

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

RENATA BRITO PEREIRA

**ANÁLISE DE ERROS E SUPERAÇÃO DE DIFICULDADES MATEMÁTICAS POR
MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL**

PORTO ALEGRE
2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

RENATA BRITO PEREIRA

**ANÁLISE DE ERROS E SUPERAÇÃO DE DIFICULDADES MATEMÁTICAS POR
MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Salett Biembengut

PORTO ALEGRE
2011

AGRADECIMENTOS

Existem situações na vida em que é fundamental poder contar com o apoio e a ajuda de algumas pessoas. Para a realização desta dissertação de mestrado, pude contar com várias: E a essas pessoas prestarei, por meio de poucas palavras, os mais sinceros agradecimentos:

Agradeço a professora orientadora, Dra. Maria Salett Biembengut, que me oportunizou os seus ensinamentos. A sua paciência, a sua dedicação. Não tenho palavras para agradecê-la, pois é uma pessoa extremamente inteligente e profissional.

Agradeço a minha família, em especial ao meu filho Vinícios; aos meus pais Renaud Amauri e Terezinha, aos meus tios Leonildo e Terezinha, presença constante na atenção no carinho e no apoio estrutural.

Agradeço aos estudantes do 6º ano de uma escola do município de Três Coroas, no Rio Grande do Sul, por terem colaborado, mesmo involuntariamente para o desenvolvimento desta Dissertação; aos pais desses alunos, por terem autorizado a participação dos mesmos; à Diretora Deise e a Vice- diretora Kátia Simone, por terem possibilitado que eu pudesse realizar esta pesquisa. Agradeço a todos os meus colegas professores, que de alguma forma colaboraram para que esta pesquisa se realizasse.

E a todos que, de alguma forma, estiveram envolvidos neste processo.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	5
LISTA DE TABELAS.....	6
1 APRESENTAÇÃO E JUSTIFICATIVA	9
1.2 METODOLOGIA DE PESQUISA	14
1.2.1 Aporte Empírico	14
1.2.2 Aporte Analítico	17
2 APORTES TEÓRICOS.....	18
2.1 ERROS NÃO SÃO SINÔNIMOS DE FRACASSO.....	18
2.1.1 Erros construtivos	23
2.1.2 O Erro na perspectiva Pia Getiana.....	25
2.2 APRENDIZAGEM E DIFICULDADE EM MATEMÁTICA.....	26
2.2.1 Processos e aprendizagem em matemática.....	27
2.2.2 Dificuldades de aprendizagem em matemática	28
2.2.3 Consequências das dificuldades de aprendizagem na sociedade.....	30
2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA DE EDUCAÇÃO	31
2.3.1 Modelo e modelagem matemática.....	32
2.3.2 Modelagem matemática na educação matemática e no ensino aprendido de matemática.....	36
2.3.3 Modelação matemática.....	40
3 APORTE EMPÍRICO.....	42
3.1 DIAGNÓSTICO DAS AVALIAÇÕES PARA A CLASSIFICAÇÃO DOS ERROS .	42
3.1.1 Classificação dos erros das avaliações aplicadas	44
3.1.2 Experiência com o laboratório de matemática para superação de dificuldades.....	53
3.1.3 Experiência com modelação matemática.....	55
3.2 APORTE ANALÍTICO: ANÁLISE DA EXPERIÊNCIA DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA COM A APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE ENSINO ANÁLISE DE ERRO E MODELAGEM MATEMÁTICA.....	59
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES.....	65
REFERÊNCIAS	72
APENDICE I.....	76
APENDICE II.....	77
APENDICE III.....	78

LISTA DE FIGURAS

Figura I: Percentual de acertos e erros da primeira atividade da avaliação.....	46
Figura II: percentual de erros e acertos da atividade dois da avaliação.	47
Figura III: Números de acertos e erros dos problemas de matemática.....	50
Figura IV: Planta baixa de uma casa desenhada por alunos.	61
Figura V: Planta baixa de uma casa desenhada no <i>X-home 3D</i>	63

LISTA DE TABELAS

Tabela I: Resultados das Avaliações SAERGS da Rede estadual, secretaria do Estado do Rio Grande do Sul	9
Tabela II: Números de acertos e erros nas questões da 1ª atividade de multiplicação.....	45
Tabela III: Números de acertos e erros da 2ª atividade, das questões de divisão.....	45
Tabela IV: Número de acertos e erros das 2ª avaliação aplicada.	50
Tabela V: Valores pesquisados.....	58

RESUMO

Esta dissertação descreve o desenvolvimento de métodos de ensino matemático, análise de erros e modelagem matemática, aplicadas em uma turma de 6º ano da escola Frederico Ritter no Município de Três Coroas no Estado do Rio Grande do Sul. Esses métodos de ensino foram aplicados nessa turma com o intuito de identificar, classificar e superar as dificuldades que esses alunos apresentam em aplicar os conceitos de multiplicação e divisão. Para isso adotou-se no estudo bibliográfico desta pesquisa autores que defendem a análise de erro como um método de ensino que classifica o erro, fazendo o estudante identificá-lo, para a superação destes erros baseou-se em autores que defendem a modelação matemática como um método de ensino que torna os problemas do cotidiano em problemas matemáticos. A presente pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa foram aplicadas avaliações objetivas para diagnosticar e classificar os erros cometidos pelos estudantes. A análise dos dados mostrou que os estudantes ao se deparar com os seus erros têm inicialmente uma resistência em encará-los, mas com o passar das atividades vai se familiarizando com o processo. O desenvolvimento de um laboratório de matemática possibilitou a aplicação de modelação matemática, mostrando aos estudantes que a vida real pode apresentar problemas que podem ser resolvidos por métodos matemáticos. Esta pesquisa indicou que a utilização de métodos matemáticos inovadores podem melhorar a atuação do professor em sala de aula.

Palavras- Chave: Análise de Erro, Modelação matemática e superação de dificuldades.

ABSTRACT

This study describes the development of methods for teaching mathematics, error analysis, and mathematical modeling as applied in a sixth grade group at the Frederico Ritter School in the city of Três Coroas in the state of Rio Grande do Sul, Brazil. These teaching methods were applied in this group aiming at identifying, classifying, and overcoming difficulties presented by the students in applying the concepts of multiplication and division. With this objective, the works of authors who advocate for error analysis as a teaching method which classifies the error, helping the student to identify it, were adopted for the bibliographical study in this research. The overcoming of these errors was based on the works of authors who advocate for mathematical modeling as a teaching method which derives mathematical problems from everyday problems. This research uses a qualitative approach and objective evaluations to diagnose and classify the errors committed by the students. Data analysis showed that students, in discovering their errors, present an initial resistance to face them, but get used to the process as the activities progress. The development of a mathematics laboratory enabled the application of mathematical modeling, showing students that real life may present problems which might be solved by mathematical methods. This research indicates that the use of innovative mathematical methods may improve teachers' performance in the classroom.

Keywords: Error analysis, mathematical modeling, difficulty overcoming.

1 APRESENTAÇÃO E JUSTIFICATIVA

A matemática faz parte tanto de todas as áreas do conhecimento como do cotidiano das pessoas, de uma forma explícita ou implícita. Mesmo fazendo parte do dia-a-dia de todos e, em especial, dos estudantes, a matemática não é reconhecida por sua aplicação e torna-se uma disciplina de difícil compreensão. Isso acontece porque, muitas vezes, não é perceptível a relação entre o conteúdo programático de sala de aula e a aplicação no fazer diário de cada um. Tal pressuposto se explica porque, dependendo do modo em que é abordada, torna-se abstrata e sem sentido ao estudante.

Essa situação se mostra quando são analisados, pelos órgãos estaduais e federais de educação, os índices de reprovação na disciplina, em particular, de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. A Secretaria de Ensino do Estado do Rio Grande do Sul, e o Sistema de Avaliação Nacional iniciaram os programas de avaliação como o SAERGS desde 2007, e o SAEB a partir do ano de 1996. Esses órgãos realizam avaliações de estudantes de 3º, 6º e 9º anos, do Ensino Fundamental, e 1º ano, do Ensino Médio, a cada dois anos.

Conforme resultados do SAERGS apresentados na tabela I, a seguir, nos anos de 2007 a 2009, as avaliações aplicadas apresentaram baixo rendimento. A escala de proficiência em matemática do SAERGS para estudantes do 6º ano, por exemplo, é composta por domínios: (1º) espaço e forma, grandezas e medidas, operações e (2º) tratamento de informações.

Ano	2007	2008	2009
3º Ano do Ensino Fundamental	762.4	767.4	768.5
6º Ano do Ensino Fundamental	211.0	214.0	218.7
1º Ano do Ensino Médio	263.0	260,8	263.1

Tabela I: Resultados das Avaliações SAERGS da Rede estadual, secretaria do Estado do Rio Grande do Sul

As escalas usadas para a avaliação das avaliações do SAERGS para os 6º anos são de 0 a 500 (sendo 500 a indicação de maior/melhor aproveitamento). As notas obtidas pelos estudantes, conforme os dados, não atingem a metade da pontuação máxima, o índice de erros é maior que 50%. No primeiro ano em que a avaliação foi aplicada, a média foi de 211; no ano seguinte,

aumentou 3,0 pontos; no último ano, a média aumentou em 4,7 pontos. Outra observação a ser considerada é que as médias mais baixas foram dos estudantes do 6º ano.

Nas atividades aplicadas sobre adição e leitura de gráficos, os estudantes atingiram índices de acertos acima de 90%; contudo, nas atividades que requeriam aplicação de conceitos de multiplicação e divisão, os índices baixaram: 69% acertaram atividades que necessitavam da aplicação de multiplicação e 58% de divisão. As questões de porcentagem tiveram 54,5% de acerto, uma vez que o conceito de porcentagem exige que o estudante multiplique e divida. Essa falta de capacidade dificultou a realização da atividade satisfatoriamente.

Em relação às avaliações do SAEB, são utilizadas escalas com os seguintes pontos: 100, 175, 250, 325 e 400. Quando os estudantes alcançam 175 pontos, significa – segundo dados do SAEB – que eles possuem noção de forma e grandezas, reconhecem o valor das cédulas de moedas, têm noção de geometria, mas têm dificuldades em efetuar operações numéricas de multiplicação e divisão.

Resultados de avaliações aplicadas pelo SAEB no início dos anos de 1990 não são diferentes. Os acertos em questões de matemática nas turmas do 1º ano do Ensino Fundamental eram 67,7%; no de 3º ano, 17,9%; e no de 6º ano diminuíram para 3,1%. Pesquisas realizadas em 2005, pelo SAEB apontam em suas análises índices de desempenho baixo dos estudantes de 5º ano (na época 4ª série) em matemática, e destes, 13% dos estudantes não mostram habilidades passíveis para serem descritas nas escalas.

As avaliações analisadas pelos órgãos governamentais indicam ser necessário refletir sobre os erros conceituais de matemática dos estudantes do Ensino Fundamental, particularmente, e sobre a forma para levá-los a superar esses erros. Por exemplo, os estudantes do 5º ano acertaram apenas de 13% das questões, segundo dados do SAERGS (2008). Embora apontem algumas competências, os resultados não atendem ao mínimo necessário para que esses estudantes frequentem um 6º ano. Segundo o SAEB, 52% dos estudantes brasileiros se encontram em uma situação crítica em relação às habilidades matemáticas. Estudantes de Ensino Fundamental dos Anos Iniciais fazem parte dos 175 pontos. As pesquisas mostram que 56% dos estudantes de 6º ano superam os 175 pontos.

Verifica-se um ponto crítico com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, conforme mostram os índices apresentados anteriormente. Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 5º ano), os estudantes expõem habilidades na resolução de questões matemáticas, ao chegar ao 6º

ano, porém, essas habilidades diminuem, aumentando o índice de reprovação. Um dos possíveis fatores apresentados por essa evidência é a transição dos Anos Iniciais para os Finais do Ensino Fundamental; uma vez que, nos anos iniciais, os estudantes têm um único professor e, nos finais, passam a ter, às vezes, oito professores.

A autora desta pesquisa, a partir de vivências em sala de aula, tem verificado que essas dificuldades permanecem por longo tempo, muito embora não se saiba – precisamente – quando elas iniciam. Na tentativa em cumprir os conteúdos programáticos do ano letivo, outras dificuldades emergem dos estudantes quanto ao entendimento de outros conceitos relacionados com as operações de multiplicação e divisão. Segundo Lorenzato (2006), verifica-se que o ensino de matemática, sem apresentar aos estudantes conceitos matemáticos em situações do cotidiano deles ou que lhes façam sentido, raramente contribui para suas aprendizagens.

Os dados oficiais sobre dificuldades matemáticas dos estudantes e a vivência pedagógica da autora desta pesquisa, instigaram-na a analisar os erros matemáticos cometido pelos estudantes de 6º ano e como a modelação matemática – como método de ensino – possibilita a superação desses erros.

Na maioria das vezes, o erro é visto como ocorrência não aceitável, uma não aprendizagem. Entretanto, é possível fazer uso desses erros no ensino, mostrando aos estudantes que o entendimento do erro pode levá-lo ao conhecimento e levá-lo a diminuir o sentimento de incapacidade.

A respeito disso, Luckesi (2008) diz que:

A partir do erro, na prática escolar, desenvolve-se e reforça-se no estudante uma compreensão culposa da vida, pois além de ser castigado por outros, muitas vezes ele sofre ainda a autopunição. Ao ser reiteradamente lembrado da culpa, o estudante não apenas sofre castigos impostos de fora, mas também aprende mecanismos de autopunição por supostos erros que atribui a si mesmo (LUCKESI, 2008, p. 51).

Em algumas situações, justifica-se o fracasso escolar dos estudantes pela quantidade de erros cometidos por eles; há, no entanto

, algumas concepções de erros que dependem dos professores que estão avaliando. Conforme Cury (2004), alguns professores veem o erro como parte do processo de ensino e aprendizagem, enquanto outros associam o erro a algo negativo, uma confirmação da impossibilidade do estudante aprender. Na busca de ações para superar as dificuldades de

aprendizado das salas de aula, há pesquisadores, como Cury (2004), que sugerem utilizar-se dos “erros” cometidos pelos estudantes como um meio de perceber a origem de dificuldades dos mesmos. A análise de erro faz parte das recomendações de avaliação contida nas Diretrizes Curriculares de alguns estados brasileiros por considerar que, a partir desta análise, o professor pode encaminhar os conteúdos, contribuindo assim para melhorar o aprendizado.

Há situações em que a avaliação escrita aplicada pelo professor, a fim de atribuir uma nota ou um grau de aproveitamento, leva, muitas vezes, à memorização do conteúdo pelo estudante. Segundo Cury (2004), alguns professores utilizam-se dessa nota como instrumento de controle, distorcendo a função docente: a de ensinar e de estimular o aprendizado. Mudar essa concepção de avaliação e fazer uso do erro cometido pelos estudantes nas aulas pode melhorar a relação entre o ensino e a aprendizagem.

O erro, quando submetido à reflexão, poderá desencadear um questionamento de todo o processo de ensino e transforma-se numa estratégia didática inovadora, pela possibilidade que oferece ao professor de ampliar seus saberes e, com isso, melhorar seu ensino (PINTO, 2000, p. 24).

Um possível caminho para a superação das dificuldades dos estudantes é a modelação matemática cujo método de ensino – em diversos países – tem aumentado significativamente. Segundo Biembengut (2009), modelação é um método de ensino que se originou da modelagem, sendo essa um conjunto de procedimentos requeridos na elaboração de um modelo matemático. Isso se dá pelo fato de propiciar ao estudante fazer uso da matemática para compreender uma situação ou para resolver um problema de outra área do conhecimento; isto é, de integrar a matemática a outra área do conhecimento e, em especial, a área em que o estudante apresenta interesse. As diversas pesquisas mostram que o estudante tem um melhor desempenho escolar quando aprende a resolver situações reais, elaborando modelos matemáticos, conforme Biembengut (2009).

As considerações sobre os índices de aprendizagem de conceitos matemáticos dos estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, e a verificação das suas dificuldades em aplicar operações de multiplicação e de divisão, na forma potencial ou na fracionária, instigaram a autora desta pesquisa a identificar as dificuldades de um grupo de estudantes em efetuar operações aritméticas; por conseguinte, superar os seus problemas por meio de uma aplicação de modelação

matemática. E ainda a responder a questão: *Como a análise de erro pode auxiliar na superação das dificuldades encontradas pelos estudantes de uma Turma de 6º ano, com o auxílio do método de ensino modelação matemática nos conteúdos que envolvam as operações de Multiplicação e Divisão?*

A presente pesquisa faz uma análise sobre os erros referentes a conteúdos que envolvam a multiplicação e a divisão que, constantemente, aparecem nas avaliações feitas por estudantes do 6º ano na disciplina de matemática. A análise desses erros aponta um caminho que visa a superar as dificuldades. Para isso, a autora desta pesquisa seguiu uma vertente de modelagem matemática (modelação matemática) como método de ensino, aplicando-a, a fim de testá-la, com estudantes de 6º ano do Ensino Fundamental, na qual a autora atua.

