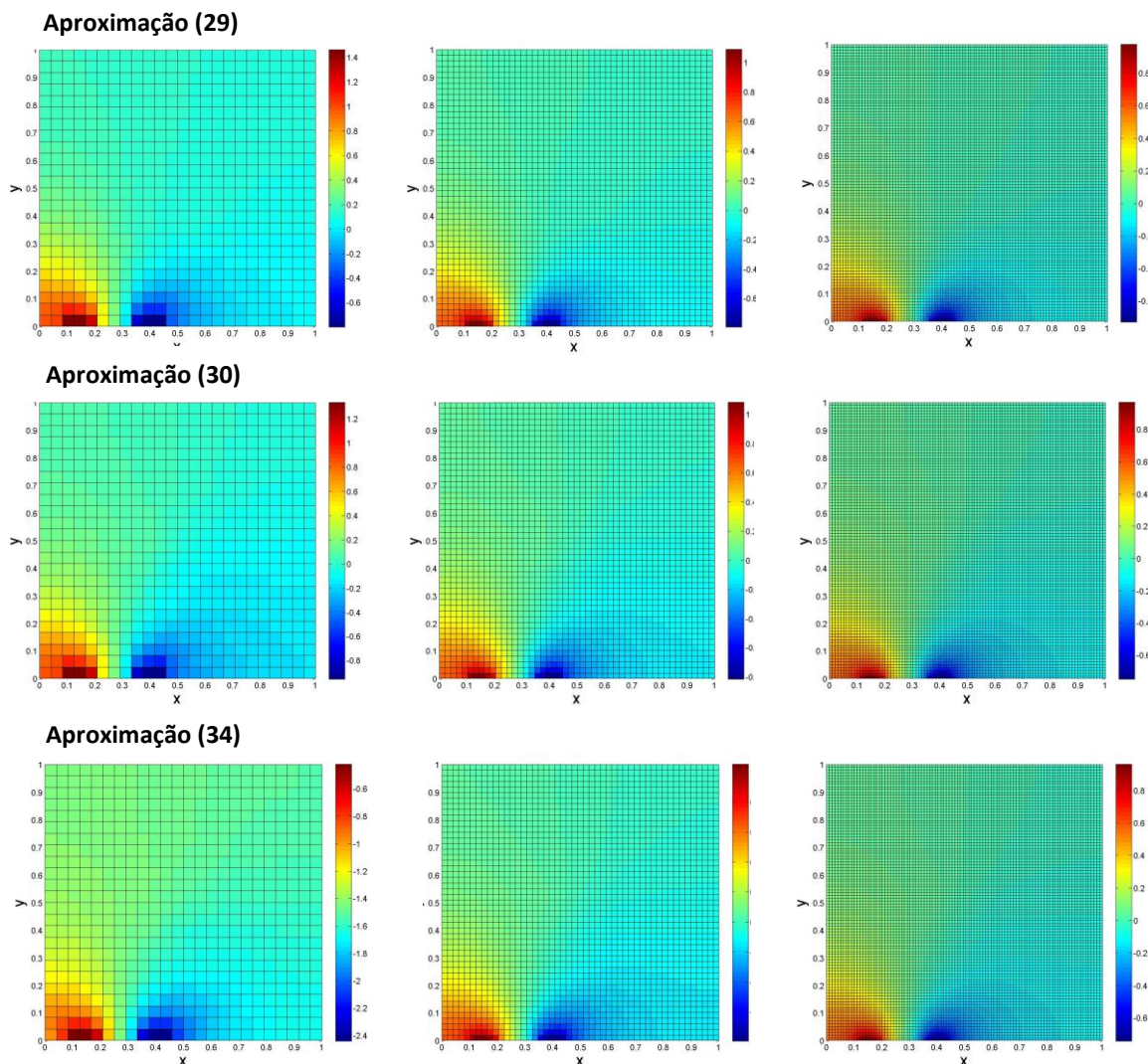


Figura 32: Solução numérica do problema direto utilizando matrizes 25x25, 50x50 e 100x100, para as aproximações (29), (30) e (34). As regiões em azul e em vermelho nos gráficos são as regiões onde estão localizados os eletrodos de injeção de corrente.

A distribuição de condutividade, sobre a qual as soluções apresentadas na Figura 33 foram produzidas, é aquela representada na Figura 12. Quanto às aproximações, as equações testadas apresentaram bons resultados para essa distribuição de condutividade. No entanto, para melhor fazer a avaliação das aproximações, gráficos do perfil do potencial em  $y=0,00$  (u.m.cp) foram traçados. Para esses gráficos era esperado que a equação (34), caso pudesse

aproximar o potencial em um domínio com distribuição de condutividade heterogênea, apresentaria resultados similares aos resultados obtidos por meio do emprego da aproximação (30). No entanto, as soluções produzidas através do emprego da aproximação (34) para diferentes tamanhos de matriz, deveriam apresentar menor diferença entre si, como foi observado nos gráficos do perfil do potencial para uma distribuição de condutividade homogênea. Quanto à aproximação (29), como ela possui acurácia semelhante à equação (30), os resultados obtidos através do seu emprego, deveriam ser idênticos ou muito próximos aos resultados apresentados por (30).

Os gráficos do perfil do potencial, para cada uma das aproximações abordadas, são apresentados na Figura 34 a seguir:

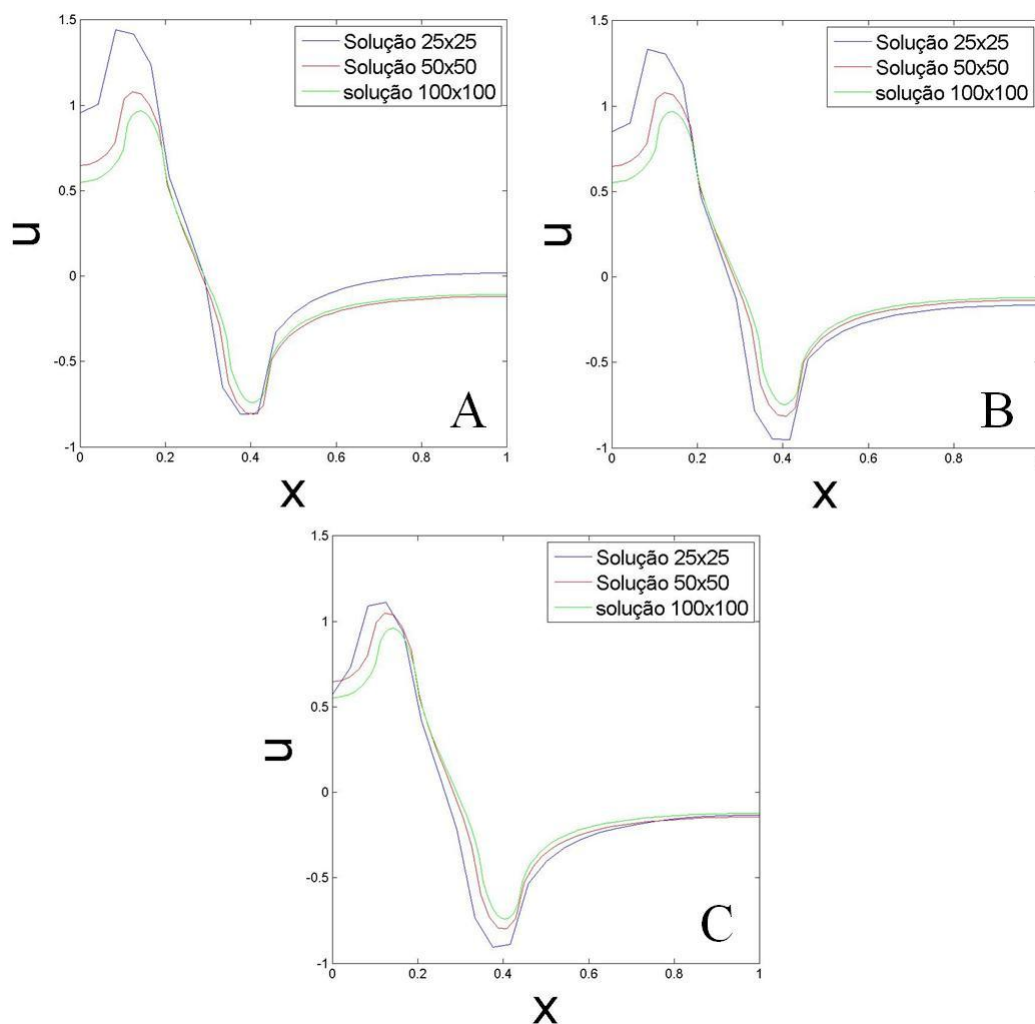
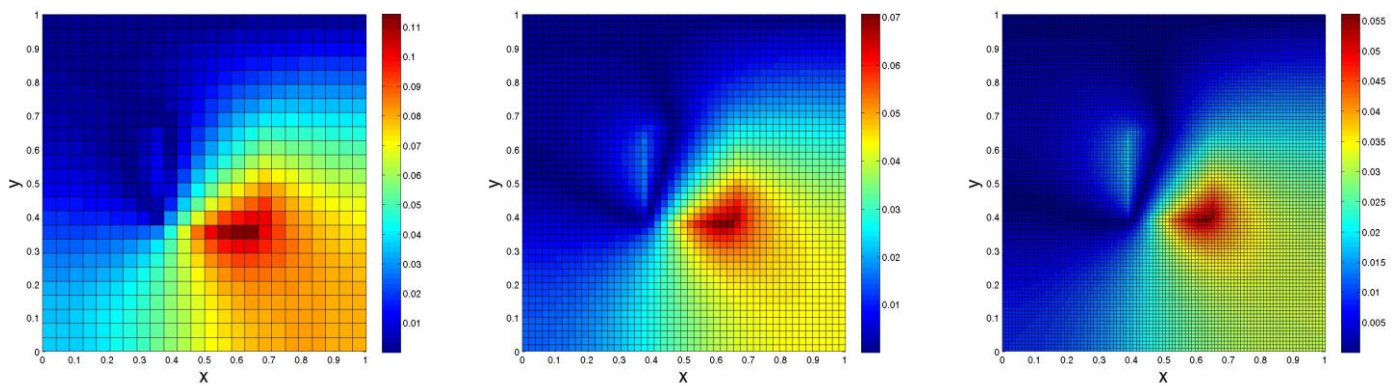


Figura 33: Gráficos do perfil do potencial traçado na região onde estão posicionados os eletrodos de injeção, para a matriz 25x25, 50x50 e 100x100. A) Gráfico traçado utilizando a aproximação (29); B) gráfico traçado utilizando a aproximação (30); gráfico traçado utilizando a aproximação (34).

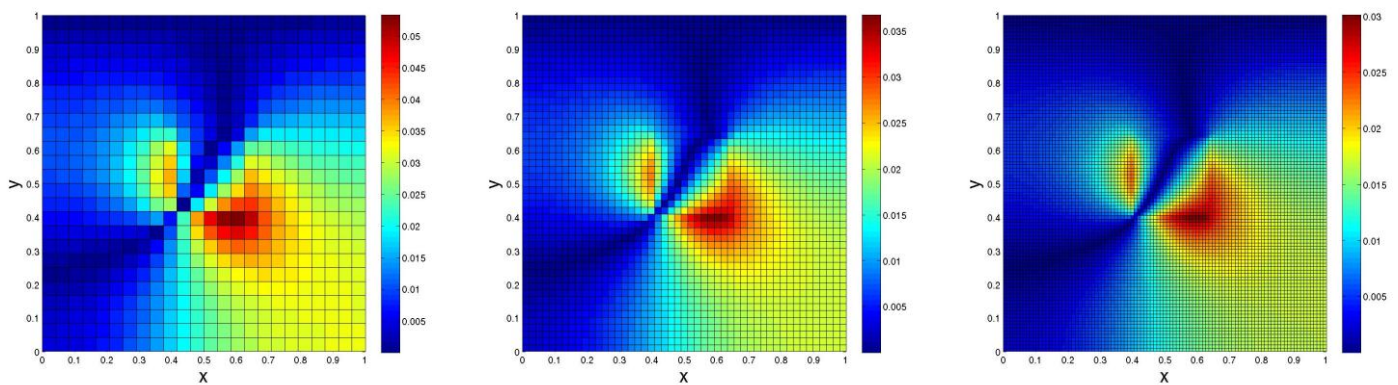
Considerando os gráficos B e C dispostos na Figura 34, estes apresentaram diferenças entre as curvas traçadas e entre si, análogas às diferenças observadas nos gráficos dispostos na Figura 34. Isso indica que a aproximação (34) pode ser aplicada para domínios com distribuição de condutividade heterogênea. Quanto à equação (29), como esperado, os resultados obtidos para essa distribuição de condutividade são equivalentes aos resultados obtidos utilizando-se (30).