A concepção de erro, nesta pesquisa, é a de valer como meio para compreender e para superar o erro; em particular, para analisar a forma com que o estudante está desenvolvendo o seu conhecimento matemático: se o erro ocorreu por distração ou por não compreensão do conceito específico que estudou. Isto é, sobre o procedimento que esse estudante utilizou para resolver determinada questão e, por meio da identificação desse possível procedimento, utilizar-se do método de ensino modelação matemática para levá-lo à superação desses erros.

Para melhor compreensão do problema central, são apresentadas algumas questões específicas: *Como os erros matemáticos podem fazer com que os estudantes percebam suas dificuldades em resolver as questões propostas? Qual a influência da análise de erros para a aprendizagem do estudante? Em que medida a modelação matemática pode contribuir para a superação das dificuldades dos estudantes em aprender operações de multiplicação e divisão?*

Assim, objetivo geral desta pesquisa é: Analisar os erros cometidos pelos estudantes do 6º ano em atividades que envolvam as operações de multiplicação e divisão e utilizar-se do método de ensino modelação matemática para a superação desses erros.

E os específicos são: Identificar e classificar os erros matemáticos; verificar as respostas das operações numéricas a partir das análises de erros; verificar a superação do erro matemático por meio da modelação matemática.

1.2 METODOLOGIA DE PESQUISA

Nesta seção, são descritos os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa. Para responder à questão-guia da pesquisa e alcançar o objetivo de superar as dificuldades encontradas, fez-se uma abordagem qualitativa analítica. Segundo Moraes e Galiazzi (2007 p. 11), “a pesquisa qualitativa pretende aprofundar a compreensão dos fenômenos que investigam a partir de uma análise rigorosa e criteriosa de tipo de informação”. As informações foram obtidas por meio de aplicação de teste e análise das respostas dadas pelos participantes.

A pesquisa qualitativa tem como objetivo principal interpretar o fenômeno, analisando-o, com o objetivo da observação, da descrição, da compreensão e do significado. Segundo Allevato (2008), as pesquisas qualitativas partem do princípio de que a compreensão de um fenômeno só é possível a partir da compreensão das inter-relações que se configuram num determinado contexto. No caso dessa pesquisa, para entender como se desenvolve o processo do conhecimento e seus significados, os fenômenos analisados são os erros cometidos pelos participantes. O ambiente da pesquisa é entendido como fonte dos dados, neste caso o laboratório de matemática, onde o pesquisador levará em consideração o processo e não o resultado.

A presente pesquisa analisa erros, utilizando-se de Análise de Conteúdo, conforme Cury (2007). Nesse método se analisam as respostas dadas pelos estudantes, com um foco restrito ao conteúdo, não considerando fatores externos. Análise de Conteúdo é usada nas pesquisas em que se expressam as opiniões, as percepções e as crenças (CURY, 2007). Assim a análise de conteúdo é apenas um dos métodos de analisar expressões humanas, fazendo parte de uma variedade de métodos de análise contextual. Segundo esse autor, as respostas dadas pelos estudantes podem ser analisadas com base nas regras e nos passos que esse conteúdo tem; assim, o professor pode observar e concluir de que forma o estudante desenvolveu o seu saber matemático.

1.2.1 Aporte Empírico

O aporte empírico está dividido em duas etapas. A primeira consiste na aplicação de avaliações e de classificação dos erros cometidos pelos estudantes ao responderem às questões da

avaliação. A segunda etapa descreve a experiência realizada no laboratório de matemática, utilizando-se dos métodos de ensino análise de erro e modelação matemática.

▪ **1ª Etapa - Aplicação de avaliações e classificações dos erros:**

Aplicou-se a pesquisa com 32 estudantes de 6º ano do Ensino Fundamental da Escola pública de Três Coroas, no vale do Paranhana, do estado do Rio Grande do Sul, pois os mesmos apresentam dificuldades em desenvolver conceitos como multiplicação e divisão, segundo dados estatísticos do SAERGS e SAEB.

As propostas desta aplicação foram: identificar, classificar e analisar os erros cometidos por esses estudantes; aplicar atividades de matemática contendo aplicação de multiplicação e divisão. Baseando-se nessas avaliações, desenvolveram-se métodos de ensino que puderam auxiliar os estudantes em suas dificuldades.

Foram aplicadas, nas avaliações, questões de multiplicação e divisão, obtendo informações em que os erros cometidos pelos estudantes puderam ser analisados, observaram-se os erros mais frequentes, elaborando-se as categorias. A primeira avaliação (APÊNDICE I) foi dividida em dois tipos de atividades simples e objetivas, sendo 12 de multiplicação e 11 de divisão, nas quais eles tiveram que responder cada uma, descrevendo o seu raciocínio lógico. A segunda avaliação, continha oito problemas de matemática que necessitavam de multiplicação e divisão para serem resolvidas. Os estudantes tiveram que respondê-las de maneira descritiva, apresentando assim todos os caminhos percorridos para encontrar a resposta.

Havia, inicialmente, 64 avaliações entre os dois tipos, sendo todas corrigidas, classificadas e quantificadas em relação aos erros que mais apareceram. As avaliações que tinham esses erros foram selecionadas e separadas, servindo de parâmetro quando da participação desses estudantes no laboratório de matemática. Nas avaliações, foram registradas observações a respeito dos comentários – dúvidas, anseio – dos estudantes quando estavam realizando as atividades.

Numa primeira análise de todas as avaliações, fez-se apenas uma verificação das repostas: certas ou erradas. Na segunda análise das mesmas avaliações, houve uma classificação dos tipos de erros. Observou-se que os erros estavam surgindo pela falta de entendimento dos conceitos de multiplicação e divisão ou pela falta de entendimento do conteúdo, ou seja, da aplicação do

conceito de multiplicação e de divisão. As avaliações de dez estudantes continham os erros mais repetidos; com isso, os mesmos estudantes foram convidados a participar de um laboratório de matemática para fazer a análise de seus erros e tentar superá-los. Para isso, utilizou-se o método de ensino modelação matemática como forma de superação das dificuldades encontradas e classificadas, tendo como ambiente de aprendizagem um laboratório de matemática.

▪ **2ª Etapa - Aplicação do método de ensino modelagem matemática no laboratório de Matemática:**

Foram quatro encontros. No primeiro, ocorreram atividades e discussões da professora com os estudantes sobre seus erros matemáticos, cometidos nas avaliações. No segundo encontro, após melhor entendimento sobre seus erros, foram aplicadas situações-problema para que eles se acostumassem a resolvê-las; buscaram-se situações que fizessem parte do cotidiano deles: um assunto comum a todos eles.

Os dois últimos encontros foram desenvolvidos com a aplicação de modelação matemática. Nesses, os estudantes foram levados ao laboratório de informática para poder se utilizar do programa *X-home 3D*, sendo-lhes proposto que desenhassem a planta baixa de uma casa com as seguintes medidas: 8m de comprimento e 7m de largura. O programa possui uma tela quadriculada, cada quadrado mede 1 cm de lado. Esse programa X- Home 3D já foi utilizado nas aulas de matemática na introdução do conteúdo de figuras geométrica.

Após a realização dos desenhos das plantas baixas das casas e a construção de suas perspectivas, também foram feitos alguns questionamentos aos estudantes, instigando-os a questionar: Quanto custaria construir esse projeto de casa? Quantos tijolos eram necessários para cada metro quadrado? Quanto de cimento seria necessário para a construção? Qual o valor de cada tijolo? Quanto custava um saco de cimento? Após os questionamentos, os estudantes começaram a responder às questões, aplicando seus conhecimentos de matemática básica. Para responder a esses questionamentos, coletaram alguns dados como saber a quantidade de tijolos necessários para construção da casa projetada. Além disso, eles fizeram um levantamento de preços dos materiais de construção.

1.2.2 Aporte Analítico

Para análise dos resultados obtidos, fez-se uma abordagem interpretativa qualitativa. Isso possibilitou melhor compreensão dos procedimentos pelos estudantes em desenvolver seus raciocínios na resolução das questões propostas. Adota-se o termo dificuldade de aprendizagem nos casos relacionados à dificuldade de atenção: sem o uso de estratégias cognitivas e de raciocínio lógico matemático conforme Fonseca (1995).

A análise também foi baseada nas atitudes e procedimentos dos estudantes durante a realização das avaliações escritas e na aplicação da modelação matemática, sob o tema construção de casa. Para isso, fez-se uso de observações; com esse acompanhamento, a pesquisadora registrou a forma que cada estudante organizava seus conhecimentos e expressava suas preocupações. Sendo assim, por meio das observações e dos registros, percebeu-se uma forma de superação das dificuldades que eles apresentavam utilizando-se os métodos de ensino análise dos erros e modelação matemática.

Outro critério adotado foi a participação deles no ambiente de aprendizagem; no caso, o laboratório de matemática. Registrou-se qual o desenvolvimento dos estudantes em termos de conhecimento por meio dos métodos de ensino aplicados. Como reagem ao ter que encarar e superar o seu próprio erro, tendo uma autonomia em desenvolver seu raciocínio. Para análise dos erros tomou-se por base Cury (2004); para o método de ensino modelação matemática, Biembengut (2009).

2 APORTES TEÓRICOS

O ato de aprender envolve erros e acertos; entre eles, há o processo de como se desenvolveu esse resultado, mesmo ele sendo certo ou errado. O que acontece, muitas vezes, é o fato dos professores se prenderem mais nas aplicações de avaliações e nos seus resultados, excluindo assim o seu papel de docente, ou seja, a função de garantir as condições e os meios pedagógico-didáticos para que o estudante seja estimulado a aprender.

O erro no ensino, para alguns, significa um obstáculo ao desenvolvimento, pois, dificulta a ampliação do conhecimento, limitando e tornando lento o aprendizado do estudante. Errar significa não alcançar o objetivo proposto. Ao contrário, o acerto faz o estudante atingir ao resultado previsto, fazendo-o, teoricamente, desenvolver o seu conhecimento.

Quando erro é exposto a reflexões poderá desencadear um questionamento de todo o processo de aprendizagem, tornando-o um método de ensino alternativo, pela possibilidade de oferecer ao professor ampliar seus conhecimentos e melhorar o seu ensino. O estudante, ao analisar o seu erro, perceberá o conceito que não foi desenvolvido.

Ao tratar o erro como método de ensino, possibilita melhoria significativa no ensino e aprendizado, oferecendo ao professor uma visão de seu método de ensino: Se o método está contribuindo ou não para o desenvolvimento do conhecimento do estudante, e poderá tomar uma nova direção em suas ações didáticas. Este capítulo está organizado em Teoria de Erros, Dificuldade de aprendizagem e Modelagem Matemática. Neste capítulo apresenta-se teoria de análise de erros baseando-se em Cury (2004) e modelagem matemática baseando-se em Biembengut (2009).

2.1 ERROS NÃO SÃO SINÔNIMOS DE FRACASSO

Nogaro e Granella (2004) dizem que desde os tempos primitivos o ser humano busca por soluções de problemas existenciais e estruturais. Dentre essas buscas, situações inesperadas surgiam com respostas negativas, as quais eram assimiladas como erros, mas que, de modo algum, significariam o fracasso da humanidade.

A comunidade escolar, geralmente, associa o erro ao fracasso; no entanto, quem disse que eles estão juntos? O erro, nem sempre, significa que o estudante não aprendeu e, pelo fato de ter cometido o erro, não aprenderá mais. Existem vários fatores que influenciam na formação de conhecimento, os erros cometidos pelos estudantes não devem ser associados ao fracasso escolar.

O contexto escolar deveria ser o local por excelência das tentativas próprias de solução de problemas, seguidas de um exame crítico por parte do professor. Se é verdade que eventualmente aprendemos de todos aqueles que nos rodeia, é inegável que os professores e as escolas têm no ensino e na aprendizagem não uma meta eventual, mas a razão de ser de seu trabalho. Não existimos para decretar fracassos, mas para promover aprendizagens (AQUINO, 1997 p. 20).

Segundo Aquino (1997), o professor não está na escola para apontar fracassos, o que não lhe impede de apontar erros. Levar o estudante a perceber e compreender seu erro não implicará em que ele não volte a ser outra vez criativo. Isso, porém, pode estimulá-lo a superar esse erro. Dessa forma, o erro pode ser visto como oportunidade de ensino e não como fracasso. Conforme o autor, ao aplicar um determinado problema de matemática, em sala de aula, logo após fazer a correção, ao apontarem-se os erros, não se estaria apontando os fracassados sobre o conteúdo. Pelo contrário, essa correção deve servir como uma bússola, mostrando o caminho para o estudante.

Segundo Nogaró e Granella (2004), o erro só pode ser considerado como algo ruim, na aprendizagem escolar, se houver um modelo padrão a ser comparado. Se não há um modelo padrão, não se pode considerar um erro. Isso se trataria de um objetivo não alcançado, um insucesso, mas não um erro, por consequência, não há fracasso. Para os autores, em uma situação de sala de aula, poderá ocorrer o erro quando um estudante, em uma atividade, demonstra não ter adquirido determinado conhecimento ou habilidade por meio de um comportamento que não está coerente com o padrão existente. Nesse caso ocorre o erro referente ao padrão escolar.

Alvarenga (2009) diz que a construção do conhecimento acontece quando o estudante, ao se deparar com algum conteúdo novo, passa por uma desequilibração, assim definido por Piaget (1972). Isso se dá porque o novo conhecimento vai desestruturar o que ele já possuía, talvez até torná-lo inverdade. Assim ele pode ser visto como algum tipo de erro pelo estudante, natural no processo de desenvolver um novo conhecimento, reinterpretando novos dados, o que não pode ser entendido como fracasso escolar.

Para Alvarenga (2009), o erro gera um desconforto em sala de aula; tanto para os professores quanto para os estudantes, tornando assim a busca de sua eliminação constante; dessa forma, os erros não são reutilizados, pois é mais fácil ignorá-los e não interpretá-los.

Borasi (1996) diz que existem dois caminhos a serem percorridos quando se utiliza o erro. Um deles consiste na classificação e eliminação do mesmo; o outro caminho usa o erro para explorações e descobertas. Cury (2004) assume o segundo caminho, já que, na eliminação do erro, apenas se mostra a resposta correta, o que não contribui no ensino do estudante. Borasi (1996), ao classificar a análise de erros, dizia que há duas linhas a se seguir. Uma delas é a preocupação com a eliminação do erro e, a outra, é a utilização do erro para explorações e descobertas. A posição da autora é favorável à segunda linha, que é construtivista.

Segundo Cury (2004), a análise de erros, como abordagem de pesquisa, teve sua origem no século XX, nos países da Europa e nos EUA. Os questionamentos das primeiras pesquisas realizadas referem-se aos erros cometidos por crianças das Séries Iniciais do Ensino Fundamental na expectativa de aprimorar os métodos de ensino. Por termos em mente que as pesquisas objetivam a entender as maneiras de pensar do estudante. A autora ainda diz que a teoria construtivista permitiu utilizar o erro como um meio de um desenvolvimento de conhecimento do estudante. Surgiu, junto com os objetivos de classificar os erros, a preocupação com as causas desses erros. Assim as pesquisas de análise de erros tornaram-se mais abrangentes.

Cury (2004) diz que a análise de erros foi uma das abordagens de pesquisa mais promissora da década de 80, embora, na década seguinte, ainda surgisse outra vertente de análise de erros. Ela apareceu na França, com a teoria geral dos obstáculos, criada por Brousseau, a partir da categoria obstáculo epistemológico criada por Bachelard. Segundo Bachelard (1996), a teoria dos obstáculos está relacionada com etapas dos desenvolvimentos cognitivos e didáticos, que seriam fontes de erros dos estudantes. Considera-se ainda, segundo Bittencourt (1998), essa visão modifica o caráter de erro:

Fruto de descuido ou falta de conhecimento, a noção de obstáculo epistemológico concede ao erro um papel importante enquanto revelador de dificuldades a serem seriamente consideradas por aquele que pretender melhor o processo cognitivo (BITTENCOURT, 1998, p. 5).

No Brasil, o método de análise de erros foi pouco explorado, pois, na década de noventa, poucos trabalhos foram apresentados. Ainda, segundo Cury (2004), existem muitos trabalhos realizados em sala de aula, pois ela acredita que os professores passam muito tempo envolvidos com correções, embora, ao fazer essas correções, eles poderiam refletir sobre o tipo de erro, sobre os motivos pelos quais são cometidos e verificar as possibilidades de aproveitar tais resultados em sua sala de aula. Mas, não o fazem.

Borasi (1996) ressalta que, ao aplicarem as avaliações, os professores se preocupam em analisar o desempenho dos estudantes, apontando os erros para quantificá-los e, dificilmente, explorá-los. Cury (2004) diz que o professor deve cumprir o programa de conteúdo não podendo se prender a propostas inovadoras, mas deve também tornar possível a modificação da prática pedagógica, planejando pesquisas de análise de erro. Esse autor lança a ideia de ambientes de aprendizagem, onde os erros podem ser aproveitados, pois propõe usar o resultado incorreto para verificar o seu erro e não o envolvimento na simples eliminação.