Outro aspecto importante a ser pensado sobre as soluções, diz respeito à perturbação no formato da distribuição do potencial calculado em  $\Omega$ , devido à variação da condutividade no meio. Por isso, neste trabalho, as soluções para um domínio com distribuição de condutividade homogênea, apresentadas na Figura 31, foram comparadas às correspondentes soluções produzidas em um domínio com distribuição de condutividade heterogênea (Figura 12), apresentada na Figura 33, através do cálculo do módulo da diferença entre as soluções. A seguir, na Figura 35, são apresentados todos os resultados obtidos nessa avaliação:

Aproximações (29) e (11)



Aproximações (30) e (11)



Aproximações (34) e (12)

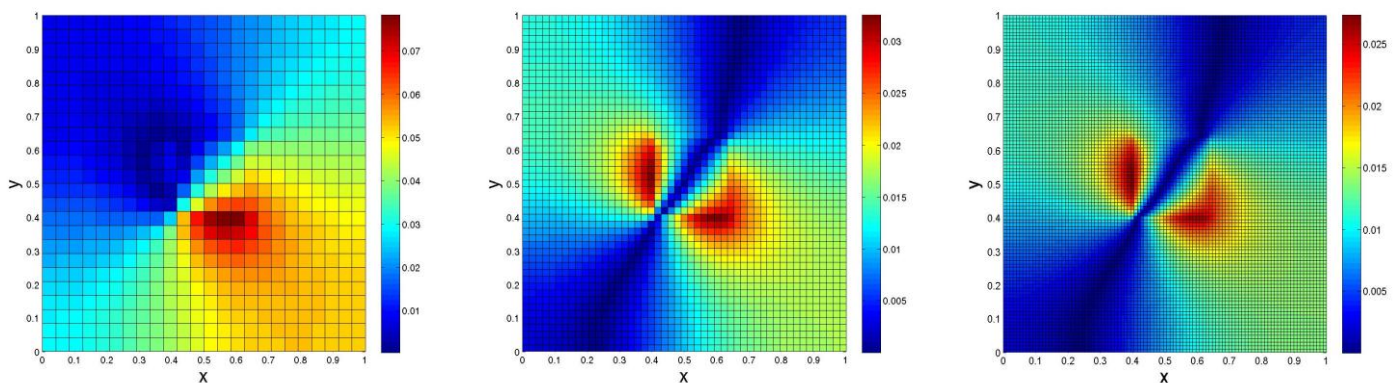


Figura 34: Comparação entre as soluções numéricas para um domínio com distribuição de condutividade homogênea igual 20 u.m.c. e outro com distribuição de condutividade heterogênea igual a da Figura 12, para todos os tamanhos de matriz.

Na Figura 35 pode ser observado que a maior diferença encontrada entre as soluções, foi justamente na interface entre as regiões com diferentes condutividades, da distribuição representada na Figura 12. Isso indica que as aproximações empregadas para a solução do problema direto da TIE, repre-



sentam aparentemente de modo adequado a distribuição do potencial para um domínio com condutividade variável.

Os testes de convergência mostraram que a equação (29) não converge quando aplicada a domínios com grandes gradientes de condutividade. Das distribuições de condutividade testadas (ver pág. 51), apenas para aquela com menor variação de condutividade essa aproximação convergiu. Por sua vez, as aproximações (30) e (34) convergiram para todas as distribuições de condutividade avaliadas.

Quanto ao tempo computacional, não foram realizados procedimentos específicos para analisá-lo. No entanto, através da utilização de um computador com 2 gigabytes de memória RAM, processador Intel® modelo Core 2 Duo e, considerando o método iterativo de Gauss-Seidel, para matrizes 25x25, as soluções numéricas foram obtidas em poucos segundos, possivelmente 3 ou 4 segundos. Em relação às matrizes maiores, como 50x50 e 100x100, o tempo necessário para obtenção das soluções (obviamente) foi maior. Por exemplo, considerando matrizes 50x50, as soluções foram obtidas em cerca de 30 ou 40 segundos, enquanto para matrizes 100x100, de 3 a 4 minutos foram necessários para a visualização da solução numérica. Quanto às soluções produzidas utilizando o método de sobre-relaxação sucessiva, para todos os tamanhos de matriz empregados, as soluções foram obtidas em poucos segundos, no máximo 10 segundos para matrizes 100x100.

## 5.2 Problema Inverso

Nas primeiras reconstruções realizadas neste trabalho, os resultados obtidos utilizando a regularização do problema inverso, mediante a multiplicação de um valor específico  $i,j$  da matriz  $d(M,N)$  por outro valor específico  $i,j$  da matriz de condutividade  $\sigma_{k-1}(M,N)$  (regularização 1), foram testados. Neste teste, os resultados alcançados por dois diferentes algoritmos, um com o processo de multiplicação e o outro sem este passo (regularização 2), foram comparados.

Os dados para realizar a reconstrução, para todos os padrões de injeção de corrente diametral, foram obtidos mediante a solução do problema direto, para as distribuições de condutividade representadas nas Figuras 15 e 16.

Como critério de parada foi utilizado quatro diferentes valores para a função erro,  $5 \times 10^{-5}$ ,  $1 \times 10^{-5}$ ,  $5 \times 10^{-6}$  e  $2 \times 10^{-6}$  unidades de medidas de potencial ao quadrado (u.m.p)<sup>2</sup>. A seguir, na Figura 36, são apresentados os resultados desse teste para a distribuição de condutividade da Figura 15:

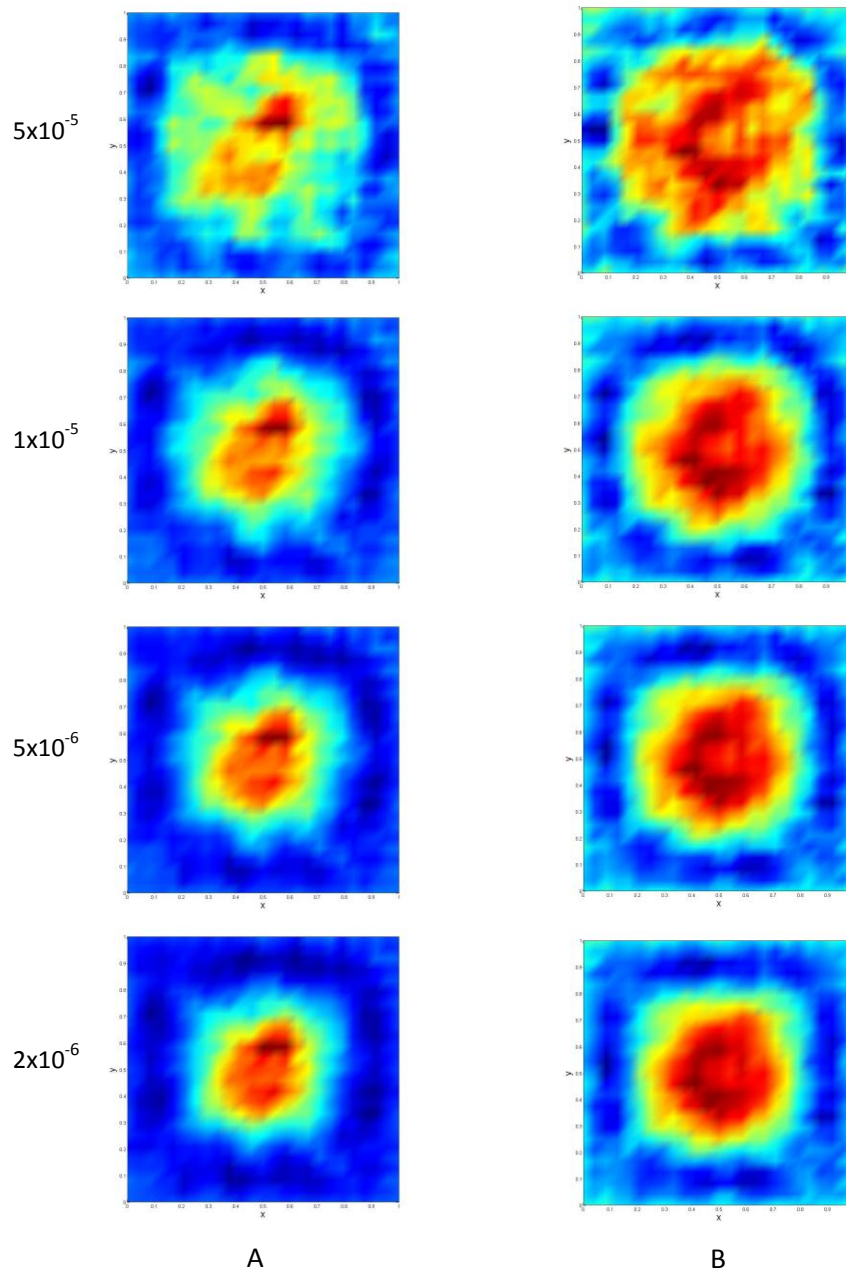


Figura 35: Comparação entre as soluções do problema inverso para um domínio com distribuição de condutividade igual à da Figura 15. A) regularização do problema inverso mediante a aplicação do filtro gaussiano e a multiplicação da matriz  $\partial\sigma(M, N)$  pela matriz de condutividade  $\sigma_{k-1}(M, N)$ ; B) regularização do problema inverso somente através da aplicação do filtro gaussiano.

Os resultados apresentados na Figura 36 indicam que os algoritmos desenvolvidos podem produzir a solução do problema inverso da TIE. Todavia, a regularização 1, numa avaliação qualitativa, mostrou-se mais eficaz em comparação à regularização 2. Nessa avaliação, foram observadas características como homogeneidade, forma, tamanho e localização das diferentes regiões do domínio analisado. No caso da homogeneidade, ela está relacionada à regularização e pode ser definida como a constância dos valores de condutividade nas distintas regiões do domínio. Em relação à forma, ao tamanho e à localização, estas são propriedades geométricas ligadas à qualidade das reconstruções.

Uma análise mais acurada das propriedades referidas no parágrafo anterior pode ser realizada fazendo-se a comparação das reconstruções, considerando o menor critério de parada empregado ( $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p)<sup>2</sup>), com o domínio avaliado. Na Figura 37, apresentada a seguir, estão dispostas lado a lado, as figuras do domínio e das reconstruções, de modo a favorecer a comparação visual de cada uma delas.

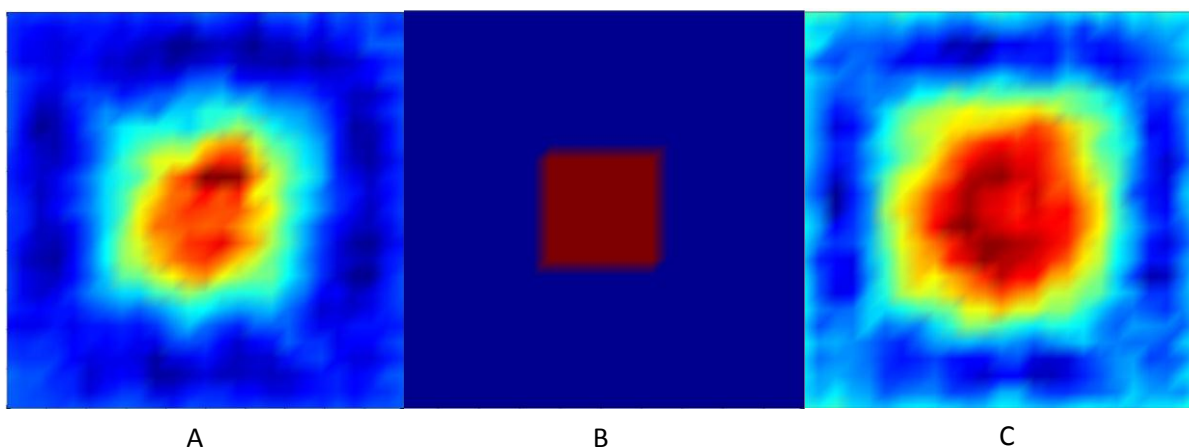


Figura 36: Soluções obtidas para duas diferentes regularizações com critério de parada de  $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p)<sup>2</sup> e representação da distribuição de condutividade do domínio reconstruído. A) reconstrução utilizando a regularização 1; B) distribuição de condutividade do domínio; C) reconstrução utilizando a regularização 2.

Na Figura 37A, onde é apresentada a reconstrução realizada utilizando a regularização 1, Nota-se uma maior homogeneidade comparada à reconstrução apresentada na Figura 37C, realizada com o emprego da regularização 2. Isso pode ser mais bem observado na região azul das figuras analisadas, onde

a Figura 37A é aparentemente muito mais homogênea. Em relação ao tamanho das regiões, claramente a reconstrução representada na Figura 37A reproduziu a dimensão das regiões mais precisamente do que a reconstrução representada na Figura 37C. Quanto à posição e à forma do contorno das regiões, qualitativamente não foram observadas diferenças entre as reconstruções realizadas.

A seguir, na Figura 38, são apresentados os resultados obtidos para o domínio representado pela Figura 16:

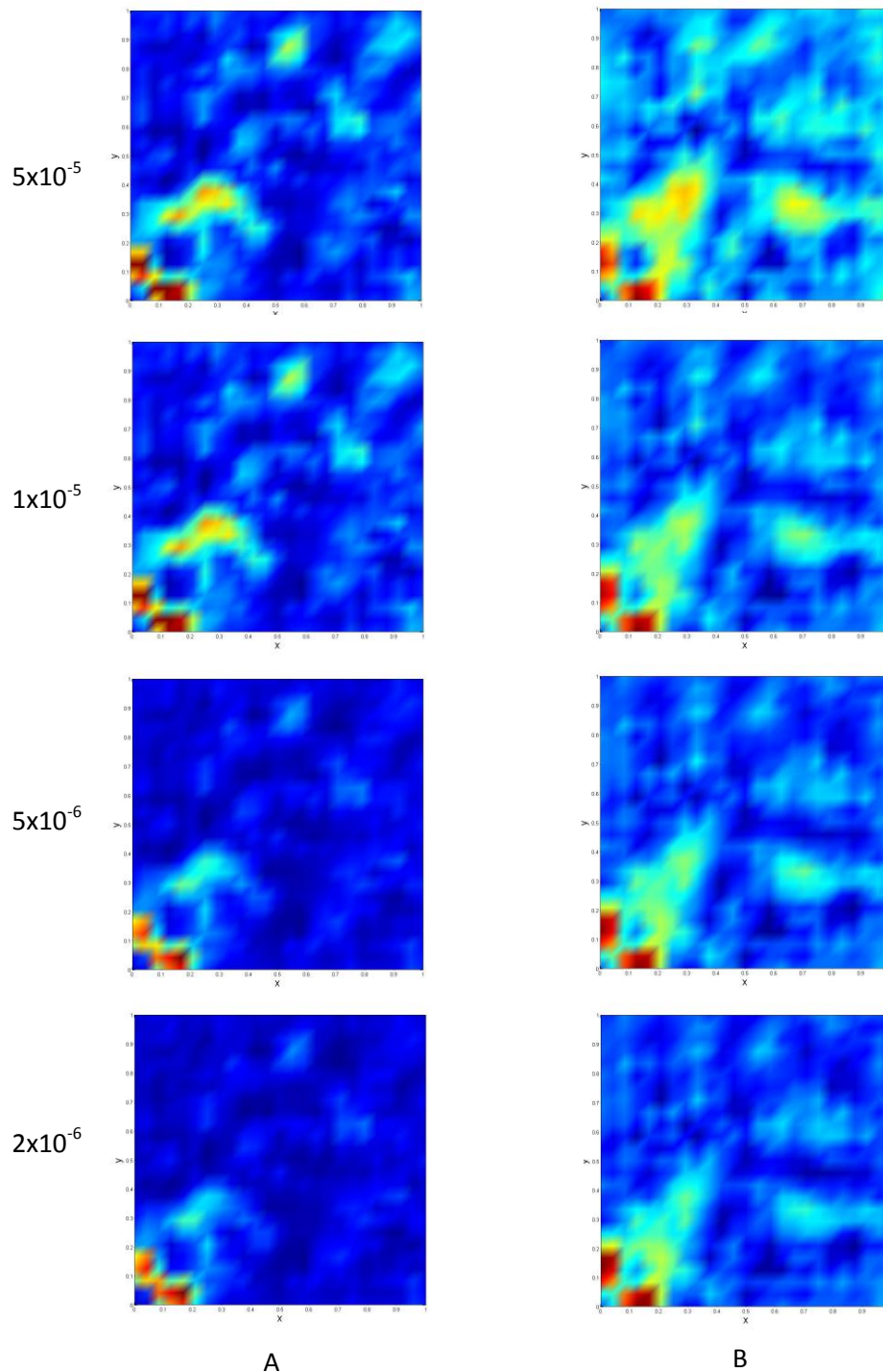


Figura 37: Comparação entre as soluções do problema inverso para um domínio com distribuição de condutividade igual à da Figura 16. A) regularização do problema inverso mediante a aplicação do filtro gaussiano e a multiplicação da matriz  $\partial\sigma(M, N)$  pela matriz de condutividade  $\sigma_{k-1}(M, N)$ ; B) regularização do problema inverso somente através da aplicação do filtro gaussiano

Para o domínio representado pela Figura 16, as reconstruções realizadas apresentaram qualitativamente resultados inferiores àquelas realizadas

para o domínio representado pela Figura 15. Quanto às regularizações, a regularização 1 apresentou resultados aparentemente equivalentes aos resultados apresentados pela regularização 2, como pode ser melhor observado na Figura 39, apresentada a seguir:

/:

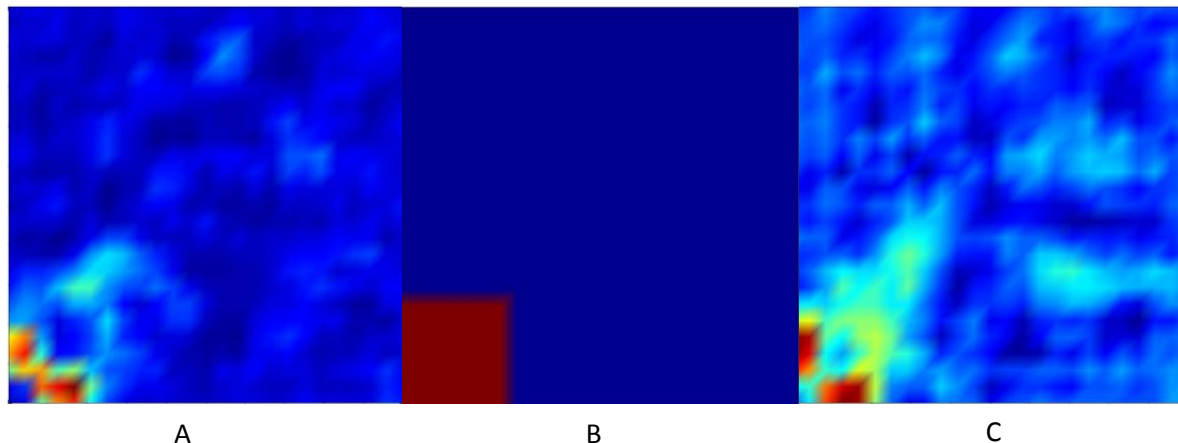


Figura 38: Soluções obtidas para duas diferentes regularizações com critério de parada de  $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p)<sup>2</sup> e representação da distribuição de condutividade do domínio reconstruído. A) reconstrução utilizando a regularização 1; B) distribuição de condutividade do domínio; C) reconstrução utilizando a regularização 2.

Visualmente, a Figura 39A se mostra mais homogênea em comparação à Figura 39C, indicando que a regularização 1, com relação à homogeneidade, produz reconstruções melhores em comparação à regularização 2. Quanto à dimensão ou tamanho das regiões do domínio, aparentemente a Figura 39C reproduziu de forma mais acurada essa propriedade, apesar desta ser difícil de ser analisada qualitativamente para as reconstruções da Figura 39, tendo em vista que nenhuma das reconstruções conseguiu aproximar de forma satisfatória a forma das diferentes regiões do domínio. Como nenhuma das reconstruções conseguiu representar, nem de forma aproximada, o formato das diferentes regiões do domínio, em relação a essa propriedade, as reconstruções foram consideradas equivalentes.

Outro aspecto importante a ser considerado em relação ao problema inverso, está relacionado à quantidade de soluções do problema direto necessárias para resolvê-lo. Nesse caso, de forma equivalente, pode ser considerado o número de iterações necessárias para satisfazer o critério de parada do algoritmo. Considerando o menor valor da função erro utilizado como critério de

parada, para produzir as soluções apresentadas na Figura 38 ( $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p)<sup>2</sup>), soluções essas apresentadas na Figura 39, para a regularização 1, o critério de parada foi satisfeito com 423 906 iterações enquanto que para a regularização 2 foram necessários 1 298 730 iterações para satisfazer o critério de parada. Além de ser mais precisa, esses resultados mostram que computacionalmente a regularização 1 é consideravelmente menos dispendiosa em relação à regularização 2

Utilizando a regularização 1 e os mesmos critérios de parada, foram testados diferentes valores para a temperatura na primeira iteração  $T_1$ . Para as reconstruções das Figuras 36 e 38 foi empregado o valor de  $T_1 = 0$ , para as reconstruções expostas a seguir, nas Figuras 40 e 41, os valores de “temperatura” utilizados foram de  $T_1 = 100$  e  $T_1 = 1000$ . Estas figuras são apresentadas a seguir.

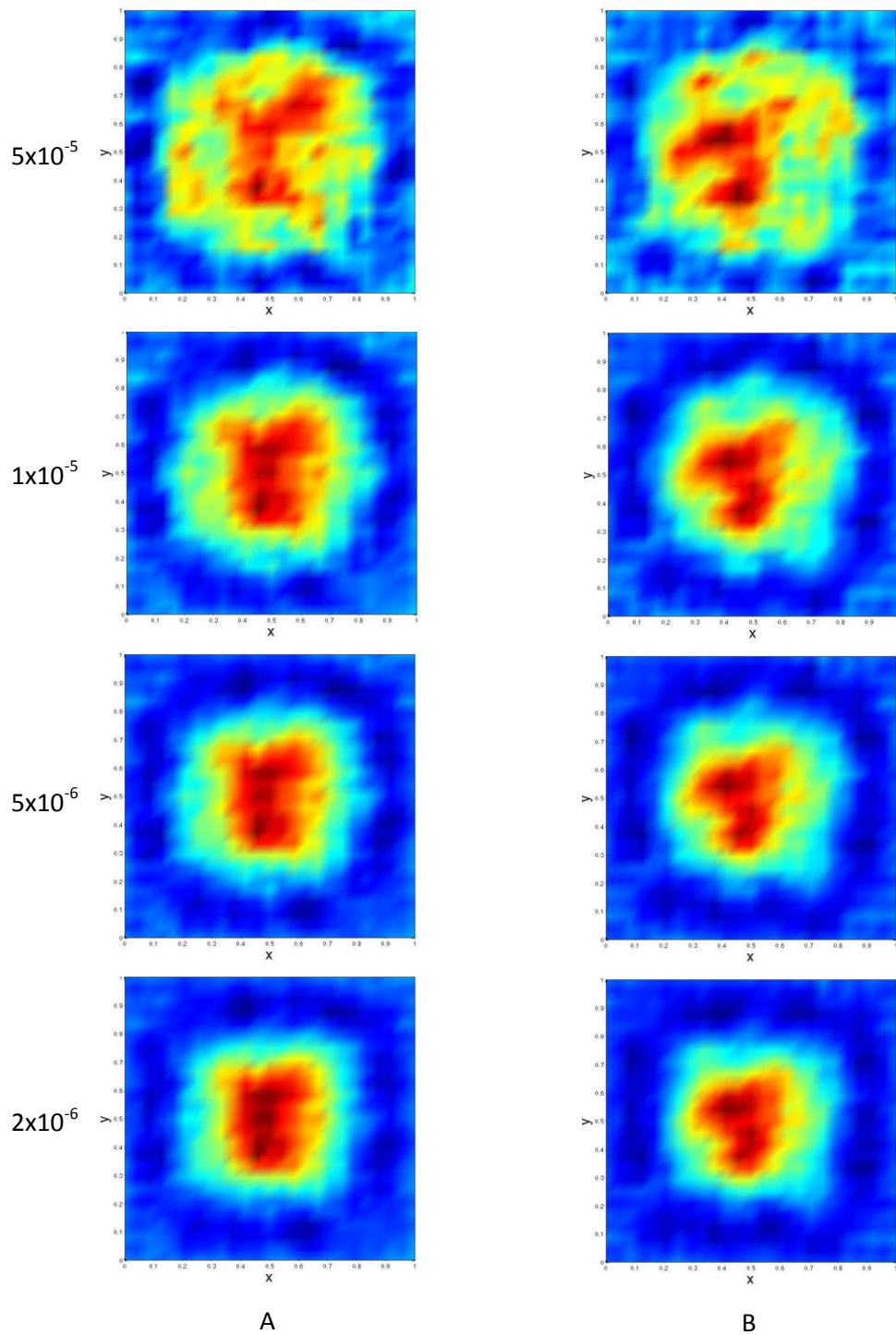


Figura 39: Comparação entre as soluções do problema inverso para um domínio com distribuição de condutividade igual a da Figura 15. A) Utilizando  $T_1 = 100$ ; B) utilizando  $T_1 = 1000$ .