Ao deparar-se com respostas diferentes em avaliações, teste ou exercícios, não quer dizer que essa resposta seja errada; ela mostra o que o estudante sabe, de que forma ele está desenvolvendo seu conhecimento. Essas respostas não corretas permitem ao professor compreender o que o estudante quis apresentar, mas que o educador deve evitar tomar a resposta diferente como erro. “Nesta perspectiva não importa classificar as respostas em certas ou erradas, mas torná-las como indícios dos caminhos percorridos pelas crianças e dos novos percursos que aparecem como necessidade e possibilidade no processo de construção de conhecimentos” (ESTEBAN, 2002 p. 142).

Utilizando-se da análise de erros, contribuiu-se para o processo de desenvolvimento de conhecimento do estudante, sendo a correção de uma avaliação não possuir a característica indicadora de certo ou de errado. Mas, sim, ao fazer a correção, questionar-se, fazendo com que o estudante perceba o seu próprio erro; a partir dali, consiga delinear um caminho certo, mesmo com a ajuda do professor.

Segundo Alvarenga (2009), quem se utiliza da análise de erros precisa observar os conceitos que não foram atingidos pelos estudantes, com o intuito de saná-los e não apenas classificá-los em certo e errado. Romão (1998) cita exemplos de pesquisas científicas cujos resultados não saem como o desejado, mas, não são encarados como erro e sim como um acontecimento, do qual poderá ser retirado algum tipo de lição. Alvarenga (2009) diz que o erro

não deixa de valer como um caminho que serve para melhorar a aprendizagem do estudante. Para ele – Alvarenga – o erro pode ser utilizado como uma virtude de aprendizagem dentro da escola. O fato de não encontrar o resultado esperado mostra que os procedimentos utilizados pelos estudantes foram inadequados, não encontrando o resultado correto, com isso o processo deve ser analisado e usado como base para uma possível solução. O autor diz que as falhas dos estudantes passam a ser essenciais no processo de ensino aprendizagem.

O erro não é somente efeito da ignorância, da incerteza de acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora, se revela falso, ou são instáveis, eles são constituídos em obstáculos (CURY, 2007 p. 33).

Alguns pesquisadores de matemática consideram a existência do erro como instrumento de resolução das dificuldades; ao tratá-lo e compreendê-lo, é possível superá-lo. Cury (2007) diz que a ideia do erro se constitui como um conhecimento, sendo um saber que o estudante traz consigo dentro do seu conhecimento adquirido anteriormente. Quando o erro acontece, irá desestabilizar o que ele já sabe, fazendo que o estudante desenvolva um novo conhecimento a partir do questionamento do seu erro.

A análise de erros, é uma abordagem de pesquisa a ser utilizada no dia-a-dia da sala de aula, em qualquer nível de ensino pois se configura face ao trabalho dos estudantes, de busca de soluções que sejam criadas por eles com o auxílio do professor, ao invés da postura tradicional de negar o erro e procurar eliminá-lo por decreto (CURY, 2004 p. 136).

Na análise de erros, Cury (2007) acrescenta que: o estudante terá que enfrentar o seu erro, pois, dessa forma, estará encarando-o, passando a acreditar que o certo passa por uma desestabilização. Mostra-se ao estudante que, o que se acredita ser certo não é, necessariamente, certo e que poderá ser alterado.

2.1.1 Erros construtivos

Abrahão (2004) diz que, no âmbito educacional, pode-se perceber o erro como algo construtivo e, não mais, algo que o estudante desconhece. O autor diz que a expressão erro construtivo é usada por autores como Macedo (1992), Ferreiro e Teberoski (1985), Hofmam (1993) para classificar o erro e apontá-lo como parte do processo aprendizagem dos estudantes.

Existem três tipos de conhecimentos desenvolvidos ao longo da vida: social, físico e lógico-matemático; todos baseados na teoria piagetiana. Segundo Abrahão (2004), o primeiro deles é um conhecimento arbitrário, pois, para a criança possuí-lo, ela precisa da interferência de outras pessoas. Já o físico é o conhecimento externo do indivíduo. Dentro dos estudos genéticos, o autor ainda diz que o erro construtivo está vinculado ao conhecimento lógico matemático.

Na perspectiva do autor citado, esse terceiro conhecimento – o lógico matemático – é o que está ligado ao erro construtivo, pois o estudante traz consigo um determinado conhecimento, criando-se assim hipóteses cognitivas. O erro construtivo, nesse enfoque, é uma assimilação deformante – quando o estudante detecta algo diferente do que ele já sabia. Esse mesmo autor ainda assevera que não é suficiente apontar os erros construtivos, tem-se que encontrar maneiras de compreendê-lo, questioná-lo diante dos estudantes, para assim estará fazendo-os pensar. Dessa maneira, é preciso que os níveis dos erros sejam conhecidos.

Segundo Macedo (1992), existe três níveis de erros. No primeiro, a criança não se confunde, pois não tem ideia de contradição; no segundo, a criança já está consciente de suas contradições, sabe que errou e necessita de superação; no terceiro, o estudante já supera o erro sozinho; tem condições de corrigi-lo.

Abrahão (2004) esclarece que a dúvida de como lidar com o erro vai existir. Sendo assim, Macedo (1992) expõe que o erro tem que ser observado pelo estudante e pelo professor. Após a observação, o professor tem que desestabilizar o estudante diante do seu erro. O autor ainda sugere que seja da seguinte forma: primeiro, fazendo a observação; depois, possibilitando que o estudante analise seu erro, atitude que torna o erro um problema e faz com que se pergunte: *Em que eu errei? E por quê?*

Macedo (1992) diz que o estudante tem o dever de relatar e descrever como ele encontrou o resultado; o professor, por sua vez, de estimulá-lo a questionar-se. Fazendo-se, assim, do erro um diálogo, é possível que os erros, de alguma forma, levem o estudante a pressupostos sobre os seus conceitos. Junto com a intervenção docente, torna-se um erro construtivo. Acertos e erros se valem como momentos de aprendizagem.

Abrahão (2004) elucida que o erro construtivo está relacionado com a consciência de cada estudante, consciência essa formada por conhecimentos que são influenciados por conhecimentos dos familiares, da escola e da comunidade. Portanto, para superar esses erros que estão enraizados na consciência do estudante, o professor precisa interferir, desacomodando-o e desenvolvendo, assim, um novo conhecimento.

Nogaro, Granella (2004) ressalva que o professor precisa dar uma atenção especial ao avaliar os erros dos seus estudantes e compreendê-los como hipóteses construtivas. Dizendo ainda que a responsabilidade do erro cometido pelos estudantes é também do professor, pois cabe a ele levar em consideração qual o processo de ensino; uma vez que a aprendizagem do estudante está refletida na ação do professor.

Segundo Silva (2008), o erro se inscreve em um processo, tendo uma função potencialmente construtiva, que se constitui em indicador de desenvolvimento na atividade cognitiva. Esse desenvolvimento se constitui, apresentando novas estruturas na formação de “desconhecimentos” daquele que aprende, isto é, revelando, de que maneira o estudante fez para alcançar o objetivo de aprendizagem.

Para Nogaro, Granella (2004), quando um professor está diante do erro, pode agir de três formas: com a punição, com a complacência ou com o desenvolvimento da possibilidade de aprender. Nogaro e Granella (2004) dizem que, ao relacionar essas posturas de professor com as teorias psicológicas da Educação, temos que: se o erro for encarado como algo inaceitável, tendo como consequência uma punição, será de caráter empirismo-associacionismo. Se o professor encarar o erro como fruto de um acontecimento, com o tempo ele será corrigido, terá um caráter de “romantismo”; mas, se o professor problematizar o erro, tem-se o erro construtivista, que segundo Nogaro, Granella (2004, p. 10) “onde o erro não é tratado como uma questão reduzida ao resultado da operação (se acertou ou errou), mas, sim de invenção e de descoberta”.

Para trabalhar com o erro construtivista, tem-se que adotar uma avaliação investigativa; dessa forma, o estudante consegue fazer com que o erro faça parte do processo do ensino de

matemática, pois segundo Esteban (2000, p.16) “a avaliação investigativa teria que valorizar a diversidade de conhecimentos, valorizar, também, as diversas formas que esse conhecimento poderia desenvolver”. E segue dizendo: [...] “O erro muitas vezes mais do que o acerto, revela o que a criança “sabe” colocando este saber numa perspectiva processual, indicando também aquilo que ela “ainda não sabe”, portanto o que pode ‘vir a saber’(ESTEBAN, 2002 p. 35).

Numa avaliação investigativa, o erro poder ser visto como um processo de desenvolvimento do conhecimento. É nele que é revelado como o estudante organizou o seu conhecimento. Nesse tipo de avaliação, verifica-se não falta, e sim como desenvolvimento de conhecimento articulado com o conhecimento do passado. Como a avaliação investigativa é uma forma de analisar o erro, ele pode tornar-se um estímulo para o estudante aprender e para o professor ensinar. Caracteriza-se como um desafio a ser superado; a partir do erro que novos conhecimentos passam a ser adquiridos.

O erro passa a representar um indício, entre muitos outros, do processo de construção de conhecimentos. O erro aponta aspectos significativos para o processo de investigação ao sinalizar que a criança está seguindo trajetões diferentes (originais, criativos, novos, impossíveis?) dos propostos e esperados pelo professor (ESTEBAN, 2000, p. 22).

2.1.2 O Erro na perspectiva Pia Getiana

Na teoria de Piaget (2000), há referência sobre o erro em dois momentos. Em particular, no primeiro, quando a teoria da inteligência humana apresenta uma dimensão ao erro, explicitando a relação entre o erro “ruim” e o erro “bom”. No segundo momento, quando interpretações pedagógicas do construtivismo piagetiano, toma-o como algo que não se pode cometer.

Conforme Taille (1997), dentro dessa teoria de Piaget, existem dois pontos de vista sobre o erro, um negativo e outro positivo. Esse autor diz que a forma negativa apresenta-se pela diferença existente entre o conhecimento correto e o incorreto; o erro torna-se algo importante para diagnosticar o seu nível. A presença do erro deve mostrar que o estudante está desenvolvendo o seu pensamento, sobre o mundo, mesmo que com uma visão distorcida. O mesmo autor faz considerações piagetianas em relação ao erro, dizendo que, ao condenar o erro,

estará negligenciando a inteligência do estudante. Não é suficiente saber apenas que errou; é preciso ter parâmetros para analisá-lo, sendo o método pedagógico tradicional organizado de tal forma que só comunica o estudante que cometeu um erro. Desse modo, a ação pedagógica perderá o seu valor.

O erro pode ser fonte de enriquecimento quando o estudante o percebe, tendo compreensão sobre o seu erro, podendo explorá-lo. Para Piaget (1972), a relação criança-criança é importante como o desenvolvimento da inteligência no meio social. Nessa relação, não há hierarquia. Como na relação criança e adulto, essa importância reflete-se também no erro, pois ele é apontado por quem da ocorrência.

Ao apontar o erro, segundo a concepção de Piaget (2000), cria-se uma situação perturbadora, pois é apontada por quem sabe, apenas é dada a resposta certa, ou dada uma nova chance, em forma de cooperação. Portanto, em uma relação de criança-criança, conforme Taille (1997), o erro deve ser respeitado e discutido. [...] é preciso lembrar que as relações de cooperação não pressupõem o que eu chamaria de “sonegação de informação”, ou seja, não implica a receita pedagógica que reza que nunca se deve dar a resposta certa e sempre deixar o estudante encontrá-la por si só (TAILLE, 1997 p. 41).

Segundo Taille (1997), não é fácil um professor ser cooperativo, como diz na teoria de relação criança-criança de Piaget. Então, para o professor ser cooperativo, o estudante tem que querer cooperar também, já que ele é visto pelo estudante como alguém superior, alguém que sabe mais, isso dificulta o processo de cooperação do erro. O autor ainda diz que é importante propor atividades entre os estudantes, para que eles possam discutir entre si, pois, assim não será apenas um estudante o detentor do conhecimento. Logo, o erro não será apenas apontado; sim um ato de cooperação, em que a resposta não será dada com facilidade e sim procurada e encontrada pelos próprios estudantes.

2.2 APRENDIZAGEM E DIFICULDADE EM MATEMÁTICA

Segundo o Dicionário Aurélio, *aprendizagem* significa processo, ato ou efeito de aprender; *aprender* significa tomar conhecimento de algo, tornar-se capaz de algo por meio de estudo, observações e experiências. Expondo assim, parece que é um processo simples, mas na

prática não é, o ato de aprender envolve variáveis que, muitas vezes, podem estimular ou atrasar o processo de aprendizagem. Há estudos, segundo Fonseca (2000), mostrando o quanto essas variáveis influenciam no processo, pois a criança que tem má alimentação, problemas familiares, má formação psicológica, pode apresentar dificuldades de aprendizagem.

O processo de aprendizagem em matemática não é diferente: o estudante só aprende matemática quando constata a aplicação do conteúdo matemático no cotidiano; condicionado a isso, então, o conteúdo fará sentido. O ensino tem que ser baseado em problemas reais, ou seja, o estudante tem que verificar relacionar e refletir o que está aprendendo. Segundo dados estatísticos do SAEB (2007) e SAERGS (2007), o ensino de matemática tem um processo de aprendizagem mais lento, pois a maneira que a matemática é ensinada torna o ensino abstrato, fazendo que o estudante tenha dificuldades de aprendizagem.

2.2.1 Processos e aprendizagem em matemática

Para Fonseca (1995), a aprendizagem é um processo integrado, que leva a uma mudança gradativa na estrutura mental daquele que aprende. Essa alteração ocorre por meio da conduta da pessoa, por condicionamento, experiência ou ambos. Na sequência dessa perspectiva, o autor segue afirmando que o processo de aprendizagem acontece numa mudança de comportamento, ou de conduta, tendo várias características. É uma resposta modificada, estável e durável, interiorizada e consolidada no próprio cérebro do indivíduo.

Há várias teorias sobre o processo da aprendizagem. Por exemplo, existe uma teoria de Thorndike e Hull que defendem ser a aprendizagem uma relação compreendida, que vai do estímulo à resposta. Segundo Fonseca (1995), o Thorndike (1936) especificou a aprendizagem em três leis – exercício, adaptação e efeito. Hull (1998) equacionou a aprendizagem em modelos matemáticos, tornando em conta o número de tentativas, a qualidade de reforço, a intensidade do estímulo, a inibição reativa condicionada como funções preditivas e potenciais de aprendizagem.

O behaviorista Guthrie (1952) mostrou vários postulados: o da associação entre o estímulo e a resposta; da adaptação positiva, isto é, a lei de frequência de Watson; o do hábito e ocorrência e, por último, o do condicionamento, que segundo Fonseca (1995), é a evocação de

resposta por estímulos incondicionados (predeterminados, inatos e invariantes), substituídos posteriormente por estímulos condicionados, que tendem a provocar “reflexos psíquicos”.

Tolman (1994) introduz a noção de significados, entre o estímulo e a resposta correspondente, a teoria do sinal, dando ênfase à totalidade do comportamento, indo contra as teorias anteriores, que foram consideradas moleculares, por fragmentarem o comportamento.

Wetherimer, Kohler, Koffka e Lewin, são gestaltistas e, segundo Fonseca (1995), mudaram a noção de aprendizagem com relações interiorizadas de significação, entre o estímulo e a resposta – quer no todo, quer nas suas partes – que chamaram de *Insight*. Hilgard ao reformular os pressupostos anteriores, formulou a teoria funcionalista que foi, fundamentalmente, aplicada à educação, por Dewey. Skinner (2003) combinou as teorias anteriores, destacando a do condicionamento operante dizendo ainda que a aprendizagem se reflete na mudança de comportamento, porque é emitida pelo organismo e não pelo estímulo (FONSECA 1995).

Anokhin (1968) diz que as aprendizagens envolvem funções psíquicas superiores, resultantes de sistemas que combinam funções neurofisiológicas inferiores. Vygotsky, (1964), completa essa dimensão, afirmando que o comportamento deve ser encarado como um sistema funcional, complexo, que organiza e autorregula os reflexos, as sensações, o automatismo, as emoções, as percepções e as conceitualizações de origem sócio- históricas.

Vygotsky (1991) defendia que a linguagem tem um papel de construtora e propulsora do pensamento, afirmando que aprendizado não é desenvolvimento. Adequadamente, organizado o aprendizado, resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento, que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer. A linguagem então é a fonte do pensamento, contrariando a concepção que considera o desenvolvimento da base para a aquisição de linguagem. O processo de desenvolvimento, para Vygotsky (1991), não é o mesmo que os processos de aprendizagem, sendo o desenvolvimento avançado de forma lenta, sempre indo atrás do processo de aprendizagem. Isso ocorre sequencialmente.

2.2.2 Dificuldades de aprendizagem em matemática

Segundo Anache (2000), a preocupação dos professores e pais em relação aos estudantes, é quando estes não conseguem atingir um nível considerado satisfatório, acabam por repetir o ano

escolar. Essas situações de reprovações estão cada vez mais, frequentes nas escolas, principalmente na disciplina de matemática. Anache (2000) e Ciasca (1994) perguntam: o que significa, exatamente, dificuldade de aprendizagem? O mesmo autor ainda diz que se costuma usar outros termos, como: distúrbios de aprendizagem, fracasso escolar e incapacidade de aprender. No entanto, esse autor adota o termo deficiência na aprendizagem para conceituar distúrbios de aprendizagem que é definida. Ciasca (1994) opta por definir como dificuldade de aprendizagem algo relacionado com falha no processo de aprendizagem, diz que isso decorre de um problema de ordem pedagógica. Todos esses termos são usados para conceituar o estudante que não é bem sucedido na escola, que apresenta notas baixas e não demonstra vontade de aprender.