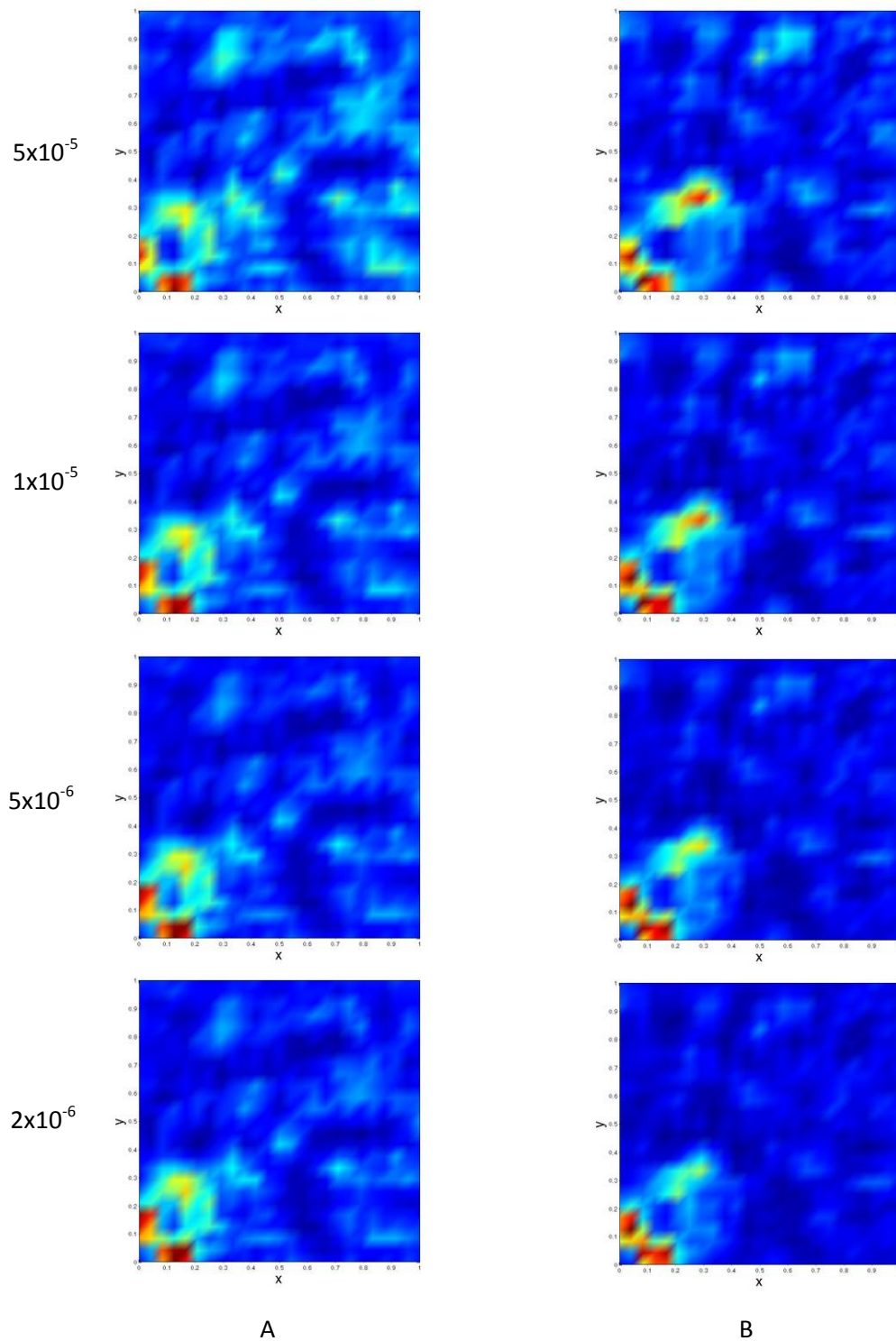


Figura 40: Comparação entre as soluções do problema inverso para um domínio com distribuição de condutividade igual a da Figura 16. A) Utilizando  $T_1 = 100$ ; B) utilizando  $T_1 = 1000$ .

Qualitativamente, para os domínios das Figuras 15 e 16, as soluções utilizando  $T_1 = 100$  e  $T_1 = 1000$  não apresentaram acentuadas diferenças entre si. Além disso, visualmente, comparando as três soluções produzidas (conside-

rando também as soluções apresentadas nas Figuras 36A e 38A) não foi observado melhora ou piora na qualidade das reconstruções, produzidas utilizando diferentes valores para o parâmetro  $T_1$ . Para melhor comparar cada uma das soluções, no entanto, como já realizado para as primeiras reconstruções, elas foram dispostas lado a lado, organizadas de modo à melhor observar suas características, na Figura 42 apresentada a seguir:

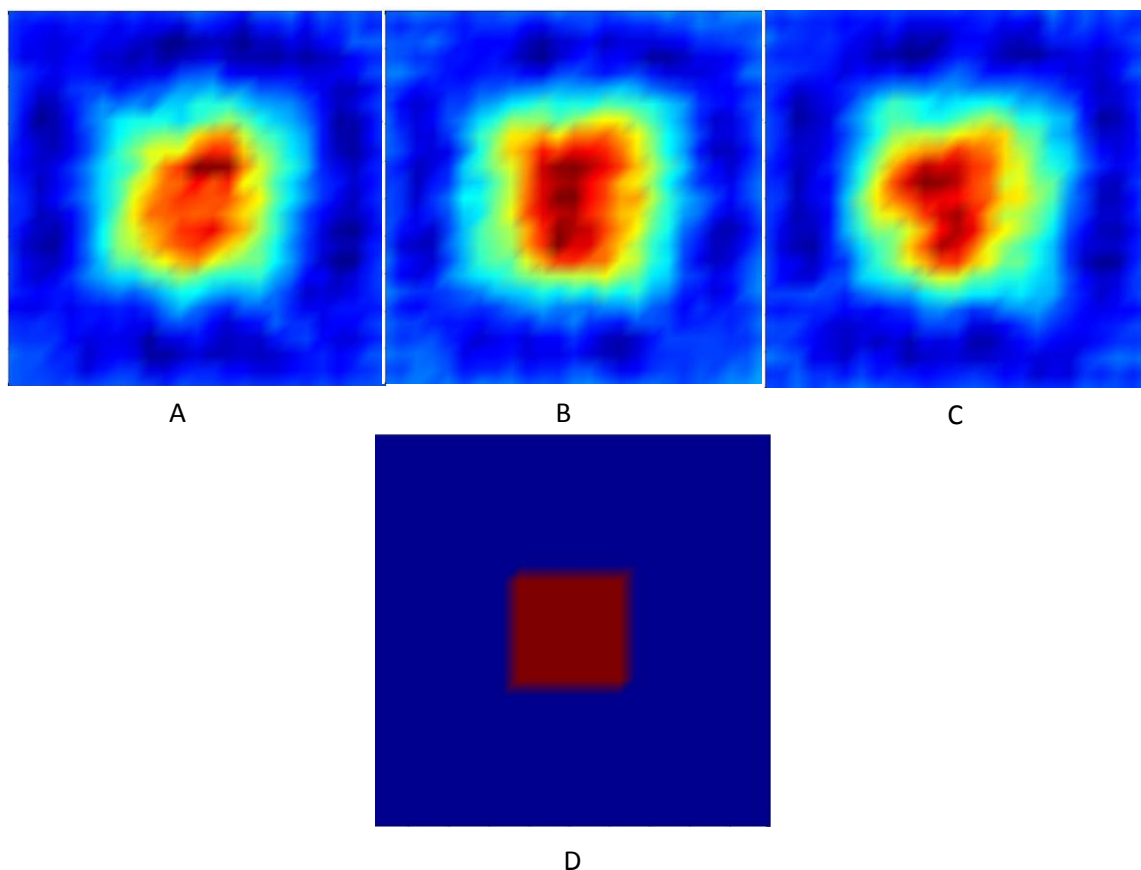


Figura 41: Soluções obtidas para o domínio da Figura 15, utilizando três diferentes valores para  $T$  com critério de parada de  $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p)<sup>2</sup> e representação da distribuição de condutividade do domínio reconstruído. A) reconstrução utilizando  $T_1 = 0$ ; B) reconstrução utilizando  $T_1 = 100$ ; C) reconstrução utilizando  $T_1 = 1000$ ; D) distribuição de condutividade do domínio.

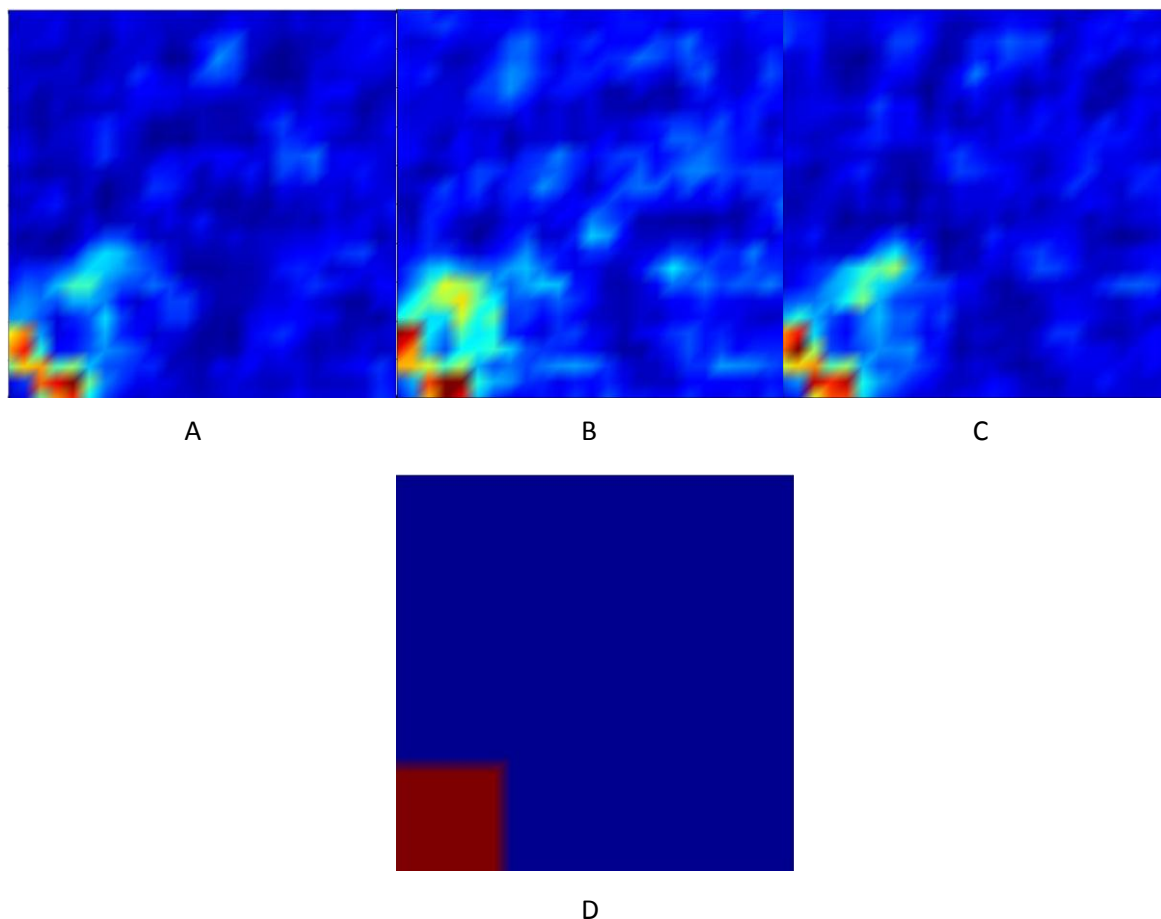


Figura 42: Soluções obtidas para o domínio da Figura 16, utilizando três diferentes valores para  $T$  com critério de parada de  $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p)<sup>2</sup> e representação da distribuição de condutividade do domínio reconstruído. A) reconstrução utilizando  $T_1 = 0$ ; B) reconstrução utilizando  $T_1 = 100$ ; C) reconstrução utilizando  $T_1 = 1000$ ; D) distribuição de condutividade do domínio.

Visualmente, os diferentes valores para  $T_1$ , empregados durante as distintas soluções do problema inverso realizadas, como já referido, não apresentaram acentuadas diferenças entre si. Quanto à homogeneidade, aparentemente, as soluções produzidas utilizando  $T_1 = 0$  apresentaram pequeno ganho em relação às soluções produzidas utilizando  $T_1 = 100$  e  $T_1 = 1000$ , sendo que as reconstruções com  $T_1 = 1000$  mostraram-se levemente mais homogêneas se comparadas às reconstruções obtidas com  $T_1 = 100$ . Em relação à forma das reconstruções, visualmente as reconstruções com  $T_1 = 100$  representaram com mais acurácia o formato das regiões em comparação as reconstruções com  $T_1 = 1000$  e  $T_1 = 0$ , principalmente para a solução da Figura 15. Quanto à posição e ao tamanho das diferentes regiões do domínio, as reconstruções repre-

sentaram de forma equivalente essas duas propriedades. Em relação ao custo computacional, o aumento do parâmetro  $T_1$  aumentou o número de iterações necessárias para satisfazer o critério de parada. Considerando o domínio da Figura 16, as reconstruções com  $T_1 = 0$ , como já referido, satisfizeram o critério de parada com 423 906 iterações. Para  $T_1 = 1000$ , foram necessárias 476021 iterações para satisfazer o critério de parada, enquanto que para  $T_1 = 1000$  foram necessários 538995 iterações para satisfazer este mesmo critério.

Também foram realizados testes para o padrão adjacente de injeção de corrente. Para esses testes, foram reconstruídos os domínios representados nas Figuras 15 e 16, utilizando os mesmos critérios de parada das simulações anteriores e o valor de  $T_1 = 0$  para o valor do parâmetro de temperatura na primeira iteração. Todas as reconstruções realizadas são apresentadas a seguir, organizadas na Figura 44.

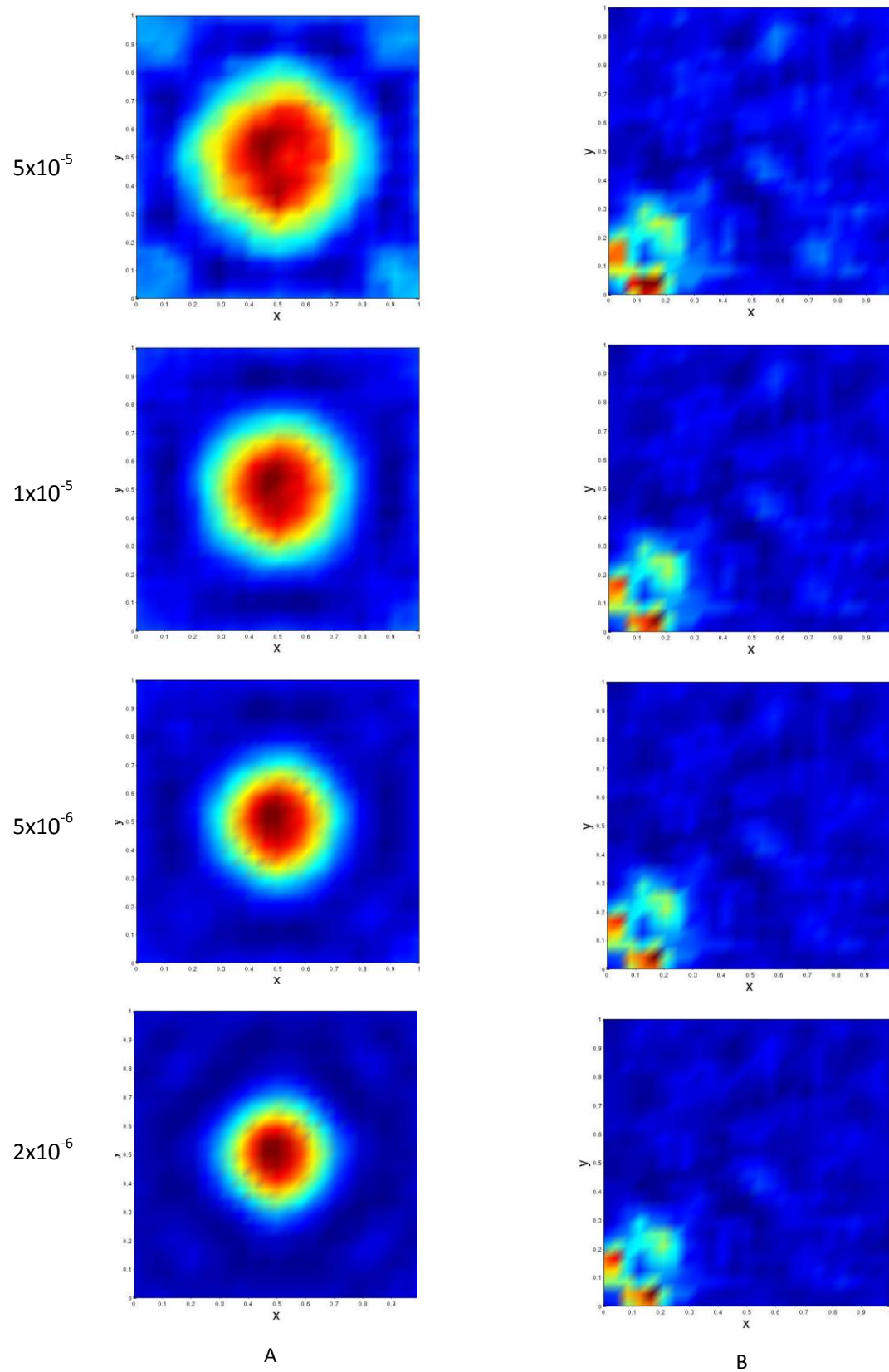


Figura 43: soluções do problema inverso utilizando o padrão adjacente de injeção de corrente. A) Para um domínio com distribuição de condutividade igual à da Figura 15. B) Para um domínio com distribuição de condutividade igual à da Figura 16.

As reconstruções utilizando o padrão adjacente de injeção de corrente, em comparação ao padrão diametral, mostraram-se mais acuradas. Isso pode ser mais bem observado ao serem postas lado a lado, as reconstruções para os diferentes padrões de injeção empregados. Considerando os domínios representados nas Figuras 15 e 16, os resultados das reconstruções para diferentes padrões de injeção de corrente, para o critério de parada de  $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p)<sup>2</sup>, foram organizados nas Figura 45 e 46, expostas a seguir, conjuntamente com a representação das distribuições de condutividade dos domínios reconstruídos.

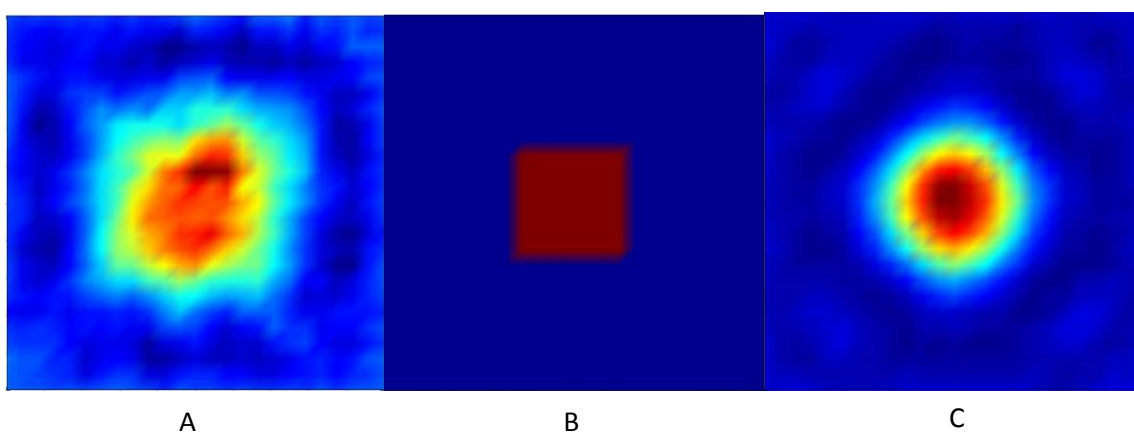


Figura 44: Soluções obtidas para dois diferentes padrões de injeção de corrente, com critério de parada de  $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p)<sup>2</sup>, e representação da distribuição de condutividade do domínio (Figura 15). A) reconstrução utilizando o padrão diametral de injeção de corrente; B) distribuição de condutividade do domínio; C) reconstrução utilizando o padrão adjacente

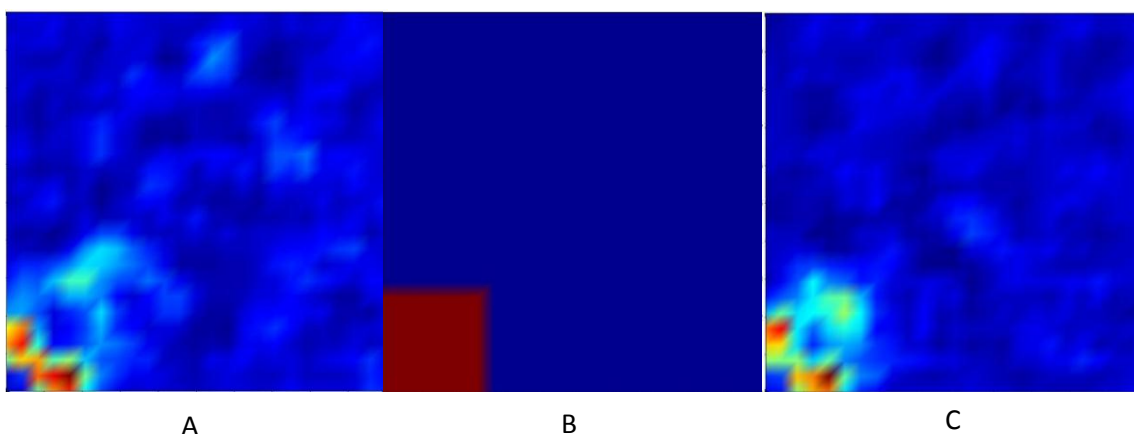


Figura 45: Soluções obtidas para dois diferentes padrões de injeção de corrente, com critério de parada de  $2 \times 10^{-6}$  (u.m.p)<sup>2</sup>, e representação da distribuição de condutividade do domínio reconstruído (Figura 16). A) reconstrução utilizando o padrão diametral de injeção de corrente; B) distribuição de condutividade do domínio; C) reconstrução utilizando o padrão adjacente

Em relação à homogeneidade, ao formato e ao tamanho das duas diferentes regiões dos domínios reconstruídos, como pode ser observado nas Figuras 45 e 46, o padrão adjacente de injeção de corrente, numa análise qualitativa, apresentou resultados consideravelmente superiores para a solução do problema inverso da TIE, quando comparado ao padrão diametral de injeção de corrente. Isso, possivelmente, ocorre devido ao maior número de medidas independentes obtidas utilizando o padrão adjacente em relação ao padrão diametral. Por outro lado, para satisfazer o critério de parada, considerando as reconstruções do domínio com distribuição de condutividade representada na Figura 16, foram necessárias 6 532 451 iterações para satisfazer o critério de parada utilizando o padrão adjacente, cerca de 15 vezes mais iterações em comparação às reconstruções utilizando o padrão diametral. Além disso, para cada iteração, são necessárias 4 soluções do problema direto a mais para o padrão adjacente em relação ao padrão diametral. Isso mostra que o padrão adjacente é muito mais preciso e, ao mesmo tempo, dispendioso do ponto de vista computacional, em comparação ao padrão diametral.

## 6. CONCLUSÃO

Neste trabalho, o problema de reconstrução de imagens de Tomografia de Impedância Elétrica foi estudado numericamente. Esse estudo foi realizado de forma separada, em duas partes. Na primeira, o problema direto da TIE foi abordado e, na segunda, o problema inverso. Os dois problemas estão intimamente relacionados, porque para a solução do problema inverso, geralmente é necessário resolver o problema direto diversas vezes. Sendo assim, a solução do problema direto deve possuir duas características essenciais: precisão e velocidade.

A precisão das soluções do problema direto está relacionada ao aumento também na precisão das soluções do problema inverso, ao passo que a velocidade pode estar ligada tanto à precisão quanto à velocidade para obtenção das reconstruções. Necessitando avaliar estas características, o estudo do problema direto da TIE, neste trabalho, iniciou pela abordagem de problemas numéricos semelhantes, os quais envolvem a discretização da equação de Laplace com CCs de Neumann e/ou de Dirichlet. A solução desses PVCs permitiu a comparação de duas aproximações numéricas, através da utilização de parâmetros como exatidão e velocidade de convergência. Uma das aproximações utilizou os esquemas por diferenças finitas apresentados na Tabela 2, conjuntamente a um esquema com estêncil de nove pontos para o laplaciano, representado pela equação (12). A outra aproximação empregou em conjunto, os esquemas expostos na Tabela 1 e um esquema para o Laplaciano com estêncil de cinco pontos, representado pela equação (11).

O cálculo do erro relativo entre a solução analítica e a numérica, das soluções dos PVCs, permitiu avaliar a acurácia das aproximações numéricas. Os resultados mostraram que o conjunto formado pelo esquema de nove pontos para o laplaciano com as aproximações da Tabela 2, é muito mais acurado se



comparados ao outro esquema por diferenças finitas utilizado, para PVCs com CCs de Neumann. Em relação à velocidade para obtenção das soluções, os dois esquemas mostraram-se equivalentes.

Utilizando as mesmas aproximações por diferenças finitas, o problema direto da TIE foi solucionado para domínios com distribuição de condutividade homogênea. O comportamento das soluções foi avaliado através da comparação visual entre elas e, principalmente, através da comparação do comportamento do potencial calculado para cada aproximação no contorno, especificamente na região dos eletrodos de injeção, para todos os tamanhos de matriz utilizados. Esta avaliação, posteriormente, serviu para avaliar as aproximações propostas para domínio com distribuição de condutividade heterogênea.

O problema direto da TIE envolve a solução da equação (1), com as CCs representadas pela expressão (4). Para solução dessa equação, foram utilizadas três diferentes aproximações por diferenças finitas, duas com estêncil de cinco pontos e uma com estêncil de nove pontos. Das aproximações de cinco pontos, uma delas foi extraída da literatura (equação (30)) e a outra foi deduzida pelo autor (equação (29)). Quanto à aproximação de nove pontos (equação (34)), esta foi proposta pelo autor, utilizando a equação (12) e a equação (33). As soluções foram obtidas utilizando as aproximações (29) e (30) (separadamente) em conjunto com as aproximações da Tabela 1 e a equação (34) em conjunto com as aproximações da Tabela 2.

Dos esquemas por diferenças finitas testados, a aproximação (29) foi aquela com resultados menos promissores. Em relação à precisão, ela é equivalente à aproximação (30), por outro lado, apresentou diversos problemas de convergência, diferentemente das outras duas aproximações.

A aproximação (30) exibiu bons resultados em relação à convergência, convergindo para todas as distribuições de condutividade testadas. No entanto, considerando os resultados obtidos para os PVCs e para domínios com distribuição de condutividade homogênea, ela é aparentemente menos precisa em comparação ao esquema que utiliza a equação (34).