Fonseca (1995) diz que os fatores que causam as dificuldades de aprendizagem são, basicamente, biológicos e sociais. Os primeiros são decorrentes de: malformações, anemias, intoxicações, lesões cerebrais, prematuridade, desnutrição, variações genéticas, traumatismo, acidentes e desvios orgânicos. Os fatores sociais são: estrutura sócio-política, desemprego, insegurança econômica, ambiente repressivo, privações lúdicas e psicomotoras, carência afetivas, zonas pobres e isoladas. Quando as condições clínicas de estudos são de baixo nível social, os estímulos de aprendizagem tendem a não existir. A respeito disso, Fonseca (1995) afirma que os fatores de privação cultural implicam no desenvolvimento potencial e cognitivo da pessoa.

Para Piaget (1972), os desenvolvimentos do corpo, do sistema nervoso e das funções mentais estão ligados ao processo de aprendizagem. O desenvolvimento é um processo que se relaciona com a totalidade de estruturas do conhecimento. A aprendizagem apresenta um caso oposto, em geral, é provocada por situações, ou por um professor, com referência a algum ponto didático ou por uma situação externa. Segundo Piaget (2000), “todo conhecimento implica, necessariamente, uma relação entre dois pólos, isto é entre o sujeito que busca conhecer e o objeto a ser conhecido”.

Conforme Fonseca (1995), o termo dificuldade de aprendizagem não aparece nas obras de Piaget que acreditava que a dificuldade traz algo de positivo, por quem quer conhecer. Em particular, precisa responder a questões desconhecidas, assim pode desenvolver o raciocínio ao buscar as informações e as correções dos erros.

Ao fazer uma análise nas obras de Piaget, constatou que o autor considera o desenvolvimento um processo essencial e cada elemento da aprendizagem ocorre como uma

função do desenvolvimento total, em lugar de ser um elemento que explica o desenvolvimento. Nesses termos, é preciso analisar as dificuldades, percebendo qual a parte relativa ao professor, à escola e à família. Segundo Macedo (1992), há uma dialética entre as partes e o todo, que supõe considerar uma relação de interdependência, de modo a se complementarem; a autora salienta ainda que não se pode confundir dificuldade de aprendizagem com incapacidade de aprender; mesmo com dificuldades, se esse ensino se der e forma adequada, o estudante terá êxito.

Quando o estudante mostra dificuldade no seu processo de aprendizagem, logo é taxado como incapacitado para desenvolver o seu conhecimento, sendo encaminhado a atendimento especial. Segundo os autores Ide (1996) e Rossini e Santos (2001), quando esse fato acontece, cometem-se injustiças, pois seus estudos denunciam precariedade no processo de avaliação, para revelar as causas dos fracassos desses estudantes.

Em algumas escolas, por falta de conhecimento, aplicações de uma avaliação inadequada, confundem as dificuldades dos estudantes de origem pedagógica com problemas de saúde mental e, por isso, encaminham para especialistas que se centram no comportamento inadequado, agressividade e pouca motivação para as atividades escolares. Essas características nem sempre estão relacionadas à aprendizagem e sim fazem parte de uma relação social (FONSECA, 1995).

Macedo (1992) salienta o cuidado que se deve ter com as palavras ditas ao estudante que tem dificuldade de aprender, pois nesse processo há um possível questionamento, Qual é o sentimento do aluno ao perceber que não está progredindo se comparado com seus colegas? Será que conseguirá se sentir motivado a aprender se perceber que o seu rendimento é menor do que o dos outros? Quais as consequências desses sentimentos perante a sociedade?

2.2.3 Consequências das dificuldades de aprendizagem na sociedade

Segundo Fonseca (2002), vive-se no século das inaptações escolares, implicando, assim, o aumento da expansão e da democratização do ensino. Em seus estudos, a autora também afirma que as dificuldades de aprendizagem se alastram como uma epidemia, resultando em problemas não apenas pedagógico, mas também em problemas econômicos e sociais.

Ao chegar ao mercado de trabalho, onde é exigido um mínimo de estudo, a pessoa pode não conseguir um emprego desejado, recebe mais quem tiver mais estudo. Quando o estudante

tem dificuldade de aprendizagem, começa a repetir o ano escolar, logo ele desistirá de estudar, abandonado a escola, com a não finalização dos estudos, não obtém formação.

A dificuldade de aprendizagem não aparece sozinha; segundo Fonseca (1995), está sempre acompanhada com distúrbios de comportamentos. Assim, se o estudante não aprende, ele não terá atenção na aula, distraíndo-se com qualquer objeto ou barulho. Poderá também, tentando chamar a atenção dos outros estudantes, ter atitudes que o faça ser segregado. Os estudantes que apresentam, além de dificuldades de aprendizagem, distúrbios de comportamento, logo se tornarão, mesmo que inconsciente, um obstáculo no caminho do professor; conseqüentemente, da família, gerando todo um desconforto. A falta de sucesso escolar leva a condutas não condizentes ao convívio social. É o primeiro passo para um distúrbio mental, fazendo que a pessoa se revolte e assuma um fator de perigo à sociedade.

As conseqüencias das dificuldades de aprendizagem podem resultar em fracasso escolar. Esteban (2000) relaciona o fracasso escolar com as classes populares e ressalta que, nessas classes, deve-se questionar a avaliação. Para essa autora, é por meio da avaliação escolar que se encontra a inclusão e a exclusão social e o fracasso escolar, Esteban (2000, p. 8), “está configurando um quadro de múltiplas negações, e uma delas é a negação do conhecimento”.

A escola não é responsável pelo envolvimento dos problemas dos estudantes oriundos de questões biológicas, familiares e sociais; contudo, se encontrar meios que minimizem essas questões e contribuam para o desenvolvimento cognitivo, terá cumprido adequadamente o seu compromisso.

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA DE EDUCAÇÃO

Em meio às dificuldades no ensino e aprendizado de matemática, verifica-se a necessidades de métodos diferentes dos adotados até então. Um deles pode ser a modelagem matemática na educação, sendo o termo modelo, que significa algo a ser reproduzido, algo que serve de exemplo a ser seguido. Modelos são desenvolvidos, o tempo todo, para solucionar problemas do cotidiano. Na Educação Matemática, a modelagem é considerada um instrumento que contribui para o estudante assimilar melhor o mundo em que vive, pois, por meio de modelos, com conteúdos matemáticos, o estudante pode verificar o que está a sua volta, com um

olhar matemático. A obtenção de um modelo passa por um caminho que pode levar a uma melhor sistematização de idéias, uma melhor compreensão de situações, de previsão e de aplicação em outras áreas que não sejam da matemática. Isso se caracteriza uma modelagem matemática. O que é modelagem matemática e como utilizá-la no ensino de matemática serão tratados nesta seção.

2.3.1 Modelo e modelagem matemática

Para Biembengut (2004 p. 11), “a ideia de modelagem matemática resume-se a imagem de um escultor trabalhando com argila produzindo um objeto”. Na concepção da autora, o objeto citado se refere ao modelo e o processo da criação desse modelo, se chamando modelagem matemática. Segundo BLUM (1995), a modelagem matemática “é um método de pesquisa que parte de uma situação-problema de alguma área do conhecimento e busca solucioná-la utilizando-se das teorias matemáticas.

Tem-se a compreensão de que o termo modelo matemático possui diferentes significados. Dependendo do estudo de cada autor, apresenta-se um significado diferente. Entretanto, situações do mundo real podem apresentar problemas que necessitam de soluções e de decisões oriundas da matemática. Seja qual for o caso, a resolução de um problema, em geral, quando quantificado, necessita de uma solução matemática precisa.

A ideia de modelo matemático, baseando-se nas reflexões feitas anteriormente, desenvolve uma nova característica em relação à matemática, passando a ser denominado modelo matemático. Segundo Biembengut (2004 p. 12), “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduz, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema de situação real, é denominado de modelo matemático”.

A esse respeito, a autora ainda diz que:

Um modelo matemático é um sistema de símbolos arbitrários, mediante os quais cooperam e atuam entre si os elementos de um fenômeno. Isto significa que sua organização é regular e não fortuita; constitui-se de um sistema, uma estrutura e uma série de símbolos e significados de acordo com o fenômeno estudado e por meio do qual se pode aprender ainda mais sobre esse fenômeno (BIEMBENGUT, p. 29, 2009).

Para Bassanezi (2002 p. 20), o modelo matemático de um fenômeno consiste em “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduz, de alguma forma, o objeto estudado”. Assim, pode-se dizer que a matemática é composta de seus conteúdos que possuem expressões como equações, funções, fórmulas, tabelas, formas e teorias, é um conjunto de modelo.

A utilização de um modelo matemático, nas concepções de Biembengut (2004), diz que um modelo matemático só será validado se for utilizado como referência, ou seja, reproduzido nas resoluções de problemas semelhantes, procedendo ao modelo, tornando-se um estímulo para o desenvolvimento de outros conhecimentos. Bassanezi (2002), por sua vez, diz que a importância do modelo matemático fundamenta-se em ter uma linguagem precisa que apresente as ideias de maneira clara e com um único significado.

Nota-se que os meios utilizados para atingir um modelo matemático não são simples; alguns esforços deverão ser realizados para alcançar uma representação matemática. Com isso, o tipo de modelo a ser utilizado dependerá da situação analisada e de variáveis que a envolva. Esse processo de desenvolvimento de um modelo matemático passa por um procedimento denominado modelagem matemática. A modelagem matemática pode ser interpretada como método de criação de um modelo, além disso, quanto maior o conhecimento do modelador, mais detalhado será o modelo.

Para D’Ambrósio (1986), modelagem matemática é um processo completo para encarar situações que se destacam com soluções efetivas de um problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial, pois, segundo Biembengut (2009), “por meio de um modelo matemático é possível compreender o fenômeno que o gerou, fazer uso para solucionar uma situação-problema similar ou ainda, explicar um fenômeno, deduzir, inferir ou mudar uma situação; encadeia muitas revelações significativas”. A autora ainda define a modelagem matemática como uma “arte”, ao desenvolver, resolver e criar expressões que sirvam não apenas para uma única situação, mas para posteriormente em outras aplicações.

Blum (1995 p.5), diz que a modelagem matemática é um “processo de construção de modelos que transformam uma situação real em uma situação matemática”. Para Bassanezi (2005 p.16), “Modelagem Matemática baseia-se na ‘arte’ de tornar problemas da realidade em problemas matemáticos, interpretando suas soluções em uma linguagem do mundo real”.

Segundo Biembengut (2009), a modelagem matemática faz o mesmo percurso que a investigação científica, por isso ela vem sendo defendida como um método de ensino que pode ser aplicado em qualquer nível de ensino “uma vez que oportuniza aos estudantes a aprender a arte de modelar bem como a arte de explicar as práticas matemáticas de culturas sociais” (BIEMBENGUT, 2009).

Acredita-se que, além da característica motivadora inseparável da aplicação da modelagem matemática no ensino, esse processo auxilia, de forma significativa, em reflexões, não só referentes à matemática do modelo em questão, mas na escolha dos métodos de resolução do mesmo, utilizando-se de tecnologias e recursos disponíveis. Entretanto também auxiliará nas interpretações das soluções encontradas na linguagem do mundo real, formando o ensino de uma matemática crítica.

Modelos matemáticos são ferramentas que auxiliam os estudantes a compreender informações e estimular novas ideias. Segundo Biembengut (2009), os modelos capacitam os estudantes a observar e refletir sobre fenômenos complexos, os modelos não apenas facilitam a ação diária das pessoas, mas estimulam processo mental desenvolvendo um pensamento produtivo. O autor propõe que, para se obter um modelo ou uma modelagem de situações com base na realidade, o processo é submetido a três etapas e seis sub-etapas sendo elas:

- *1ª Etapa* - Interação com o assunto: Reconhecimento da situação problema e familiarização com o assunto a ser modelado. É a etapa inicial que ocorre o reconhecimento do tema a ser problematizado. A situação a ser estudada será projetada, sendo que para o tema escolhido se tornar mais claro, deverá ser feita uma pesquisa sobre o assunto, por meio de livros, de revistas e de coleta de dados com especialista no assunto.
- *2ª Etapa* - Matematização: Formulação do problema e resolução do mesmo em termos do modelo. Essa etapa se constitui na tradução da situação para a linguagem matemática, sendo uma etapa complexa e desafiadora. Aqui se formula o problema e registra-o, conforme o modelo que resulte na solução. Para essa etapa, a criatividade e as experiências adquiridas anteriormente são elementos essenciais.

- *3ª Etapa - Modelo matemático:* Interpretação e verificação da solução. Para que o modelo seja concluído e dele se possa utilizar, nessa fase, ocorre uma validação do modelo, efetuando a verificação da solução do problema. A interpretação do modelo pode ser realizada por meio das características das soluções, resultado do modelo que está sendo investigado, para então verificar se está adequado à situação problema.

Por sua vez Bassanezi (2002 p. 26-31), faz um esquema que denomina atividades intelectuais da modelagem matemática, dividido em cinco etapas, mostradas a seguir:

- *1ª Etapa - Experimentação:* É uma atividade laboratorial, quando se desenvolvem os dados; os métodos experimentais são escolhas próprias da natureza do experimento. Nessa etapa, a presença de um matemático é essencial no sentido de facilitar os cálculos nos modelos matemáticos.
- *2ª Etapa. - Abstração:* é nessa etapa que os procedimentos levam à formulação do modelo matemático, sendo o momento que se selecionam as variáveis. Problematizam-se, criam-se hipóteses e simplificam-se os fenômenos.
- *3ª Etapa - Resolução:* nessa etapa, acontece a substituição da linguagem natural pela linguagem matemática coerente. A resolução dos modelos está ligada a ações matemáticas.
- *4ª Etapa - Validação:* nessa etapa, o modelo matemático – juntamente com as hipóteses formuladas são testadas – sendo comparadas com os dados empíricos. É nela a aceitação ou não do modelo proposto.
- *5ª Etapa - Modificação:* quando o modelo matemático foi testado e por algum motivo não foi aceito, causando rejeição, reinicia-se o processo de modelagem para verificar os dados iniciais.

Segundo os autores, a modelagem matemática consiste em tornar situações problemas em situações matemáticas e funciona como um processo de obtenção e validação de um modelo matemático. As definições dos autores sobre modelagem matemática se convergem até certo sentido, na condução das atividades de modelagem matemática para o ensino e aprendizagem dessa matéria.

Bassanezi (2002) diz que:

[...] Modelagem Matemática, é um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos, cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2002 p. 24).

Entende-se que há uma única definição de modelagem matemática, porém existem diversos caminhos para a sua utilização no âmbito de educação matemática, o que muda é o contexto e a finalidade, ou seja, o “onde” e o “para que” a modelagem vai ser utilizada. Essa afirmativa procede uma vez que a busca é por caminhos que se utilizem da modelagem matemática no ambiente gerado pela mesma na sala de aula, levando-se em consideração a realidade escolar que está inserida.

2.3.2 Modelagem matemática na educação matemática e no ensino aprendido de matemática

A modelagem matemática na Educação pode ser um caminho, não se limitando apenas ao resultado ou à validação de um modelo matemático, mas sim dando importância ao processo e promovendo possíveis discussões matemáticas que puderam surgir durante o processo, a fim de abrir espaço para aplicação de conteúdos trabalhados e que podem vir a serem trabalhados.

A modelagem matemática, processo em que se utiliza ‘estrutura’ matemática para descrever, formular, modelar e resolver situação problema de alguma área do conhecimento, como processo e método pedagógico visa criar condições para que os estudantes aprendam a pesquisar e a compreender e aplicar a matemática que estão estudando (BIEMBENGUT, 2009).

Biembengut (2004) apresenta a modelagem matemática como um ambiente de aprendizagem; ao participar dele, o estudante é levado a questionar e buscar respostas aos seus questionamentos, por meio da matemática, situações originadas de outras áreas da realidade.

A forma de desenvolver modelagem matemática está ligada à utilização de problemas da realidade, pois se trata de uma oportunidade dos estudantes questionarem situações por meio da matemática, sem que métodos sejam previamente estipuladas, possibilitando caminhos diferentes de soluções. A modelagem matemática está concentrada na possibilidade de envolver estudantes em um ambiente capaz de investigar situações oriundas da realidade, não apenas para desenvolver problemas, mas para que o ambiente possibilite aos estudantes questionar e tirar conclusões por meio da matemática. A intenção da modelagem matemática como ambiente de aprendizagem é desenvolver um espaço, baseado nos questionamentos e nas investigações, tornando o ensino um cenário de investigações e tentando melhorar a forma atual de ensino, que atua de forma tradicional.

A aprendizagem de matemática se torna significativa quando desenvolvida por meio de contextualização, de experiências vivenciadas: o que acontece em situações de vida, na sociedade ou em culturas. Mesmo assim, os autores consideram a possibilidade de utilizar-se de situações fictícias para promover discussões e, de alguma maneira, fazer uso da modelagem matemática.