Os dados obtidos permitem concluir que, utilizando uma das aproximações proposta pelo autor, a aproximação (34), é possível resolver o problema direto com malhas menores mantendo ou melhorando a precisão e a velocidade de convergência das soluções, quando estas soluções são comparadas às soluções produzidas, empregando as demais equações testadas neste trabalho. Sendo assim, a equação (34) é a mais indicada para aproximar a solução do problema direto da TIE, em malhas retangulares, utilizando o MDF.

Quanto ao problema inverso, para sua solução, foi utilizado o método do recozimento simulado. Este é um método numérico de ensaios aleatórios, desenvolvido a partir de uma analogia com o processo de recozimento térmico dos sólidos. Este método foi escolhido e utilizado para obter a solução do problema inverso, porque não necessita de boas aproximações iniciais para atingir mínimos globais.

Além de um método de minimização, para chegar à solução do problema inverso da TIE, também é necessário adicionar informação extra ao problema, processo esse chamado de regularização. Neste trabalho, duas diferentes etapas foram propostas para fazer a regularização do problema inverso. Na primeira, a matriz de números aleatórios passa por um processo de filtragem de baixas frequências, por meio da utilização de um filtro gaussiano. Na segunda, cada termo da matriz de números aleatórios, após a filtragem, é multiplicado pelos termos correspondentes da matriz de condutividade na iteração anterior.

A avaliação das soluções do problema inverso foi realizada por meio de uma análise qualitativa (visual) de parâmetros relacionados à qualidade das reconstruções, como homogeneidade, forma e posição das diferentes regiões dos domínios reconstruídos. Quanto ao tempo necessário para satisfazer o critério de parada, ele foi obtido através do número de iterações necessárias para produzir a solução.

Basicamente, foram realizados testes para avaliar a variação na qualidade e no tempo necessário para obter as reconstruções, devido a alterações dos valores do parâmetro  $T_1$ . Também foram averiguadas as diferenças entre

as reconstruções realizadas, para diferentes padrões de injeção de corrente e processos de regularização.

A análise das reconstruções mostrou que utilizando a regularização proposta, o problema inverso da TIE pode ser resolvido por meio do método de recozimento simulado.

Os testes realizados para diferentes valores do parâmetro  $T_1$  sugerem a não correlação desse parâmetro com a qualidade das reconstruções. Sendo assim, por ter apresentado menor custo computacional, esse parâmetro deveria assumir valor nulo durante o processo de reconstrução. No entanto, mais testes devem ser realizados, com diferentes valores iniciais de condutividade, para melhor avaliar o impacto do parâmetro  $T_1$  sobre as reconstruções.

Quanto aos diferentes padrões de injeção de corrente, o padrão adjacente, numa análise visual qualitativa das reconstruções, mostrou-se melhor em comparação ao padrão diametral, em relação à qualidade das soluções do problema inverso produzidas. No entanto, do ponto de vista computacional, o padrão adjacente é muito mais dispendioso em relação ao padrão diametral.

Em uma possível sequência deste trabalho, será necessário confrontar os dados numéricos com dados experimentais para o problema direto. Além disso, para o problema inverso, devem ser investigados métodos quantitativos para análise da qualidade das reconstruções. Outro problema interessante a ser abordado, seria a construção de algoritmos para a solução do problema da TIE nas três dimensões espaciais e em tempo real, dando origem a uma tomografia tridimensional em tempo real.

Alguns capítulos deste trabalho foram divididos em duas partes, cada qual abordando um dos dois problemas relacionados ao problema de reconstrução de imagens da TIE. Por outro lado, apesar da separação, os dois problemas formam uma unidade, sendo que essa unidade e não as partes de forma individual é que deve ser analisada. Por isso, a conclusão deste trabalho é um julgamento sobre todos os métodos desenvolvidos ou utilizados durante a sua execução. Sendo assim, é possível afirmar que o conjunto de algoritmos

desenvolvidos, para domínios de formato retangular ou quadrado, pode resolver o problema de reconstrução de imagens da TIE.

## REFERÊNCIAS

ADAMS, L. M.; LEVEQUE, R. J.; & YOUNG, D. M., **Analysis of the SOR iteration for the 9-point Laplacian**, SIAM J. Numer. Anal., 25 (1988), pp. 1156–1180.

AGUILAR, Juan Carlos Zavaleta. **Estudos Numéricos para o Problema da Tomografia por Impedância Elétrica**. São Paulo: USP, 2009. 119 pág. Tese (Doutorado), Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Brasil.

BARTOLO, Leandro DI, **Modelagem Sísmica Anisotrópica Através do Método das Diferenças Finitas Utilizando Sistemas de Equações em Segunda Ordem**. Rio de Janeiro: UFRJ. 2010. 220 pág. Tese (Doutorado), Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da UFRJ, Brasil.

BEVILACQUA, Joyce da Silva; **Backprojection: Algoritmo para Reconstrução de Imagem Médica**. Modelagem em Biomatemática. São Carlos/SP, 2003, Pág. 1-25.

CARNAHAN B.; LUTHER H.A.; and WILKES J. O.: **Applied Numerical Methods**, wiley, N.Y., 1969.

CEZARO, Adriano De. **Métodos de Regularização Tipo Level Set para Problemas Inversos**. Florianópolis: UFSC. 2006. 52 pág. Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil.

CHENEY, M.; ISAACSON, D.; NEWELL, J. C.; SIMAKE, S. & GOBLE, J.: **NOSER: An algorithm for solving the inverse conductivity problem**, Int J Imag Sys Technol, vol. 2, pp. 66–75, 1990.

CHENG, K.; CHEN, B. Simulated annealing and genetic algorithms based methods for impedance image reconstruction. **2<sup>nd</sup> int. Conference on Bioelectromagnetism**. [S.l.: s.n], 1998, p. 97-98.

CUNHA, Maria Cristina de Castro. **Métodos Numéricos**. 2<sup>a</sup> ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2003. 276p.

FILHO, Athail Rangel Paulino, **Diferenças Finitas para Malhas Arbitrárias (Via Série de Taylor)**. Campinas: UNICAMP. 1989. 66 pág. Tese (Mestrado), Faculdade de engenharia de Campinas, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Brasil.

HAYKIN, Simon. **Redes neurais: princípios e prática**. 2<sup>a</sup> ed. Porto Alegre: Artmed Editora S.A, 1999. 900p.

HERRERA, Claudia Natália Lara. **Algoritmo de Tomografia por Impedância Elétrica Baseado em Simulated Annealing**. São Paulo: USP. 2007. 59 Pág. Dissertação (Mestre), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Brasil.

KIRKPATRICK, S., GELATT, C., VECCHI, M.: **Optimization by simulated annealing**. Science 220, 671 (1983)

KIM, H. C.; BOO, C. J.; & LEE, Y. J.; **Image reconstruction using simulated annealing algorithm in EIT**, Int. J. Control, Autom. Syst., vol.3, no. 2, pp. 211–216, 2005.

KIM, Y. J. & LEE, M.G., **Electrical impedance tomography on a resistive network with internal currents**. [acesso em: 06 de Setembro de 2011]. Disponível em: <http://amath.kaist.ac.kr/papers/Kim/18.pdf>

KUO, C. J. & LEVY, B. C., **Mode-dependent Finite-difference Discretization of Linear Homogeneous Differential Equations**, SIAM J. Sci. and Stat. Comput. 9 (1987), pp. 992-1015 (24 pages).

LIMA, Cícero Ribeiro de. **Estudo da Obtenção de Imagens de Tomografia por Impedância Elétrica do Pulmão pelo Método de Otimização Topológica**. São Paulo: USP. 2006. 188 Pág. Tese (Doutorado), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Brasil.

MENIN, Olavo Henrique. **Método dos Elementos de Contorno para Tomografia de Impedância Elétrica**. Ribeirão Preto: USP, 2009. 71 pág. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina, Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, Brasil.

**Numerical Solution of Partial Differential Equations - Wolfram Mathematica 8 Documentation**. [acesso em: 23 de Julho de 2011]. Disponível em: <http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/NDSolvePDE.html>.

OLMI, R., BINI, M., PRIORI, S.: **A Genetic Algorithm Approach to Image Reconstruction in Electrical Impedance Tomography**. IEEE Trans. On Evolutionary Comput. . 4 (2000) 83-87

SILVA NETO, G. C.; VALDA, L. H. C.; LOPES, A. P.. **O Método das Diferenças Finitas aplicado a problemas de Transferência de Calor em Regime Transiente**. In: XXX Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2009, Armação dos Búzios-RJ. CILAMCE. Rio de Janeiro - RJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, 2009. p. 1-14.

SOARES, Gustavo Luís, **Algoritmos Genéticos: Estudo, Novas Técnicas e Aplicações**, Belo Horizonte, UFMG, 1997. 137 pág. Tese (Mestrado), Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Brasil.

TAVARES, Luís Valadares; CORREIA, Francisco Nunes. **Optimização linear e não linear: conceitos, métodos e algoritmos**. 2<sup>a</sup> ed. Lisboa: Editora FCG, 1999. 466p.

TIKHONOV, A. N. & ARSENIN, V.Y., 1977, **Solution of Ill-posed Problems**, John Wiley & Sons.

TRIGO, Flavio Celso. **Estimação Não Linear de Parâmetros Através dos Filtros de Kalman na Tomografia por Impedância Elétrica**. São Paulo: USP. 2005. 204 Pág. Tese (Doutorado), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo Departamento de Engenharia Mecânica, Brasil.

## ANEXO A

### Modelagem matemática.

O problema direto da TIE envolve a determinação da distribuição dos potenciais no interior da região avaliada e a resposta no contorno, supondo conhecida a distribuição da condutividade ou permissividade no interior da região. Para a modelagem matemática desse problema, consideraremos uma superfície  $S$  com distribuição de condutividade dependente apenas das coordenadas de posição,  $\sigma(x,y)$  ou  $\sigma(r,\theta)$  (a escolha das coordenadas de posição vai depender da geometria utilizada), sendo que esta região apresenta características puramente condutivas, como mostra a Figura A.1.

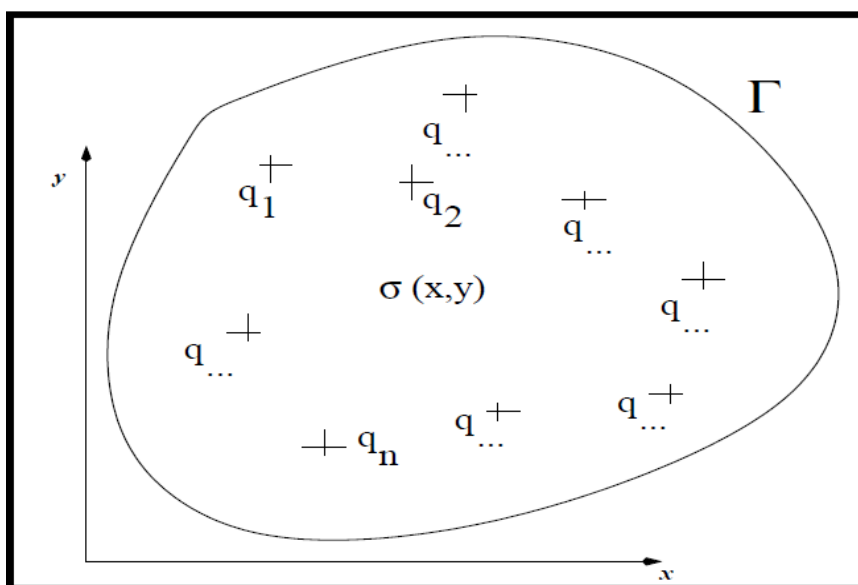


Figura A.1: Representação do domínio a ser analisado. Extraído de: TRIGO, 2006

O campo eletrostático resultante nessa região é descrito pelas equações de Maxwell, que são mostradas em sua forma diferencial a seguir:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (A1)$$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{A2})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{A3})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{A4})$$

Onde:

$\vec{D}$  é o vetor indução elétrica;

$\vec{E}$  é o vetor campo elétrico;

$\vec{B}$  é o vetor campo magnético;

$\vec{H}$  é o vetor intensidade de campo magnético;

$\rho$  é a densidade volumétrica de cargas;

$\vec{J}$  é o vetor densidade de corrente elétrica;

Assumindo que o fenômeno é quase-estático e que a região avaliada é puramente condutiva, as derivadas em relação ao tempo serão igualadas a zero. Portanto a equação (A3) torna-se

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (\text{A5})$$

De (A5) resulta que deve existir uma função potencial, dependente da condutividade cujo gradiente é igual ao vetor campo elétrico  $\vec{E}$ . Assim temos:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}u \quad (\text{A6})$$

Onde  $u$  depende apenas da posição de um determinado ponto, sendo o potencial elétrico nesse ponto.

Sabendo que no interior da região não existem fontes de corrente, temos que o divergente do vetor densidade de corrente  $\vec{J}$  deve ser zero dentro da região, assim:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \tag{A7}$$

Assumindo que o vetor densidade de corrente elétrica é uma função linear do campo elétrico (suposição válida para sólidos e soluções fracamente ionizadas), temos:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{A8}$$

Isolando  $\vec{E}$  em (A8) e substituindo em (A6) temos:

$$\vec{J} = -\sigma \vec{\nabla} u \tag{A9}$$

Substituindo (A9) em (A7) temos:

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} u) \tag{A10}$$

## ANEXO B

A Equação de Laplace modela a condução do calor em um meio homogêneo em um estado estacionário (onde a temperatura não varia com o tempo em todo contorno e no interior da região). Assim, a equação discretizada utilizada para aproximar a solução é igual à equação (8), com a alteração da variável  $u(x,y)$  para  $T(x,y)$ , sendo que esta última representa a temperatura no domínio analisado.

O PVC abordado possui condição de contorno de Dirichlet e é o seguinte:

“Um quadrado de lado  $l=1$ , com temperaturas nas bordas iguais a  $T=75^{\circ}\text{C}$ , para  $x=0$  e  $0<y<l$ ;  $T=100^{\circ}\text{C}$ , para  $x=l$  e  $0<y<l$ ;  $T=50^{\circ}\text{C}$ , para  $y=0$  e  $0<x<l$ ; e  $T=0^{\circ}\text{C}$ , para  $y=l$  e  $0<x<l$ . Inferir as temperaturas no interior do quadrado.” (MENIN, 2009)

Para solução do problema, foi escolhida uma malha interna com nove pontos, nos quais a temperatura  $T$  foi calculada. O domínio discretizado do problema tem o aspecto representado na Figura 4, mostrada a seguir.

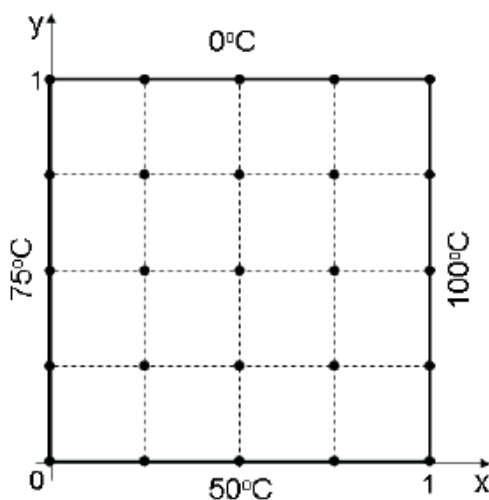


Figura B.1: Domínio quadrado discretizado pelo MDF. Extraído de: MENIN, 2009

Assim, para  $i=1$  e  $j=1, 2, 3$ , temos as seguintes equações:

$$T_{0,1} + T_{2,1} + T_{1,0} + T_{1,2} - 4T_{1,1} = 0 \text{ para } i=1 \text{ e } j=1;$$

$$T_{0,2} + T_{2,2} + T_{1,1} + T_{1,3} - 4T_{1,2} = 0 \text{ para } i=1 \text{ e } j=2;$$

$$T_{0,3} + T_{2,3} + T_{1,2} + T_{1,4} - 4T_{1,3} = 0 \text{ para } i=1 \text{ e } j=3;$$

Para  $i=2$  e  $j=1, 2, 3$ , temos as seguintes equações:

$$T_{1,1} + T_{3,1} + T_{2,0} + T_{2,2} - 4T_{2,1} = 0 \text{ para } i=2 \text{ e } j=1;$$

$$T_{1,2} + T_{3,2} + T_{2,1} + T_{2,3} - 4T_{2,2} = 0 \text{ para } i=2 \text{ e } j=2;$$

$$T_{1,3} + T_{3,3} + T_{2,2} + T_{2,4} - 4T_{2,3} = 0 \text{ para } i=2 \text{ e } j=3;$$

Para  $i=3$  e  $j=1, 2, 3$ , temos as seguintes equações:

$$T_{2,1} + T_{4,1} + T_{3,0} + T_{3,2} - 4T_{3,1} = 0 \text{ para } i=3 \text{ e } j=1;$$

$$T_{2,2} + T_{4,2} + T_{3,1} + T_{3,3} - 4T_{3,2} = 0 \text{ para } i=3 \text{ e } j=2;$$

$$T_{2,3} + T_{4,3} + T_{3,2} + T_{3,4} - 4T_{3,3} = 0 \text{ para } i=3 \text{ e } j=3;$$

Adicionando as CC:

Para  $i=0$  e  $j=1, 2, 3$   $T=75^\circ\text{C}$ ;

Para  $i=4$  e  $j=1,2,3$   $T=100^\circ\text{C}$

Para  $i=1,2$  e  $3$  e  $j=0$   $T=50^\circ\text{C}$

Para  $i=1,2$  e  $3$  e  $j=4$   $T=0^\circ\text{C}$

Assim sendo, as temperaturas  $T_{0,1} = T_{0,2} = T_{0,3} = 75^\circ\text{C}$ ; as temperaturas

$T_{4,1} = T_{4,2} = T_{4,3} = 100^\circ\text{C}$ ;  $T_{1,0} = T_{2,0} = T_{3,0} = 100^\circ\text{C}$  e  $T_{1,4} = T_{2,4} = T_{3,4} = 0^\circ\text{C}$ .

Substituindo nas equações acima, ficamos com:

$$T_{2,1} + T_{1,2} - 4T_{1,1} = -125 \text{ para } i=1 \text{ e } j=1;$$

$$T_{2,2} + T_{1,1} + T_{1,3} - 4T_{1,2} = -75 \text{ para } i=1 \text{ e } j=2;$$

$$T_{2,3} + T_{1,2} - 4T_{1,3} = -75 \text{ para } i=1 \text{ e } j=3;$$

$$T_{1,1} + T_{3,1} + T_{2,2} - 4T_{2,1} = 50 \text{ para } i=2 \text{ e } j=1;$$

$$T_{1,2} + T_{3,2} + T_{2,1} + T_{2,3} - 4T_{2,2} = 0 \text{ para } i=2 \text{ e } j=2;$$

$$T_{1,3} + T_{3,3} + T_{2,2} - 4T_{2,3} = 0 \text{ para } i=2 \text{ e } j=3;$$

$$T_{2,1} + T_{3,2} - 4T_{3,1} = -150 \text{ para } i=3 \text{ e } j=1;$$

$$T_{2,2} + T_{3,1} + T_{3,3} - 4T_{3,2} = -100 \text{ para } i=3 \text{ e } j=2;$$

$$T_{2,3} + T_{3,2} - 4T_{3,3} = -100 \text{ para } i=3 \text{ e } j=3;$$

Fazendo as seguintes trocas de variáveis:

$$T_{11}=T_1$$

$$T_{12}=T_2$$

$$T_{13}=T_3$$

$$T_{21}=T_4$$

$$T_{22}=T_5$$

$$T_{23}=T_6$$

$$T_{31}=T_7$$

$$T_{32}=T_8$$

$$T_{33}=T_9$$

As equações acima podem ser representadas na forma matricial do tipo  $A.X=B$ . Onde  $A$  é uma matriz quadrada  $n \times n$  e  $X$  e  $B$  são matrizes do tipo  $n \times 1$ .

$$\text{Matriz A: } A_{9,9} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Matriz  $X$ :

$$X_{9 \times 1} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{pmatrix}$$

Matriz  $B$ :

$$B_{9 \times 1} = \begin{pmatrix} -125 \\ -75 \\ -75 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \\ -150 \\ -150 \\ -150 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -125 \\ -75 \\ -75 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \\ -150 \\ -150 \\ -150 \end{pmatrix}$$

A solução desse sistema de equações foi realizada utilizando o método de eliminação de Gauss<sup>10</sup> e é apresentada a seguir, na Tabela B.1.

<sup>10</sup> Eliminação de Gauss é um método utilizado para resolver sistemas lineares, transformando o sistema original em um equivalente simplificado de mesma solução. Para esta modificação aplica-se sobre as equações do sistema  $A \cdot X = B$  uma seqüência de operações elementares escolhidas entre: i) substituir duas equações; ii) multiplicar uma equação por uma constante não-nula; iii) adicionar um múltiplo de uma equação a outra equação.

Tabela B.1: Distribuição das temperaturas calculada pelo MDF

	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	
<b>75,00</b>	<b>42,86</b>	<b>37,72</b>	<b>51,79</b>	<b>100,00</b>
<b>75,00</b>	<b>58,71</b>	<b>56,25</b>	<b>69,42</b>	<b>100,00</b>
<b>75,00</b>	<b>60,71</b>	<b>59,15</b>	<b>69,64</b>	<b>100,00</b>
	<b>50,00</b>	<b>50,00</b>	<b>50,00</b>	

Para comparação, abaixo são apresentados os valores calculados para o mesmo problema, pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC) (Figura B.3) e pelo MDF com a solução do sistema linear sendo realizada pelo método de Gauss-Seidel (Figura B.2)

	0,00	0,00	0,00	
75,00	42,85	37,72	51,78	100,0
75,00	58,70	56,24	69,41	100,0
75,00	60,71	59,15	69,64	100,0
	50,00	50,00	50,00	

Figura B.2: Distribuição das temperaturas calculada pelo MDF, com solução do sistema linear sendo realizada através do método de Gauss-Seidel. Extraído de: MENIN, 2009

	0,00	0,00	0,00	
75,00	42,58	36,46	51,69	100,0
75,00	59,28	56,25	70,45	100,0
75,00	60,81	58,81	69,92	100,0
	50,00	50,00	50,00	

Figura B.3: Distribuição das temperaturas calculada pelo MEC. Extraído de: MENIN, 2009

## ANEXO C

Para o lado L1, considerando o potencial  $u$  e a equação (19) com um ângulo de  $180^\circ$ , é obtida a seguinte discretização:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(180^\circ)\vec{i} + \text{sen}(180^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{2\Delta x} \vec{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{2\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{3u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{2\Delta x} = 0$$

Isolando  $u_{i,j}$ , temos:

$$u_{i,j} \approx \frac{4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{3}$$

Para o lado L2, considerando a equação (19) com um ângulo de  $270^\circ$ , é obtida a seguinte discretização:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(270^\circ)\vec{i} + \text{sen}(270^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{2\Delta x} \vec{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{2\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{2\Delta y} = 0$$

Isolando  $u_{i,j}$ , ficamos com:

$$u_{i,j} \approx \frac{4u_{i,j+1} - u_{i,j+2}}{3}$$

Para o lado L3, considerando a equação (18) com um ângulo de  $0^\circ$ , é obtida a seguinte discretização:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(0^\circ)\vec{i} + \text{sen}(0^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2\Delta x} \vec{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{2\Delta y} \vec{j} \right)$$



$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2\Delta x} = 0$$

Isolando  $u_{i,j}$ , chegamos a:

$$u_{i,j} \approx \frac{4u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{3}$$

Para o lado L4, considerando a equação (18) com um ângulo de  $90^\circ$ , é obtida a seguinte discretização:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(90^\circ)\vec{i} + \sin(90^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2\Delta x} \vec{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{2\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{2\Delta y} = 0$$

Isolando  $u_{i,j}$ , obtemos

$$u_{i,j} \approx \frac{4u_{i,j-1} - u_{i,j-2}}{3}$$

Nos eletrodos foi considerado o valor da densidade superficial de corrente  $J$ , definida como a razão entre o valor nominal da corrente e a área superficial do eletrodo.

Fazendo a discretização por diferenças finitas e igualando o termo à esquerda da expressão (19) ao termo a direita da expressão (18), para L1, L2, L3 e L4, são obtidas as seguintes expressões, utilizadas para as regiões onde estão presentes os eletrodos:

Para L1:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(180^\circ)\vec{i} + \sin(180^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{2\Delta x} \vec{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{2\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx - \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{2\Delta x} \right) = - \frac{i}{A\sigma_0}$$

Isolando  $u_{i,j}$ , chegamos a:

$$u_{i,j} = \frac{4.u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{3} - \frac{2.\Delta x.i}{3.\sigma_0.A}$$

Para L2:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(270^\circ)\vec{i} + \sin(270^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{2\Delta x} \vec{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{2\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx - \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{2\Delta y} \right) = - \frac{i}{A\sigma_0}$$

Isolando  $u_{i,j}$ , temos:

$$u_{i,j} = \frac{4.u_{i,j+1} - u_{i,j+2}}{3} - \frac{2.\Delta y.i}{3.\sigma_0.A}$$

Para L3:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(0^\circ)\vec{i} + \sin(0^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2\Delta x} \vec{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{2\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2\Delta x} = \frac{i}{A\sigma_0}$$

Isolando  $u_{i,j}$ , ficamos com:

$$u_{i,j} = \frac{4.u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{3} - \frac{2.\Delta x.i}{3.\sigma_0.A}$$

Para L4:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(90^\circ)\vec{i} + \sin(90^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2\Delta x} \vec{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{2\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{2\Delta y} = 0$$

Isolando  $u_{i,j}$ , chegamos a:

$$u_{i,j} = \frac{4.u_{i,j-1} - u_{i,j-2}}{3} - \frac{2.\Delta y.i}{3.\sigma_0.A}$$

Para o lado L1, considerando o potencial  $u$  e a equação (23) com um ângulo de  $180^\circ$ , é obtida a seguinte discretização:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(180^\circ)\vec{i} + \text{sen}(180^\circ)\vec{j}] \cdot \left[ \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i+1,j} + 450u_{i+2,j} - 400u_{i+3,j} + 225u_{i+4,j} - 72u_{i+5,j} + 10u_{i+6,j})\vec{i}}{60\Delta x} + \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j+1} + 450u_{i,j+2} - 400u_{i,j+3} + 225u_{i,j+4} - 72u_{i,j+5} + 10u_{i,j+6})\vec{j}}{60\Delta y} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i+1,j} + 450u_{i+2,j} - 400u_{i+3,j} + 225u_{i+4,j} - 72u_{i+5,j} + 10u_{i+6,j})}{60\Delta y} = 0$$