Para Bassanezi (2002), um problema real não pode ser apresentado de maneira exata, com toda a sua complexidade, por uma equação matemática ou por um sistema de equação. Mas, se desenvolver as variáveis essenciais do fenômeno observado, o modelo matemático que apresenta tal fenômeno poderá levar a soluções próximas daquelas observadas.

A aprendizagem por meio da modelagem matemática facilita a compreensão de diferentes características lúdicas da matemática. Por meio das aplicações, alternativas são descobertas no sentido de encontrar aptidões pessoais; segundo Biembengut, a aprendizagem matemática depende do interesse que a pessoa tem por alguma coisa, sendo que [...] “Uma vez que os estudantes podem experimentar a proposta de entender o tangível e o imaginário do meio que lhes rodeiam e as habilidades requeridas são ferramentas para isto” (BIEMBENGUT, 2009), a modelagem proporciona essas situações.

Nesse sentido, a atuação da disciplina de matemática com atividades reais remete a um estudo atual, preocupado com a formação plena do estudante, preparando-o para a vida. Segundo Biembengut, “na medida em que se estimula a curiosidade dos estudantes a compreender o meio

em que habitam, a formalizar ou representar diferentes acontecimentos ou informações percebidas e a elaborar categorias próprias como, por exemplo, símbolos e mensagens, a maioria dos estudantes exibe avanço gradual em sua habilidade de entender e de responder as atividades propostas” (BIEMBENGUT, 2009).

A utilização de modelagem matemática nos currículos de matemática vem recebendo grande espaço. Os principais argumentos que proporciona a utilização da modelagem matemática no currículo são: fatores motivacionais, desenvolvimento de diferentes habilidades, aplicação da matemática em diferentes áreas, compreensão da sociedade e da cultura na matemática.

Biembengut (2004) diz que, em relação à aplicação de modelagem matemática em sala de aula, uma das condições necessárias para o professor utilizá-la é que tenha audácia, desejo de mudar sua prática pedagógica, disposição para aprender coisas novas, sendo que a proposta de modelagem matemática abre caminho para novas descobertas.

Para isso, segundo Biembengut, o professor tem que:

[...] os professores de matemática precisam: modificar a concepção matemática que eles têm influenciados pela forma com a qual aprenderam; revisar as convicções sobre a aplicabilidade da matemática na resolução de situações problemas do cotidiano; identificar a matemática inserida nas mais diversas áreas do conhecimento humano para tê-la como um ponto de partida nas atividades pedagógicas (BIEMBENGUT, 2009, p. 2).

Para desenvolver a modelagem matemática com as adaptações necessárias, Biembengut (2004) propõe que os professores sigam três etapas: diagnóstico, escolha do tema e desenvolvimento do conteúdo.

O diagnóstico traça o perfil do estudante, valorizando o contexto social, o grau de conhecimento matemático do mesmo e a disponibilidade para cumprir o cronograma dos trabalhos propostos. Nesta etapa, o professor tem que conhecer o interesse dos estudantes para posteriormente escolher o tema. Diagnosticar o grau de conhecimento do estudante permite ao professor escolher os conteúdos a serem aplicados na investigação.

A escolha do tema a ser investigado pode ser feita pelo professor, mas a preferência é que os estudantes o façam. A escolha do tema proporciona vantagens e desvantagens para o processo de modelagem matemática. A vantagem é que, ao escolher o tema, o estudante sente-se coautor da investigação, sentindo-se estimulado a desenvolver as atividades que o processo de

modelagem matemática proporciona. A desvantagem é o fato que pode aparecer temas não adequados para desenvolver o tema programático ou difícil para se inteirar e para ensinar os estudantes.

Quando o professor perceber que a escolha do tema está tomando um caminho inadequado, o professor terá que aplicar estratégias que facilitem a escolha do tema pelos estudantes, um tema mais abrangente e motivador, sendo ele um tema de fácil acesso na busca de informação. Alguns autores dizem que seja qual for a postura do professor em relação à escolha do tema, o professor tem que buscar informações sobre o mesmo e preparar previamente o processo da escolha do tema.

Na terceira e última etapa – o desenvolvimento do conteúdo – desenvolve-se as mesmas etapas e sub-etapas do processo de modelagem de matemática, sendo elas a **Interação** que apresenta e reconhece-se a situação problema, a **Matematização**, em que acontece a formulação e resolução do problema e o **Modelo Matemático**, em que acontece a interpretação e validação. A partir desses momentos, existe um conteúdo a ser cumprido, cabendo ao professor fazê-lo fluir a partir do tema.

Baseando-se nas leituras realizadas, verifica-se que, para um processo de modelagem matemática ter sucesso em sala de aula, é preciso que se façam alguns procedimentos, além dos apontados até o momento, sendo eles importantes nos ambientes de ensino e aprendizados mediado pela modelagem matemática. Entre os procedimentos, está a conduta do professor, pois este tem que manter um clima de liberdade em sala de aula, estimulando a criatividade dos estudantes. Seguindo-se essas formas de materializar a modelagem matemática como um dos possíveis ambientes de aprendizagem em sala de aula, tendo como objetivo obter bons resultados para o ensino e aprendizado em matemática. Segundo Bassanezi (2003), a modelagem matemática tem sido uma proposta, um ambiente de ensino e de aprendizagem possível na Educação Matemática. Promovendo nos estudantes o aprendizado em matemática de um nível em que esses conhecimentos podem ser aplicados em outras áreas de conhecimento, ainda desenvolve um senso crítico de aplicação destes conhecimentos.

2.3.3 Modelação matemática

Para aplicar a modelagem matemática no ensino fundamental, foram feitas algumas alterações, consequência do nível de conhecimento dos estudantes e da falta de tempo para que fosse cumprido o conteúdo programático; quando a modelagem matemática tem tempo, conteúdo programático e espaço estabelecido – não cumprindo com todas as suas etapas – denomina-se Modelação matemática.

A modelação matemática norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar o modelo modelagem. Pode valer como método de ensino aprendizagem de matemática em qualquer nível escolar (BIEMBENGUT, 2004 p. 12).

Na modelação, segundo Biembengut (2009), o professor pode aplicá-la de dois modos: aplicando o conteúdo programático e, ao mesmo tempo, desenvolvendo o processo de modelagem; orientando os estudantes a pesquisar, modelar. Ou seja, a modelação consiste em ensinar o conteúdo programático tendo como base os modelos matemáticos aplicados nas mais diversas áreas, junto com o estímulo do professor a pesquisa. (BIEMBENGUT, 2009).

Os procedimentos de modelação matemática consistem em três fases – percepção e apreensão, compreensão e explicação, significação e modelação (BIEMBENGUT, 2009). Esses procedimentos podem ser aplicados em qualquer nível de ensino, a qualquer momento do ano escolar, de modo geral com todos os conteúdos, sendo que esses podem ser desenvolvidos de um modo flexível, para o que o professor tem a liberdade de ir e vir no processo de ensino-aprendizagem.

- 1ª Fase: percepção e apreensão – consistem em estimular o interesse do estudante em lidar com situações do meio em que vivem. A ideia é fazer que os estudantes desenvolvam atividades com coisas que os cercam, mas, com outro olhar, despertando no estudante um interesse em aprender matemática.
- 2ª Fase: compreensão e explicação – ensina os estudantes a compreender o mundo em que vive no sentido matemático, percebendo que as situações do dia-a-dia podem ser

representadas, matematicamente, por meio de símbolos. Partindo dos conhecimentos que os estudantes já possuem, esses poderão aprender conceitos que eles ainda desconhecem. Segundo Biembengut (2009, p. 17), “essa fase consiste em refazer um modelo matemático sobre algum tema que possa interessar aos estudantes, levando-os aos conteúdos programáticos”.

- 3ª Fase: significação e modelação – desenvolvem-se as habilidades criativas dos estudantes para resolver questões ou fazer representação de algum tema em relação a um modelo, desenvolvendo relações entre símbolos e o meio que estão inseridos. O objetivo dessa fase é fazer com que os estudantes tenham coragem e capacidade de organizar diversas situações que possam ser reescritas em linguagem matemática, permitindo que eles se interessem do uso da matemática para resolver problemas do mundo real. Segundo Biembengut (2009), “a aprendizagem é um processo circular de construção de relações entre estes componentes funcionais de conhecimento”.

Seguindo as concepções de Biembengut (2009) sobre modelação, esta pesquisa foi desenvolvida sob o enfoque de modelação matemática, pois foi aplicada no Ensino Fundamental, onde a professora tinha que cumprir o conteúdo programático, em tempo determinado, sendo o nível de conhecimento dos estudantes inferior.

3 APORTE EMPÍRICO

O tema da pesquisa surgiu ao se constatar o alto índice de reprovação nas turmas de 6º ano como mostram dados oficiais. No começo do ano letivo de 2010, a autora desta pesquisa observou grande dificuldade dos estudantes em aprender conteúdos que exigissem o conceito de multiplicação e divisão. Quando o estudante chega ao 6º ano do Ensino Fundamental, ele se depara com uma situação diferente, vivida até o momento escolar, pois passa a ter oito professores em vez de um. Os conteúdos programáticos de matemática aplicados no 6º ano necessitam dos conceitos de multiplicação e divisão; não de forma explícita como esses estudantes estavam acostumados nos anos Iniciais. Os conceitos de multiplicação e divisão estão inseridos nos conteúdos de potenciação, fração, interpretação de gráficos, porcentagens, por exemplo. Sem estarem claros esses conceitos, o aprendizado torna-se lento, pois, além do conceito do novo, precisam (re) lembrar o conceito de multiplicação e divisão. O estudante muitas vezes não aprendeu, apenas memorizou.

Esse capítulo está dedicado à apresentação dos processos metodológicos utilizados para o diagnóstico dos erros, diagnósticos esses coletados por meio de avaliações realizadas por estudantes do 6º ano. São apresentadas, também, a análise dos dados coletados por meio das avaliações e a classificação de erros, classificação essa baseada na teoria de análise de erros. Bem como o relato da experiência com o laboratório de matemática com alguns estudantes que foram selecionados a participar da aplicação de modelagem matemática.

3.1 DIAGNÓSTICO DAS AVALIAÇÕES PARA A CLASSIFICAÇÃO DOS ERROS

Ao iniciar o conceito de potenciação, a autora desta pesquisa verificou que os estudantes do único 6º ano, da Escola Frederico Ritter de Três Coroas do estado do Rio Grande do Sul, tinham dificuldades em desenvolvê-lo; entendiam que era uma multiplicação repetida, mas não conseguiam obter o resultado certo. Por isso, verificou-se nesta situação uma oportunidade de analisar essas dificuldades e encontrar uma forma de superá-las.

Conforme já foi escrito na seção 1.2 do capítulo I, para diagnosticar e superar essas dificuldades houve, em uma primeira etapa, uma aplicação de avaliações, compostas de questões de multiplicação e divisão para analisar e classificar os erros mais cometidos por essa turma. Em uma segunda etapa, alguns estudantes que apresentavam os erros mais repetidos foram selecionados e convidados a participar de um laboratório de matemática.

O laboratório de matemática, conforme a seção 1.2 do capítulo I, foi desenvolvido em quatro encontros; no primeiro, os estudantes receberam suas avaliações para analisar os seus erros, apontado qual conceito não teriam compreendido. No segundo encontro, os estudantes resolveram situações problemas que despertassem seus interesses. No terceiro e quarto encontros, desenvolveram-se – com os estudantes – modelação matemática.

A pesquisadora elaborou duas avaliações: uma contendo apenas questões de multiplicação e divisão de formar simples; outra avaliação contendo questões de situações-problema que necessitavam da aplicação dos conceitos de multiplicação e divisão. As avaliações não foram aplicadas no mesmo dia por considerar que as duas avaliações, juntas, poderiam ser cansativas aos estudantes. As aplicações dessas duas avaliações objetivavam diagnosticar o conhecimento de multiplicação e divisão dos estudantes sobre cujos propósitos os estudantes seriam avisados.

Aplicou-se a avaliação I (APÊNDICE I) com duas atividades, uma de multiplicação e a outra de divisão, totalizaram 23 questões, 12 de multiplicação e 11 de divisão. As questões eram de operações matemáticas, assim estudantes não tiveram problemas com interpretação. A aplicação das avaliações durou cerca de duas horas com 32 estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. Mas, no momento que se solicitou a eles a descrição do procedimento utilizado na resposta das questões, alguns disseram que não sabiam como expressar por escrito o que haviam feito.

Dias depois, a avaliação II foi aplicada (APÊNDICE II) – situações-problema que envolvia aplicação de multiplicação e divisão. Para responder às questões, os estudantes levaram cerca de duas horas e meia. Durante a avaliação, houve dúvidas por parte dos estudantes, a todo o momento eles perguntavam, por exemplo: *é de multiplicar ou dividir?*, *Quer a resposta completa?*. Houve tumulto na hora de relatar como havia sido para desenvolver os cálculos.

Ao comparar as duas avaliações, observou-se que, durante a aplicação da avaliação II, os estudantes mostraram dificuldades na interpretação da questão, pois nunca sabiam qual operação

aplicar. Na avaliação I, os erros aconteciam por falta de atenção, fazendo com que, muitas vezes, os valores ou os resultados da multiplicação fossem trocados.

3.1.1 Classificação dos erros das avaliações aplicadas

Para as classificações dos erros, as avaliações foram corrigidas uma primeira vez apenas para observar se a resposta estava certa ou errada sob o ponto de vista da autora desta pesquisa. Na segunda correção das avaliações, procurou-se ter um entendimento mais apurado, verificando no que refletia o erro e qual a sua origem. Em cada questão, houve uma quantificação em relação aos erros e acertos como mostram as figuras a seguir, para que assim pudéssemos selecionar os estudantes com os erros mais repetidos. As questões com o número maior de erros tiveram uma classificação, quanto ao seu tipo de erro, baseados nas leituras feitas sobre análise de erro, apresentados nas tabelas I e II. Conforme Cury (2004) aplicou em suas pesquisas, erros foram divididos em classes, que variam do A até o D. As tabelas II e III a seguir apresentam a quantificação dos erros e acertos das avaliações realizadas pelos estudantes. As figuras I e II ilustram estes resultados:

Questões	NºAcertos	NºErros
Questão a	25	7
Questão b	18	14
Questão c	20	12
Questão d	21	11
Questão e	18	14
Questão f	21	11
Questão g	19	13
Questão h	16	16
Questão i	20	12
Questão j	18	14
Questão k	20	12
Questão l	17	15

Tabela II: Números de acertos e erros nas questões da 1ª atividade de multiplicação.

Questões	NºAcertos	NºErros
Questão a	31	1
Questão b	21	11
Questão c	17	15
Questão d	16	16
Questão e	14	18
Questão f	20	12
Questão g	13	19
Questão h	13	19
Questão i	18	14
Questão j	20	12
Questão k	20	12

Tabela III: Números de acertos e erros da 2ª atividade, das questões de divisão.

A tabela II apresenta os números de acertos e erros das questões de multiplicação, sendo que, na maioria das questões, o número de acertos foi maior que o número de erros, mas esses existiram em algumas questões. Em algumas questões, o número de acertos foi semelhante ao do número de erros, sendo que, na questão *h* da atividade *um* (APÊNDICE I), houve o mesmo número de acertos e de erros; o item *h*: (745 x 56). Essas questões apresentam algoritmos altos, isso confunde o cálculo do estudante. Eles se atrapalharam ao aumentar as dezenas, ao calcular corretamente a multiplicação e até mesmo na soma, resultando em erros.

A tabela III mostra os resultados das questões de divisão, neste quadro observa-se que em algumas questões o número de erros foi maior que o número de acertos, mostrando assim dificuldades que a turma possui em multiplicar e diminuir; pois se sabe que, para dividir, é preciso saber multiplicar. Isso é imprescindível para o entendimento do diagnóstico apresentado nas avaliações, com as informações. Analisando as questões de multiplicação, observou-se que treze estudantes cometem erros: a multiplicação pelo número zero, para eles, o resultado tem o mesmo valor que o multiplicador de zero, ex: $5 \times 0 = 5$.

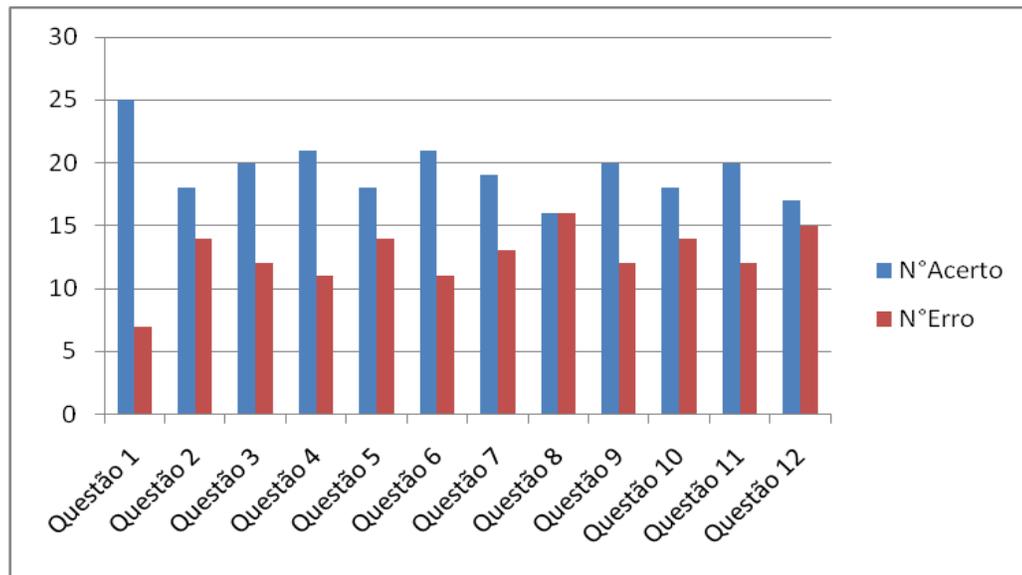


Figura I: Percentual de acertos e erros da primeira atividade da avaliação.

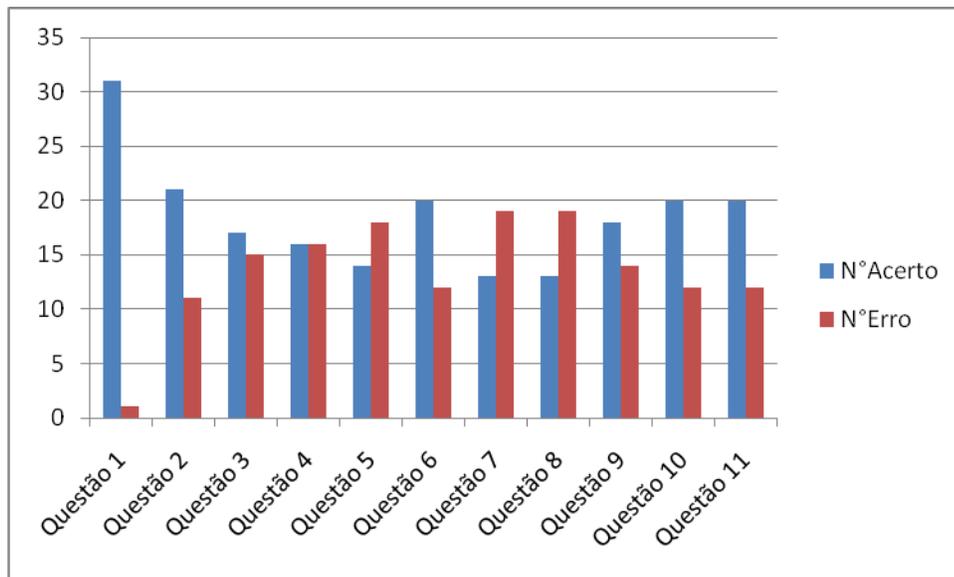


Figura II: percentual de erros e acertos da atividade dois da avaliação.

Iniciou-se a classificação dos erros baseando-se nas leituras realizadas conforme Cury (2004 p. 50) “o objetivo da investigação, além de analisar e classificar os erros, apresentados pelos estudantes participantes da pesquisa é desenvolver métodos que possam auxiliá-los em suas dificuldades”. Iniciando análise dos dados Figura I, buscou-se identificar qual a questão com maior listagem de erros para, assim, classificá-los. A questão identificada escolhida foi o item h, sendo ela: 745×56 , ordenou-se em classes:

Análise e classificação da questão número oito da primeira avaliação aplicada: h: 745×56

- **Classe A:** Na classe A estão os erros por falta de atenção, não percebem que estão somando de forma errada, não colocam em ordem os número, esquecem de aumentar as dezenas. Ex:

$$\begin{array}{r}
 745 \\
 \times 56 \\
 \hline
 3580 \\
 3525 \times \\
 \hline
 38830
 \end{array}$$

Neste exemplo o estudante esqueceu-se de aumentar as casas decimais, não atingindo, assim, o resultado correto.

- **Classe B:** Na classe B, estão os erros por falta de compreensão do conteúdo em si, pois erram na tabuada, não conseguem entender que todo número multiplicado por zero é igual a zero. É nesse erro que o estudante demonstra que, mesmo estando no 6º ano do Ensino Fundamental, não compreendeu ainda o que é multiplicar. Ex:

$$\begin{array}{r}
 \text{H)} \quad \begin{array}{r} 23 \\ 745 \\ \times 56 \\ \hline 4470 \\ + 3725 \\ \hline 41720 \end{array}
 \end{array}$$

Neste exemplo, o estudante não calculou certo quando multiplicou 5 x 6 e colocou que o resultado era 35.

Verifica-se que os erros podem surgir da falta de atenção do estudante ao calcular, ou da falta de compreensão do conteúdo. Como se visa, apenas, à classificação dos erros, desde o início, buscou-se encontrar no próprio erro uma forma de superação das dificuldades dos estudantes; por isso, analisamos apenas os erros da **Classe B** para que, assim, pudéssemos trabalhar com os estudantes que cometeram esse tipo de erro.

Fez-se, então, a categorização dos erros na listagem do segundo quadro, mostrando os erros de divisão, analisando-os e classificando-os a partir da questão com o percentual mais alto de erros. Neste caso, foi item g das questões de divisão.

$$1044 \overline{)12}$$

Análise e classificação da questão do item g da atividade 2, da primeira avaliação, sendo ela:

$$1044 \overline{)12}$$

- **Classe A:** A análise desta questão, não foi possível ser compreendida; havia resoluções impossíveis de decifrar, números absurdos sugeriram, não foi falta de compreensão da multiplicação, mas falta de organização. Ex

$$\begin{array}{r}
 \text{g)} \quad \begin{array}{r} 1044 \overline{)12} \\ -84 \\ \hline 0209 \\ -208 \\ \hline 009 \end{array}
 \end{array}$$

Neste exemplo, o estudante não encontrou o número menor que chegasse mais perto do dividendo.

- **Classe B:** Aqui há erros por falta de atenção. Estudantes que, ao fazerem a resolução da questão em outro lugar, copiam errado; trocam o divisor ou o dividendo. Ex:

$$\begin{array}{r}
 \text{a)} \quad \begin{array}{r} 91044 \overline{)12} \\ -90 \\ \hline 0146 \\ -144 \\ \hline 000 \end{array}
 \end{array}$$

Neste exemplo, o cálculo que o estudante resolveu está correto, mas o enunciado do exercício não era esse, o estudante errou por falta de atenção.

- **Classe C:** Corresponde aos erros de multiplicação, como mostra o exemplo:

$$\begin{array}{r} 1044 : 96 \\ \underline{-96} \\ 84 \\ \underline{-96} \\ -12 \end{array}$$

12
8

Neste exemplo, além de o estudante multiplicar errado, ele mostra não saber nenhum conceito de divisão, pois não subtraiu do dividendo e ainda repetiu o número.

Aqui há a mostra flagrante que o estudante não sabe multiplicar; conseqüentemente, não saberá dividir. Cury (2004 p. 55), nas análises feitas em um dos seus trabalhos, percebeu que os estudantes mostravam dificuldades em resolver questões com operações dos conjuntos racionais, isso provocava problemas em resolver questões com frações algébricas: se não sabia resolver questões com frações numéricas, certamente não conseguiria resolver questões de caráter frações algébricas.

- **Classe D:** Nesta classe, o estudante comete um erro, subtraindo de um número menor um número maior, atingindo um resultado errado. A noção de divisão que ele mostrou ter entendido – critério de subtração – não estava claro para ele. Ex:

$$\begin{array}{r} 1044 : 96 \\ \underline{-96} \\ 84 \\ \underline{-96} \\ -12 \end{array}$$

87
84

Continuou-se o trabalho de pesquisa analisando a avaliação II (APÊNDICE II) aplicada na mesma turma a qual continha oito questões que apresentavam situações-problema; os próprios estudantes tinham que perceber quais as operações a serem aplicadas; quais os métodos que necessitariam ser utilizadas. Além disso, a questão só estaria correta se, além dos cálculos estarem certos, o estudante mostrasse a resposta completa. Como a aplicação da segunda avaliação foi na mesma turma, a análise foi realizado em 32 avaliações.

A tabela IV a seguir mostrará os números de acerto e erro:

Questões	Nº Acertos	Nº Erros
1	25	7
2	14	18
3	22	10
4	18	14
5	15	17
6	11	21
7	9	23
8	8	24

Tabela IV: Número de acertos e erros das 2ª avaliação aplicada.

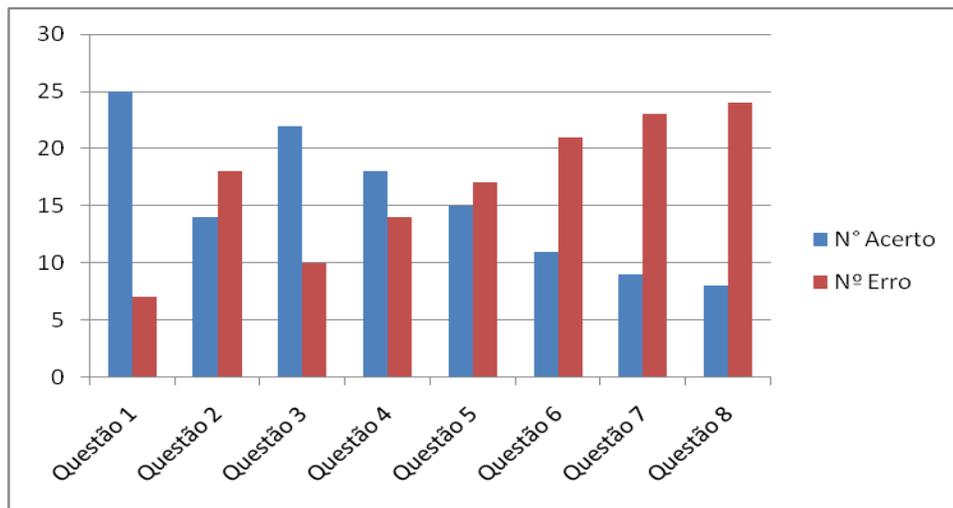


Figura III: Números de acertos e erros dos problemas de matemática.

Ao ser realizada a primeira análise nas respostas das situações-problema da avaliação, encontrou-se uma porcentagem alta de erros, os estudantes mostraram uma deficiência em interpretar os dados do problema, não sabendo quando terão que aplicar a multiplicação ou a divisão. Após a verificação das avaliações, fez-se a categorização, formando assim a classificação dos erros. Nessa segunda categorização, utilizou-se critérios diferentes para classificação dos erros em relação à primeira avaliação, foram analisadas as questões 1, 6 e 8, em que o percentual de erros foi crescente. Iniciou-se a classificação dos erros da questão 1, sendo ela:

Questão 1 – Em um teatro há 126 poltronas distribuídas igualmente em 9 fileiras. Quantas poltronas foram colocadas em cada fileira?

Essa questão teve o percentual maior de acertos, sendo considerada de fácil interpretação, contendo apenas duas informações; em função disso, houve apenas duas classes de erros.

- **Classe A** – Nesta classe, o erro foi cometido pela falta de interpretação que o estudante possui, na hora de aplicar a operação de divisão ele se confunde e aplica a multiplicação.
- **Classe B** - O estudante faz a interpretação correta e aplica a operação da divisão, mas erra na hora de efetuar o cálculo da divisão. Ex:

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 126} \\ \underline{-9} \\ 26 \\ \underline{-18} \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ \hline 12 \end{array}$$

Questão 6 – A distância da casa de Marquinhos até a sua escola é de 380 m. Quantos metros ele percorre para ir e voltar da escola de segunda a sexta?

O percentual de erro desta questão foi de 66%, como mostra o gráfico III, sendo que esta é uma questão que necessita de uma maior interpretação, o estudante precisa lembrar que de segunda a sexta serão cinco dias, que o estudante vai e volta da escola.

- **Classe A** – Neste caso, o estudante não interpreta a ida e a volta de Marquinhos até a escola, mas, lembra que de segunda a sexta há cinco dias, aplicando a multiplicação:

$$\begin{array}{r} 380 \\ \times 5 \\ \hline 79.00 \end{array}$$

- **Classe B** – Neste caso o estudante simplesmente não interpreta os dados corretamente, erra na divisão ao ignorar alguns dados do problema. Ex:

$$\begin{array}{r} 380 \overline{) 5} \\ \underline{35} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 00 \end{array}$$

- **Classe C** – O estudante consegue interpretar todos os dados, aplicando as operações corretas; na hora de calcular, erra, ainda não apresenta os cálculos efetuados dessa forma não foi possível analisar qual foi o seu raciocínio.

Iniciou-se a categorização dos erros da Questão 8, em que o percentual de erro foi de 75%, conforme tabela 3, é a última questão da avaliação pode-se associar essa quantidade de erro ao cansaço mental dos estudantes, por ser a última questão, ele não teria tanta atenção ao realizar as operações da questão 8; por isso, não é tão elaborada assim.

Questão 8 – Na escola de Pedro há oito classes de 35 estudantes, cinco classes de 33 estudantes e 12 classes de 30 estudantes. Qual é o total de estudantes nessa escola?

- **Classe A**- Este é outro caso de erros absurdos, cálculos sem explicações: alguns somavam e depois dividiam; outros multiplicavam em forma de sequência, multiplicando o valor anterior pelo próximo, esses estudantes mostraram não possuir habilidade para interpretar.

Ex :

Esses erros que aparecem no exemplo são cometidos apenas por um estudante, ele efetuou todos esses cálculos para tentar resolver apenas essas questões. Outro exemplo efetuado ainda nessa classe é a seguinte:

Depois de efetuar todos esses cálculos, a resposta que o estudante apresentou foi de 149 estudantes, ele utilizou todas as operações, não conseguiu interpretar o que o problema estava pedindo, mas não errou ao efetuar os cálculos.

- **Classe B** – Esta classe representa os erros cometidos nos cálculos, o estudante interpretou corretamente as informações e fez exatamente o que estava sendo solicitado no problema, mas, na hora de efetuar os cálculos, erra na multiplicação. Ex :

Handwritten multiplication problems showing errors:

$$\begin{array}{r} 280 \\ \times 8 \\ \hline 2240 \end{array}$$

X

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 5 \\ \hline 165 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 12 \\ \hline 300 \\ 304 \\ \hline 420 \end{array}$$

- **Classe D** – Esta classe corresponde aos estudantes que deixaram essa questão em branco, não a efetuaram; como não foram perguntados sobre as justificativas, não sabemos se foi por que não entenderam a questão ou por que não deu tempo de efetuá-las.

Após a categorização e classificação dos erros das avaliações aplicadas com os estudantes do 6º ano, que continham questões de multiplicação e divisão, selecionaram-se as avaliações nas quais os erros classificados apareciam. Para dar continuidade no trabalho da pesquisa, criou-se um de Laboratório de Matemática (uma sala com jogos de matemática, materiais pedagógicos) onde os estudantes vinham, no turno inverso, das aulas para trabalhar com os seus próprios erros, a fim de superar as suas dificuldades, aplicou-se o método modelação matemática.

3.1.2 Experiência com o laboratório de matemática para superação de dificuldades

A ideia do laboratório de matemática surgiu quando a autora desta pesquisa, ao realizar apoio pedagógico de matemática para estudante da escola onde lecionava, constatou uma oportunidade de aplicar a análise de erro com um método de ensino modelação matemática, pois eram turmas pequenas que demandavam a superação de dificuldades.

No laboratório de matemática, os estudantes desenvolveram as atividades a partir de seus erros. A ideia inicial era mostrar as avaliações aplicadas para que eles observassem seus erros e, assim, analisassem o que eles não estavam entendendo, onde estariam as suas dificuldades.

Das avaliações realizadas com eles, 10 continham os mesmos erros mencionados na seção anterior. Assim, a partir da identificação dos estudantes, buscou-se apoio junto à coordenação da escola para realizar um trabalho, utilizando-se da análise de erros e de modelação matemática

como método de ensino para auxiliá-los na superação destes erros. Com o consentimento dos pais, os estudantes iniciaram a realização do trabalho no turno contrário do horário de aula.

Como a turma do 6º ano estudava no turno da manhã, as atividades foram realizadas durante quatro dias das 13h30min às 16h30min, com um intervalo de 15 minutos. Era uma turma de dez estudantes com grandes dificuldades em matemática; principalmente em relação à multiplicação e divisão. Os estudantes, inicialmente, mostraram-se descontentes em ter de frequentar a escola no turno inverso, mas logo as regras foram estabelecidas: as atividades não seriam como as da sala de aula. Foram quatro encontros, divididos em dois momentos de ensino: análise de erro e modelação matemática, descritos a seguir.

No primeiro encontro, a avaliação I foi realizada pelos estudantes. Com as devidas correções, o gabarito foi exposto, solicitou-se a eles que comparassem as repostas do gabarito com suas respostas. Cada estudante observou quais respostas das questões não estavam iguais; a partir dessa observação, eles foram incumbidos de uma segunda tarefa: tentar encontrar a resposta certa, aplicando outro cálculo que usou para resolver da primeira vez. Nesse momento, os estudantes estavam em duplas para que pudessem discutir e até mesmo comparar os seus erros, as conversas que surgiram foram: *Você esqueceu-se de colocar o zero, De onde você tirou essa resposta.*

Alguns estudantes conseguiram observar onde estava o seu erro chegando, assim, à resposta certa. Porém, com outros estudantes o processo foi mais lento, necessitando da presença da professora para apontar onde estaria o erro. A professora, no entanto, não mostrava onde estava o erro, mas, sim respondia ao estudante com outra pergunta, instigava-o a buscar um caminho para uma resposta certa.