Isolando  $u_{i,j}$ , temos:

$$u_{i,j} = \frac{(360.u_{i+1,j} - 450.u_{i+2,j} + 400.u_{i+3,j} - 225.u_{i+4,j} + 72.u_{i+5,j} - 10.u_{i+6,j})}{147}$$

Para o lado L2, considerando o potencial  $u$  e a equação (23) com um ângulo de  $270^\circ$ , é obtida a seguinte discretização:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(270^\circ)\vec{i} + \text{sen}(270^\circ)\vec{j}] \cdot \left[ \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i+1,j} + 450u_{i+2,j} - 400u_{i+3,j} + 225u_{i+4,j} - 72u_{i+5,j} + 10u_{i+6,j})\vec{i}}{60\Delta x} + \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j+1} + 450u_{i,j+2} - 400u_{i,j+3} + 225u_{i,j+4} - 72u_{i,j+5} + 10u_{i,j+6})\vec{j}}{60\Delta y} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j+1} + 450u_{i,j+2} - 400u_{i,j+3} + 225u_{i,j+4} - 72u_{i,j+5} + 10u_{i,j+6})}{60\Delta y} = 0$$

Isolando  $u_{i,j}$ , temos:

$$u_{i,j} = \frac{(360.u_{i,j+1} - 450.u_{i,j+2} + 400.u_{i,j+3} - 225.u_{i,j+4} + 72.u_{i,j+5} - 10.u_{i,j+6})}{147}$$

Para o lado L3, considerando o potencial  $u$  e a equação (22) com um ângulo de  $0^\circ$ , é obtida a seguinte discretização:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(90^\circ)\vec{i} + \sin(90^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i-1,j} + 450u_{i-2,j} - 400u_{i-3,j} + 225u_{i-4,j} - 72u_{i-5,j} + 10u_{i-6,j})}{60\Delta x} \vec{i} + \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j-1} + 450u_{i,j-2} - 400u_{i,j-3} + 225u_{i,j-4} - 72u_{i,j-5} + 10u_{i,j-6})}{60\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i-1,j} + 450u_{i-2,j} - 400u_{i-3,j} + 225u_{i-4,j} - 72u_{i-5,j} + 10u_{i-6,j})}{60\Delta y} = 0$$

Isolando  $u_{i,j}$ , temos,

$$u_{i,j} = \frac{(360u_{i,j-1} - 450u_{i,j-2} + 400u_{i,j-3} - 225u_{i,j-4} + 72u_{i,j-5} - 10u_{i,j-6})}{147}$$

Para o lado L4, considerando o potencial  $u$  e a equação (22) com um ângulo de  $90^\circ$ , é obtida a seguinte discretização:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(90^\circ)\vec{i} + \sin(90^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i-1,j} + 450u_{i-2,j} - 400u_{i-3,j} + 225u_{i-4,j} - 72u_{i-5,j} + 10u_{i-6,j})}{60\Delta x} \vec{i} + \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j-1} + 450u_{i,j-2} - 400u_{i,j-3} + 225u_{i,j-4} - 72u_{i,j-5} + 10u_{i,j-6})}{60\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j-1} + 450u_{i,j-2} - 400u_{i,j-3} + 225u_{i,j-4} - 72u_{i,j-5} + 10u_{i,j-6})}{60\Delta y} = 0$$

Isolando  $u_{i,j}$ , temos:

$$u_{i,j} = \frac{(360u_{i-1,j} - 450u_{i-2,j} + 400u_{i-3,j} - 225u_{i-4,j} + 72u_{i-5,j} - 10u_{i-6,j})}{147}$$

Em relação a região com eletrodo, para o lado L1, considerando o potencial  $u$  e a equação (23) com um ângulo de  $180^\circ$ , é obtida a seguinte discretização:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(180^\circ)\vec{i} + \sin(180^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i+1,j} + 450u_{i+2,j} - 400u_{i+3,j} + 225u_{i+4,j} - 72u_{i+5,j} + 10u_{i+6,j})}{60\Delta x} \vec{i} + \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j+1} + 450u_{i,j+2} - 400u_{i,j+3} + 225u_{i,j+4} - 72u_{i,j+5} + 10u_{i,j+6})}{60\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx - \left[ \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i+1,j} + 450u_{i+2,j} - 400u_{i+3,j} + 225u_{i+4,j} - 72u_{i+5,j} + 10u_{i+6,j})}{60\Delta y} \right] = - \frac{i}{A\sigma_0}$$

Isolando  $u_{i,j}$ , chegamos a:

$$u_{i,j} = \frac{(360.u_{i+1,j} - 450.u_{i+2,j} + 400.u_{i+3,j} - 225.u_{i+4,j} + 72.u_{i+5,j} - 10.u_{i+6,j})}{147} - \frac{60.\Delta x.i}{147.\sigma_0.A}$$

Para o lado L2, considerando o potencial  $u$  e a equação (23) com um ângulo de  $270^\circ$ , é obtida a seguinte discretização:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(270^\circ)\vec{i} + \text{sen}(270^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i+1,j} + 450u_{i+2,j} - 400u_{i+3,j} + 225u_{i+4,j} - 72u_{i+5,j} + 10u_{i+6,j})}{60\Delta x} \vec{i} + \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j+1} + 450u_{i,j+2} - 400u_{i,j+3} + 225u_{i,j+4} - 72u_{i,j+5} + 10u_{i,j+6})}{60\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx - \left[ \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j+1} + 450u_{i,j+2} - 400u_{i,j+3} + 225u_{i,j+4} - 72u_{i,j+5} + 10u_{i,j+6})}{60\Delta y} \right] = - \frac{i}{A\sigma_0}$$

Isolando  $u_{i,j}$ , ficamos com:

$$u_{i,j} = \frac{(360.u_{i,j+1} - 450.u_{i,j+2} + 400.u_{i,j+3} - 225.u_{i,j+4} + 72.u_{i,j+5} - 10.u_{i,j+6})}{147} - \frac{60.\Delta x.i}{147.\sigma_0.A}$$

Para o lado L3, considerando o potencial  $u$  e a equação (22) com um ângulo de  $0^\circ$ , é obtida a seguinte discretização:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(90^\circ)\vec{i} + \text{sen}(90^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i-1,j} + 450u_{i-2,j} - 400u_{i-3,j} + 225u_{i-4,j} - 72u_{i-5,j} + 10u_{i-6,j})}{60\Delta x} \vec{i} + \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j-1} + 450u_{i,j-2} - 400u_{i,j-3} + 225u_{i,j-4} - 72u_{i,j-5} + 10u_{i,j-6})}{60\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i-1,j} + 450u_{i-2,j} - 400u_{i-3,j} + 225u_{i-4,j} - 72u_{i-5,j} + 10u_{i-6,j})}{60\Delta y} = \frac{i}{A\sigma_0}$$

Isolando  $u_{i,j}$ , temos:

$$u_{i,j} = \frac{(360u_{i-1,j} - 450u_{i-2,j} + 400u_{i-3,j} - 225u_{i-4,j} + 72u_{i-5,j} - 10u_{i-6,j})}{147} - \frac{60\Delta x.i}{147\sigma_0.A}$$

Para o lado L4, considerando o potencial  $u$  e a equação (22) com um ângulo de  $90^\circ$ , é obtida a seguinte discretização:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx [\cos(90^\circ)\vec{i} + \sin(90^\circ)\vec{j}] \cdot \left( \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i-1,j} + 450u_{i-2,j} - 400u_{i-3,j} + 225u_{i-4,j} - 72u_{i-5,j} + 10u_{i-6,j})}{60\Delta x} \vec{i} + \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j-1} + 450u_{i,j-2} - 400u_{i,j-3} + 225u_{i,j-4} - 72u_{i,j-5} + 10u_{i,j-6})}{60\Delta y} \vec{j} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j-1} + 450u_{i,j-2} - 400u_{i,j-3} + 225u_{i,j-4} - 72u_{i,j-5} + 10u_{i,j-6})}{60\Delta y} = \frac{i}{A\sigma_0}$$

Isolando  $u_{i,j}$ , chegamos a:

$$u_{i,j} = \frac{(360u_{i,j-1} - 450u_{i,j-2} + 400u_{i,j-3} - 225u_{i,j-4} + 72u_{i,j-5} - 10u_{i,j-6})}{147} - \frac{60\Delta x.i}{147\sigma_0.A}$$

## ANEXO D

O algoritmo iterativo mostrado a seguir foi utilizado para solucionar o problema de condução de calor descrito no anexo B. No entanto, nele estão presentes os elementos básicos para solução de todos os outros problemas abordados nesse trabalho.

O início da aproximação da solução começa ao ser especificado o tamanho da matriz de discretização. Isso é realizado através de dois números, os quais são definidos como mostrado a seguir:

$N=4$ ; (Número de pontos  $(p-1)$  da matriz no eixo  $x$ )

$M=4$ ; (Número de pontos  $(p-1)$  da matriz no eixo  $y$ )

Em seguida é criado o domínio utilizando os seguintes comandos:

*for*  $i=1:N+1$

$xn(i)=(i-1)/N$ ; (define os pontos do domínio no eixo  $x$ )

*end*

*for*  $j=1:M+1$

$yn(j)=(j-1)/M$ ; (define os pontos do domínio no eixo  $y$ )

*end*

Após a definição dos pontos que fazem parte do domínio é iniciado o processo de obtenção da aproximação numérica, que começa ao ser definida pelo número de ciclos, como mostrado a seguir:

*for*  $d=1:5000$

Logo após, são adicionadas as CC:

*for*  $j=1:M+1$

```

un2(1,j)=0;

un2(N+1,j)=50;

end

for i=1:N+1

un2(i,1)=75;

un2(i,M+1)=100;

end

```

Por último, são determinados os valores da variável de interesse nos pontos internos do domínio. A diferença entre o algoritmo iterativo SOR e o algoritmo iterativo de Gauss-Seidel está justamente nessa parte do algoritmo, ou seja, no cálculo do potencial para um ponto do domínio em uma determinada iteração  $k+1$ . Para Gauss-Seidel, o valor da variável de interesse é calculado através dos valores do potencial nos pontos vizinhos. Por sua vez, os valores da matriz de potencial vão sendo atualizadas durante a iteração  $k+1$ . Assim sendo, ao ser aproximado o valor do potencial no ponto  $i,j$  na iteração  $k+1$ , este valor já é utilizado na mesma iteração para aproximar o valor do potencial nos pontos vizinhos a  $i,j$ . No SOR, o potencial para um ponto  $i,j$  do domínio, em uma determinada iteração  $k+1$ , é aproximado através do cálculo da média entre o valor do potencial na iteração anterior  $k$  e o valor calculado utilizando o método de Gauss-Seidel na iteração  $k+1$  (Cunha, 2003). Matematicamente, utilizando o estêncil de cinco pontos em um domínio com condutividade constante, a equação que aproxima o valor do laplaciano do potencial em  $i,j$  para o algoritmo de Gauss-Seidel é a aproximação clássica de cinco pontos por diferenças finitas:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i-1,j}^a + u_{i+1,j}^a + u_{i,j+1}^a + u_{i,j-1}^a}{4}$$

onde  $a$  pode ser igual a  $k$  ou  $k+1$ .



Para o SOR, considerando estêncil de cinco pontos para o laplaciano, a equação é a seguinte:

$$u_{i,j}^{k+1} = (1-w)u_{i,j}^k + w \left( \frac{u_{i-1,j}^a + u_{i+1,j}^a + u_{i,j+1}^a + u_{i,j-1}^a}{4} \right)$$

onde  $w$  é o parâmetro de relaxação e pode assumir valores entre 1 e 2.

Terminando o algoritmo:

*for i=2:N*

*for j=2:M*

*%utilizando estêncil de 5 pontos e o método de Gauss-Seidel*

*un2(i,j)=(un2(i+1,j)/4+un2(i-1,j)/4+un2(i,j+1)/4+un2(i,j-1)/4);*

*%utilizando o estêncil de 5 pontos e o método SOR com w igual 1,95*

*un2(i,j)=-0.95 un2(i,j)+1.95\*((un2(i+1,j)/4+un2(i-1,j)/4+un2(i,j+1)/4+un2(i,j-1)/4);*

*end*

*end*

*end*

O resultado obtido por este algoritmo, para a aproximação da solução do PVC descrito no Anexo B, é o mesmo utilizando o SOR ou Gauss-Seidel e pode ser visto na Tabela D.1 apresentada abaixo:

**Tabela D.1:** Distribuição de temperatura calculada pelo algoritmo apresentado, para aproximação da solução do PVC apresentado no anexo B.

	0,00	0,00	0,00	
75,00	42,86	37,72	51,79	100,00
75,00	58,71	56,25	69,42	100,00
75,00	60,71	59,15	69,64	100,00
	50,00	50,00	50,00	