No segundo encontro, os estudantes analisaram a avaliação II (APÊNDICE II), que continham situações problema. Neste encontro, não foi exposto o gabarito; embora os estudantes soubessem que a questão estava errada, não sabiam o que haviam errado. Neste caso, os estudantes mostraram-se mais empolgados com o desafio de encontrar o erro; de perceber qual o caminho certo. Desta forma, a presença da professora foi menos solicitada entre as duplas. Logo após encontrar os erros, as duplas relatavam ao grupo onde estava o erro, e era muito comum se escutar: *eu cometi o mesmo erro.*

Nos outros encontros, foi aplicado um método de ensino que possibilitasse a eles melhorar sua aprendizagem destes conceitos matemáticos. Biembengut (2004) diz:

O ensino aprendizagem de Matemática será mais gratificante, uma vez que o estudante passe a aprender o que lhe desperta interesse, tornando-o então co-responsável pelo seu aprendizado. E o professor orientador também sai ganhando no sentido de que cada tema escolhido por seus estudantes possibilita aquilatar seu conhecimento (BIEMBENGUT, 2004 p. 29).

Pode-se notar que os estudantes sentiam prazer em voltar ao laboratório de matemática, a cada encontro, tinham mais novidades em relação às aulas de matemática. Eles não vinham ao laboratório para ganhar respostas e sim para buscar, investigar as respostas. Os próximos encontros foram realizados por meio do método de ensino modelação matemática

3.1.3 Experiência com modelação matemática

No terceiro encontro, antes de se fazer um trabalho de modelação, elaborou-se um conjunto de situações problemas. Iniciando com apresentação de uma situação-problema, relativo a salários, como a maioria dos pais desses estudantes trabalha em fábrica de calçados. Seus salários são obtidos pelas horas trabalhadas – eles ganham por hora – propôs-se o seguinte problema: Seu João trabalha na fábrica de calçados Bom Pisar, recebe R\$ 3,00 a hora. Quanto ele deverá receber se trabalhar durante uma semana, fazendo duas horas extras, por dia?

Esse problema para os estudantes souo como algo familiar, pois eles observavam seus pais em casa, calculando quanto eles iriam ganhar em um mês. Assim, baseados nos contracheques dos familiares, os estudantes, divididos em três grupos (dois com três componentes e um com quatro componentes), passaram a resolver o problema aplicando os seus conhecimentos matemáticos.

As operações matemáticas – adição, subtração, multiplicação e divisão – efetuadas pelos estudantes, não estavam erradas; ocorreu, porém, um erro que passou despercebido pela professora, pois o operário de uma fábrica trabalha 44 horas semanais e 220 horas mensais, as horas trabalhadas a mais são pagas com no mínimo 60% a mais do valor trabalhado na hora normal. Nos dois exemplos, os estudantes calcularam como se os operários trabalhassem 40 horas semanais, não ganhando um percentual a mais durante as horas extras.

Os estudantes começaram a resolver levantando algumas questões como: *uma semana tem sete dias, mas eles só trabalham cinco dias, pois sábado e domingo não contam, ou contam?*

Mas tinham certeza que, durante o dia, seus pais trabalhavam oito horas se, não fizesse hora extra, como o problema informou que seriam duas horas extras os grupos calcularam assim: *- oito horas normais mais duas extra, resultando em dez horas. A única dúvida restante ainda era se eles calculavam ou não por sete dias. Mas o cálculo propriamente dito estava certo, não houve erros.*¹

Os procedimentos realizados pelos estudantes foram os seguintes:

- 1º: registraram as informações que o problema apresentava;
- 2º: reconheceram que o pai ganhava R\$ 3,00 reais a hora;
- 3º: começaram há verificar quantas horas têm uma semana, contando cinco dias de trabalho;
- 4º: chegaram ao seguinte cálculo: se trabalha oito horas diárias, e a semana de trabalho tem cinco dias, multiplicar-se (5x8), resultando em 40 horas.

Outros ainda calcularam: se trabalham oito horas diárias e mais duas horas extras, totalizando dez horas, multiplica-se por cinco = 50 horas. Com esse cálculo, chegaram à resposta correta.

A segunda situação problema continuava no assunto de salário, mas as informações eram outras:

O salário de seu João, no mês de março, foi de R\$ 1200,00 reais, ele continua ganhando R\$ 3,00 a hora, mas quantas horas extras ele fez para receber esse valor? Os estudantes continuavam no mesmo grupo, logo os mesmos iniciaram a formulação de questões para a resolução do problema, em um dos grupos a questão levantada foi: *quantas semanas tem o mês de março?*

Se for quatro, temos que encontrar o valor que, necessariamente, ele trabalhou, sendo que pelo menos oito horas diárias ele teve que trabalhar. Assim seguiram criando hipóteses a serem respondidas. Neste problema, o professor foi mais solicitado pelos grupos, mas a cada pergunta outra pergunta surgia. Essas questões permitiram passar para uma etapa em que se buscou aplicar alguns procedimentos da modelação.

¹ As falas dos alunos estão em itálico.

Ainda no terceiro encontro, logo após o recreio, a professora do laboratório de matemática expôs o tema aos estudantes: a construção de casa. Logo os alunos já levantaram alguns questionamentos, por exemplo: - *gostaria de saber quanto de tijolos são necessário para a construção de uma casa, e saber quanto custa construir essa casa, pois meu pai é pedreiro, vejo-o fazendo orçamento de construções e os clientes apenas informam os metros quadrados.* Outro estudante lembrou que, ao aprender formas geométricas, os estudantes haviam desenhado uma planta baixa de uma casa utilizando-se de um *software* chamado *X-HOME 3D*.

Imediatamente o professor aceitou a ideia e formulou o seguinte questionamento: para a construção de uma casa são necessários quantos tijolos por metro quadrado, quantos quilos de cimento por metro quadrado e quanto custará a sua construção? A professora colocou a questão no quadro para que os estudantes começassem a pensar em como descobrir tudo isso. Logo após, a professora pediu que os estudantes desenhassem em um papel a casa que eles gostariam de ter, estipulou as medidas: oito metros de comprimento e sete de largura, sugerindo que utilizassem um centímetro da régua como sendo um metro.

O quarto – e último – encontro realizou-se no laboratório de informática para que pudessemos utilizar-se do *software X-HOME 3D* cujo manuseio já era de domínio dos estudantes. O *software* tem uma tela quadriculada com um centímetro de lado; portanto, foi sugerido aos estudantes que cada quadrado corresponderia a um metro quadrado. Após essas combinações feitas, eles começaram a desenhar no *software* a casa projetada.

Cada quadrado de 1cm^2 seria equivalente a 1m^2 , portanto eles tiveram que usar oito quadrados de frente e sete quadrados de largura, dentro desse retângulo eles poderiam criar a casa como tinham imaginado, com quartos, banheiros, salas, cozinha, enfim como bem entendessem, desde que não ultrapassassem dessas medidas que foram exigidas.

Os estudantes se utilizaram de sua criatividade e criaram projetos de casas bonitas e diferentes umas das outras. Com o desenho pronto e impresso, foram feitos alguns questionamentos a eles:

- Qual a área quadrada de cada parte da casa?
- Qual a área quadrada da casa inteira?
- Quanto se gastaria em reais com tijolos e cimento para cada parte da casa?

Os estudantes estavam separados em duplas, começaram assim a discutir como iriam calcular tudo o que estava sendo solicitado. Escutavam-se os seguintes comentários

- a professora falou que cada quadrado desses corresponde a 1m^2 , portando se contarmos quantos quadrados desses resultará na área quadrada de cada parte da casa.

Foi assim que eles perceberam quantos metros quadrados tinha cada parte da casa e a casa inteira, eles se perguntavam: *como fazer para descobrir quantos tijolos seriam necessários para cada parte da casa e quanto de cimento?* Nesse momento a professora intervém dizendo que eles poderiam pesquisar na internet, quantos tijolos são necessários em média numa construção.

Eles imediatamente começaram a encontrar dados; logo verificaram que, para cada metro quadrado, são necessários 25 tijolos de um determinado tipo. Descobriu-se também que para cada metro quadrado são utilizados 8 kg de cimento, com essas informações eles poderiam saber quantos tijolos são necessários para a construção. Uma das duplas teve a ideia de fazer uma tabela. Os estudantes sabiam que tinham que multiplicar o metro quadrado de cada parte da casa pela quantidade de tijolos necessários e assim fizeram.

Partes da casa	Metros Quadrados	Nº de tijolos	Kg de cimento
Quarto 1	9 m ²	225	72 kg
Quarto 2	10 m ²	250	80 kg
Quarto 3	12 m ²	300	96 kg
Banheiro	3 m ²	75	36 kg
Sala	10 m ²	250	80kg
Cozinha	12 m ²	300	96 kg

Tabela V: Valores pesquisados.

Faltava uma resposta, mas, para isso, eles voltaram a pesquisar para saber quanto custava o tijolo que eles tinham colocado na casa. Não foi difícil, pois está cheio de sites e panfletos informando os valores de materiais de construção. Mas os tijolos não são vendidos em unidades e sim em milheiros, mas logo uma das duplas já falou: *é só dividir o valor total por mil.*

Encontraram então o valor unitário de cada tijolo. Com o cimento, utilizou-se o mesmo cálculo, pois, ele é vendido em sacos de 50 kg. Depois de descobertos os valores dos tijolos e do kg de cimento, eles descobriam quanto custaria para construir cada parte da casa que desenharam. Fazendo os seguintes comentários *Nossa! Teríamos que trabalhar muito para construir o que queremos.*

Utilizou-se a modelação para criar o desenho da casa, para encontrar a quantidade de tijolos que são necessários por metro quadrado, para elaborar o tema e as questões da modelação, passos utilizados na modelagem, pois tanto o tema escolhido quando as questões foram os

estudantes que criaram e elaboraram, utilizando-se de problemas reais que, segundo Bassanezi (2002), a modelagem consiste em transformar problemas reais em matemáticos, não se criaram fórmulas matemáticas para serem respondidas as questões; utilizaram as operações matemáticas, como a multiplicação e a divisão. A falta de tempo fez que o trabalho desenvolvido com modelação não fosse finalizado. Ainda Bassanezi (2002, p. 38) diz que o mais importante em uma aplicação de modelação não é a *validação* de um modelo, é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural.

Para verificar a aprendizagem matemática desses estudantes, aplicou-se a mesmas avaliações do início da coleta de dados para todos os estudantes da turma do 6º anos, durando as aulas de matemática.

3.2 APORTE ANALÍTICO: ANÁLISE DA EXPERIÊNCIA DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA COM A APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE ENSINO ANÁLISE DE ERRO E MODELAGEM MATEMÁTICA

As atividades realizadas no laboratório de matemática proporcionaram melhor aprendizagem matemática aos estudantes, em especial ao fazerem as aplicações dos conceitos matemáticos por meio da modelagem matemática. Esse resultado veio ao encontro do que diz D'Ambrósio (1986) “o estudante, ao mesmo tempo em que observa a realidade, a partir dela e por meio de produção de novas ideias e de objetos concretos exerce uma ação na realidade como um todo”.

No 1º encontro, quando os estudantes receberam suas avaliações corrigidas, houve certa resistência por partes deles em tomar consciência dos seus erros, resistência amenizada na medida em que perceberam seus erros. Buscaram, então, meios para corrigir conforme Borasi (1996) a análise de erro tem por objetivo a descoberta, entendida como uma investigação em sala de aula, encaminhar os estudantes a uma atividade de exploração. Por exemplo, essas correções foram permitidas a partir das conversas entre eles, de questionamentos que faziam para si e para os outros demais, tais como: *como fui errar; que falta de atenção*. Ou não conseguiam perceber onde estava o erro, então diziam: *não sei o que errei; não consigo enxergar*.

No 2º encontro, a análise de erros se tornou mais fácil; os estudantes entenderam como identificar o que erraram, por que o fizeram e como cometeram o erro. Os estudantes, nesta etapa, mostraram-se mais confiantes em dizer o que estava certo ou errado. Não se mostravam mais desconfortáveis em relação à exposição de seus erros. Tal atitude vem ao encontro do que diz Cury (2004, p. 79) que “quando um erro é usado como fonte de novas descobertas, considerando a possibilidade desse erro se transformar em um problema para os estudantes, onde os mesmos teriam que tentar resolvê-los inventando soluções que “promovam a aprendizagem””.

Durante os encontros que foram desenvolvidos com base na análise de erros, a professora procurou levar os estudantes a refletir sobre como estavam aplicando os seus conhecimentos matemáticos. Cury (2004) diz que o erro pode se constituir como um conhecimento, um saber que o estudante possui, elaborado de alguma forma, sendo que o papel do professor, neste momento, torna-se importante, pois ele precisará desestabilizar as certezas dos estudantes, levando-os a um questionamento sobre suas respostas.

O 3º encontro teve início com problemas reais. Os estudantes se sentiram familiarizados com a situação por se tratar de um problema corriqueiro em suas famílias, o problema questionava qual o salário a receber se trabalhar tantas horas a mais. Os estudantes não tiveram problemas em resolvê-lo, aplicando os conhecimentos adquiridos anteriormente, tendo o cuidado em não errar e efetuando os procedimentos com atenção.

O segundo problema aplicado apresentou uma situação familiar, mas um pouco mais complexo, apresentando menos informação, fazendo-os pensar mais, mas eles não se mostraram menos aptos a resolvê-lo, questionaram como poderiam realizar os cálculos, criando-se algumas hipóteses para obter a solução.

Ainda no 3º encontro, iniciou-se a modelação matemática, com o tema construção de casas. Este trabalho foi baseado no livro de Biembengut (2004), e adaptado para ser realizado no laboratório em três horas e meia de aulas. Essa adaptação foi necessária devido ao tempo restrito para efetuar uma atividade, de tal forma que os estudantes pudessem superar seus erros matemáticos relativos à multiplicação e divisão de números inteiros positivos. Não foi possível realizar todas as fases requeridas no processo de modelação matemática, defendidas por Biembengut (2004), apesar disso, percebeu-se a empolgação dos estudantes ao ter autonomia para desenvolver algo no laboratório de matemática. O tempo restrito de um professor em sala de aula não deve ser impedimento de utilizar-se desse método segundo Biembengut (2009):

A estrutura educacional com currículo partido em várias disciplinas, cada disciplina sob a responsabilidade de um professor e horários e períodos para cumprir cada fase escolar, sem dúvida, é a principal dificuldade para tornar a modelagem matemática um método de ensino e aprendizagem em sala de aula (BIEMBENGUT, 2009 p. 55).

A partir do tema proposto, os estudantes começaram a levantar questões para serem respondidas; dentre as questões, a de um dos estudantes era saber quantos tijolos seriam necessários para a construção de uma casa, e quanto, esta custaria.

No 4º encontro, eles iniciaram o desenho de uma planta baixa de uma casa com as medidas estipuladas pelo professor. A tarefa dada por ele não pareceu difícil; pelo contrário, os estudantes mostraram seus talentos criativos. A figura IV a seguir mostra um dos desenhos realizados por um dos grupos:

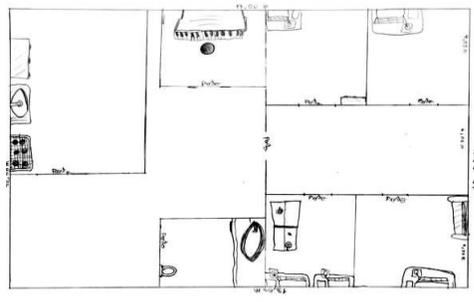


Figura IV: Planta baixa de uma casa.

Embora os estudantes, ao fazerem a planta baixa, não conseguissem fazer uma ligação entre a matemática da sala de aula com a matemática utilizada no desenho, eles aplicavam esses conhecimentos por meio de desenhos, conhecimentos geométricos como reconhecer o retângulo, o quadrado, fazer relação entre medidas, conhecimentos utilizados na vida real. Segundo Biembengut, a modelação matemática proporciona esse acontecimento ao estudante, traduz ou representa uma situação-problema por meio de uma linguagem matemática.

Os estudantes nem sempre resolvem problemas em sala de aula que façam sentido às atividades deles fora do ambiente escolar, problemas reais da vida pessoal ou da sociedade. Mais do que informar matematicamente, é preciso ensinar a matemática de forma aplicável ao cotidiano do estudante, proporcionando que se torne um indivíduo crítico e participativo da sociedade onde está inserido. Com isso, o ensino se tornará mais significativo.

Para que os estudantes aprendam matemática, é preciso que ensine de uma forma que ela seja mostrada como algo que está à volta do estudante, relacionada com sua vida. Segundo Biembengut (2009), a “educação matemática deve procurar meios para que os estudantes adquiram habilidade, para desenvolver e utilizar modelos matemáticos, para dar sentido às situações do dia a dia e de complexos sistemas da sociedade”.

Segundo D’Ambrósio:

[...] A matemática ensinada nas escolas brasileiras não permite que se crie uma elite científica, pois, a matemática ensinada nas escolas está muito fora da realidade do povo, insistimos na tese de ensino integrado com uma única possibilidade de se desenvolver valores científicos ligados a nossa realidade e não voltados a valores estrangeiros culturalmente colonizados (D’AMBRÓSIO, 1986 p. 15).

O estudante, na maioria das vezes, não está preparado para pesquisar, pois não foi ensinado a fazer isso; dificilmente é levado a ser responsável pelo seu aprendizado. Da mesma forma, não está acostumado a enxergar um problema do dia-a-dia com um olhar matemático, não fazendo a relação com os símbolos matemáticos. Segundo Biembengut (2009), a estrutura escolar vigente torna o professor o único responsável pela aprendizagem do estudante, tendo aquele que saber lidar com as diferenças culturais, identificar e atender o estudante que possui dificuldade de aprendizagem e ainda motivá-los a aprender.

[...] Nessa perspectiva, não é possível ignorar o importante papel que pode desempenhar o professor de matemática, ao reconhecer o ensino por meio de algoritmos como uma técnica ou um ambiente também necessário à resolução de algumas situações-problema, porém, na direção de desenvolver estratégias alternativas que melhor possam significá-las, visando em especial, à apreensão do conceito matemático (MORETI et. al, 2003, p.107).

O quarto encontro foi realizado no laboratório de informática para que pudessem desenhar a planta baixa da casa, utilizando-se do *software X-HOME 3D*; eles estavam ansiosos para poder desenhar por meio deste programa. Verifica-se que para os estudantes o simples fato de sair do ambiente de aprendizagem, utilizar-se dos computadores, torna-os mais estimulado.

Os estudantes estavam divididos em grupos, como no terceiro encontro, para que pudessem discutir os meios de encontrar as respostas para as questões levantadas. O passo inicial

foi a realização do desenho no programa. A figura V a seguir mostra um dos desenhos criados pelos estudantes:

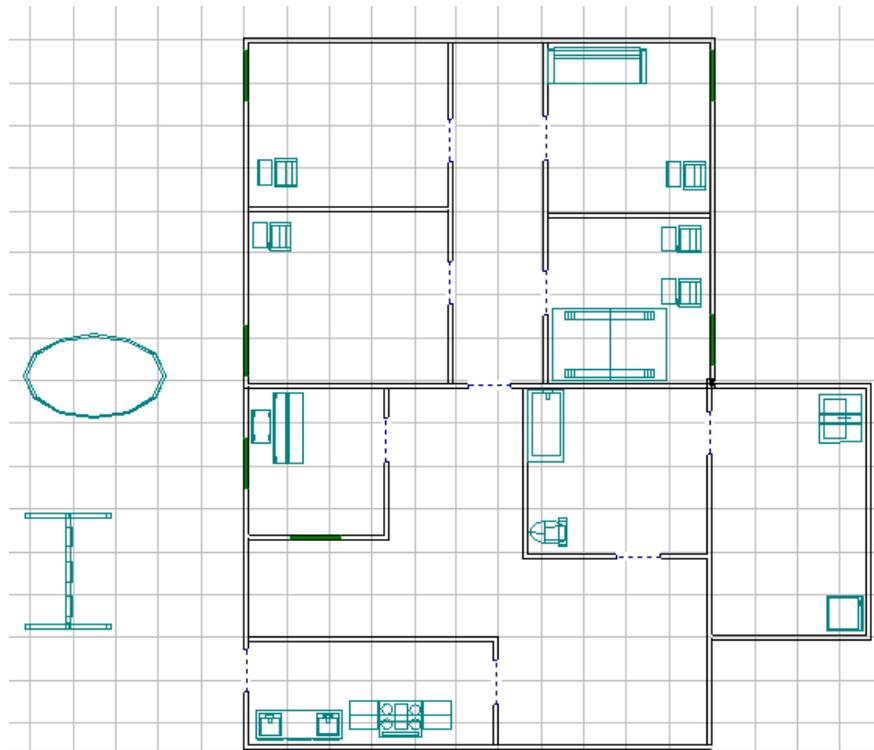


Figura V: Planta baixa de uma casa desenhada no *X-home 3D*.

Logo após a realização do desenho, os estudantes iniciaram a busca por informações para responder as questões, pois eles tinham que saber quantos tijolos seria necessário para cada metro quadrado, um dos estudantes disse que seu pai saberia, mas ele não estava ali para ajudá-lo. Senso assim, tiveram que pesquisar utilizando-se da internet.

O ensino realizado por meio de atividades investigativas proporciona ao estudante uma oportunidade de expor suas ideias, aplicar seus conhecimentos. Esses momentos revelaram os potenciais e as habilidades, tornando-os mais independentes, pois a busca por novas informações tem que partir dos estudantes, o professor está ali como um mero auxílio. Por meio de uma situação prática e das discussões realizadas no grupo, eles puderam desenvolver meios para encontrar a solução do problema, e compreender como se podem obter respostas às questões relativas à construção de uma casa.

Constatando-se a solução alcançada pelo estudante, a modelação matemática, quando aplicada em um ambiente de aprendizagem, proporciona e desenvolve no estudante um interesse

em ampliar seus conhecimentos, auxiliando na maneira de agir e pensar. Mas, a aprendizagem não depende de um só fator, como o ambiente de aprendizagem, segundo Biembengut (2009) o “ato de aprender depende do interesse e da necessidade que a pessoa tem e mais requer da pessoa: empenho, disciplina e perseverança”. Ao aplicar a avaliação para constatar se houve uma superação no conhecimento matemático, os estudantes mostraram ter superados as suas dificuldades, respondendo as questões com seriedade, aplicando os conceitos de matemática de uma forma prazerosa.

Foi possível identificar que, no início das atividades, os estudantes não se mostravam interessados em aprender conceitos matemáticos; por meio do método modelação matemática e o interesse deles por tópicos matemáticos evidenciaram que eles ainda desconhecem o significado prático, ao mesmo tempo em que aprende a arte de modelar matematicamente (BIEMBENGUT, 2004).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

Iniciou-se esta pesquisa com um incômodo: *como a análise de erro pode auxiliar na superação das dificuldades encontradas pelos estudantes de uma turma do 6º ano, com o auxílio do método de ensino modelagem matemática nos conteúdos que envolvam as operações de multiplicação e divisão*. Esperava-se verificar e compreender como os métodos de ensino: análise de erro e modelagem matemática podem auxiliar na aprendizagem matemática dos estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental.

As atividades desenvolvidas nessa pesquisa objetivaram conhecer e construir caminhos que melhorassem a aprendizagem dos estudantes em sala de aula, para assim contribuir para um ensino-aprendizagem eficaz. Ao elaborar essa pesquisa, procurou-se um embasamento teórico em leituras condizentes com o tema proposto. Como a aplicação do ambiente de aprendizagem teve dois momentos, cada qual com um tipo de método, as leituras realizadas foram divididas em dois momentos. O primeiro deles foi a leitura realizada em bibliografias referente à análise de erro; a outra, embasava-se em modelagem matemática.

As expectativas em relação aos resultados encontrados por meio da pesquisa, além de contribuir para os estudos de análise de erros e modelagem matemática, foram a de obter as repostas das questões apresentadas no capítulo um, que serão apresentadas a seguir.

Os métodos de ensino aplicados na pesquisa mostraram o quanto eles são importantes para a formação dos estudantes nos processos de ensino, sendo que esses métodos instigam o interesse dos estudantes em aprender, tendo o objetivo de melhorar suas compreensões sobre o contexto que os rodeiam. A pesquisa mostra, ainda, que esses métodos de ensino funcionam como um atrativo, tornando o ensino de matemática mais prazeroso; conseqüentemente, mais significativo e eficaz, melhorando o aprendizado do 6º ano.

Tais considerações foram concluídas após a coleta de dados, com 32 estudantes do 6º ano de uma escola municipal de Três Coroas, sendo que, logo após a coleta de dados, desenvolveu-se um laboratório de matemática, proporcionando um ambiente de aprendizagem com dez participantes. A pesquisa foi dividida em dois momentos: um, com aplicação de análise de erros; outro, com o método de ensino modelagem matemática. Por meio deste laboratório, pode-se ter subsídios para responder às questões:

-Como os erros matemáticos podem fazer os estudantes perceberem suas dificuldades em resolver as questões propostas?

Constatou-se que os estudantes tinham dificuldades em confrontar-se com seus erros, sendo que, durante uma primeira análise, não enxergaram os erros como forma de superação. Mas, em um segundo momento, o processo tomou uma característica de investigação; uma busca de superação de seus erros, tornando o ambiente de aprendizagem mais acessível.

Verificou-se que os estudantes passaram a ter segurança ao se confrontarem com os seus erros; em primeiro momento, o estudante se sente desestabilizado, não tendo interesse em analisar qual o caminho percorrido, ou seja, por que errou. Espera que o professor mostre um caminho que permita *cumprir* esta obrigação escolar: fazer conta. Considerou-se com a experiência do laboratório de matemática e a classificação dos erros, que por meio deles os estudantes podem elevar o seu conhecimento, pois o exercício de voltar ao erro faz o estudante repensar nos procedimentos a serem tomados e nos conteúdos a serem aplicados.

[...] o erro revela, para aquele que aprende a inadequação de seus esquemas e evidencia a necessidade da construção de outros e/ou a reformulação daqueles previamente existentes. Esse enfoque leva estudantes e também professores a serem sujeitos de seus próprios processos de reconstrução do conhecimento (SILVA, p. 12, 2008).

Para responder à segunda questão, analisou-se o comportamento do estudante após confrontar-se com os seus erros, sendo que a questão era: *Qual a influência da análise de erros para o ensino dos estudantes?*

Durante o desenvolvimento desta pesquisa, pôde se constatar que, para alguns estudantes, o erro não é problema. Se forem atribuídos conceitos baixos, ou se ele não aprender o conteúdo, nem sempre faz diferença. Ao analisar os erros matemáticos, os estudantes têm a possibilidade de compreender onde e como ele obteve o resultado errado, qual o conteúdo que não foi bem desenvolvido, assim poderá desenvolver novos métodos que possam superar as suas dificuldades.

Durante a análise de erro, o estudante mostrou-se um investigador, delineando seus próprios procedimentos por meio da análise; para o professor, a análise de erro fez com que verificasse os métodos de ensino usado em sala de aula, constatando o que está sendo aplicado, se está dentro do contexto sócio-cultural do estudante ou não. Verificou-se que a análise de erros

apresenta benefícios tanto para o estudante quanto para o professor, fazendo do ensino um processo de investigação constante, dando uma nova estrutura na relação professor-estudante.

Durante a experiência do laboratório de matemática, pôde-se constatar uma reorganização na relação professor-estudante, efetuando uma divisão de tarefa nas atividades propostas, pois nesse ambiente o professor não era o único a tomar iniciativas e a fazer descobertas. Verifica-se também uma mudança em conceber a matemática por parte dos estudantes, sendo que, a partir dessas atividades, os estudantes puderam constatar os seus erros.

Os métodos de ensino desenvolvidos na pesquisa levam o professor a refletir sobre as questões educacionais e sobre ações pedagógicas que possam melhorar o ensino em sala de aula, tornando as aulas momentos de aprendizagens. Essas propostas surgem de pesquisas realizadas em sala de aula.

Com base nessas afirmações e constatações, pode-se responder a questão: *Em que medida a modelação matemática pode contribuir para a superação das dificuldades dos estudantes em aprender operações de multiplicação e divisão?*

Na experiência com a aplicação do método de ensino modelação matemática, o professor tem que valorizar as considerações feitas pelos estudantes, respeitando as suas ideias, tomando o cuidado de não induzi-lo com as ideias do professor. Na aplicação do processo de modelação matemática, alguns conteúdos foram desenvolvidos, como geometria, unidades de medida e matemática financeira, utilizou-se ainda da tecnologia por meio do *software*, que possibilitou o desenvolvimento do processo de modelação matemática. A modelação matemática contribui para o desenvolvimento de habilidades como a observação e reflexão, desenvolveram-se também o interesse por buscar informação nas mais diversas fontes.

Constatou-se, durante a aplicação da pesquisa, que a modelação matemática, provocou inquietações para os estudantes, despertando neles a busca por conhecimentos até então desconhecidos, observando-se que entre os componentes do grupo uma satisfação quando encontrava o novo conhecimento e rapidamente esse conhecimento era socializado. Nas palavras de Bassanezi (2002), o ambiente de aprendizagem proporcionado pela modelação matemática “desperta maior interesse em ampliar o conhecimento e auxiliar na estruturação de sua maneira de pensar e agir”, fazendo a transformação de estudantes para estudantes-pesquisadores.

Por meio das atividades desenvolvidas pelos estudantes, observou-se que a modelação matemática, quando aplicada em sala de aula, proporciona o desenvolvimento de conceitos,

fazendo o estudante verificar um problema real que tem a necessidade da aplicação da matemática para resolvê-lo. Constatou-se também que, por ser um grupo pequeno, a descoberta de novos conceitos foi socializado com facilidade.

Durante a aplicação da modelação matemática, observou-se a capacidade que esse método tem em desenvolver no estudante a autonomia em relação ao saber, ou seja, ele próprio desenvolve o seu conhecimento, fazendo o estudante desenvolver a aplicação de conteúdos matemáticos em situações do seu cotidiano, dando oportunidade a ele de aplicar esses conhecimentos. A aproximação de situações reais com a matemática, aplicado por meio de modelação matemática, tornou os estudantes participantes do laboratório mais criativos e perspicazes; para aplicar a modelação matemática, os estudantes tiveram que ter criatividade e um raciocínio lógico.

A modelação matemática contribui para o estudante se tornar criativo, independente em termos de conhecimento, desenvolve um senso de investigação e oportunizando que ele verifique que a matemática pode ser aplicada em qualquer conhecimento, desenvolvendo sempre um modelo matemático que satisfaça a situação, ele passa a conceber a matemática de uma forma mais aplicável, clara e objetiva.

Ao conceber a matemática mais aplicável em seu dia-a-dia, o estudante constata que a matemática não é uma disciplina de fórmulas prontas e acabadas; que o processo de desenvolvimento de um conteúdo pode ser aplicado a partir do contexto sócio-cultural de cada escola ou estudante. Isso faz o estudante compreender os conteúdos matemáticos com mais facilidade em assimilá-los.

A modelação matemática é um método que chama a atenção por ter que usar a criatividade, desenvolvendo no estudante a autonomia de encontrar um modelo matemático que satisfaça o problema. Verificou-se que o aprendizado acontece de forma eficaz, pois junta a teoria com a prática, desenvolve o senso crítico. Faz com que o estudante tenha a capacidade de tomar decisões, ou seja, tornou-se autônomo. Dessa forma, o estudante conseguiu superar as suas dificuldades de uma maneira prática e aplicável.

No dia-a-dia, em muitas das atividades é evocado o processo de modelagem. Basta para isso ter um problema que exija criatividade, intuição e instrumental matemático. Neste sentido, a modelagem matemática não pode deixar de ser considerada no contexto escolar (BIEMBENGUT, 2004, p. 17).

Com aplicação da modelação matemática, constatou-se que não precisa de matemática sofisticada e nem de materiais de alta tecnologia para desenvolver no estudante a vontade de estudar e descobrir novos conhecimentos, tornando significativo, verificou-se que basta ter uma aula bem planejada, com a intenção de despertar no estudante motivação de aprender.

O método de modelação matemática proporcionou ao estudante uma melhor percepção entre a matemática do cotidiano e a dos conteúdos, melhorando assim o ensino e aprendizado dessa disciplina, pois torna apresenta-se mais concreta, semelhante à matemática ensinada nos anos iniciais do Ensino Fundamental, onde os índices de avaliação conseguem resultados maiores.

Considerou-se que, para desenvolver o processo de modelação matemática em sala de aula, precisa-se ter um professor bem preparado para lidar com situações e conhecimentos diferentes de uma aula tradicional: para que isso aconteça, o professor precisa de tempo e estudo. A aplicação de modelação matemática proporcionou um ambiente de investigação, que transformou o papel do professor diante dos estudantes, pois o aquele deixa de apenas transmitir o conhecimento pronto e acabado, tornando-se um mediador do desenvolvimento do conteúdo, desenvolveu-se uma sala de aula: professor e estudante desenvolvem um ambiente de aprendizagem.

A prática do ensino com o processo de modelação matemática veio confirmar que ensinar por meio de ambientes de aprendizagem, oportunizou discussões e reflexões por meio de investigações, provocando mudanças no ensino e aprendizado de matemática. Os trabalhos realizados nesse ambiente de ensino de matemática qualificaram o processo de aprendizagem.

A realização do processo de modelação matemática oportunizou os espaços para discussões e estudos do tema da realidade com os conteúdos, estreitando a relação entre o conteúdo de matemática e a realidade. O professor tem o papel importante nesse estreitamento, questionando o estudante sobre questões de matemática e os modelos a serem desenvolvidos.

Constatou-se que o processo de modelação contribuiu para o estudante desenvolver habilidades como a de discussões, reflexões e observações, perante os resultados encontrados, pois, o aluno precisava verificar se os resultados condiziam com as respostas esperadas. Verificando-se o desempenho em buscar informações que não estavam em seu meio escolar.

Modelação matemática, ao ser aplicada no ambiente de aprendizagem, não depende apenas do conhecimento e do comprometimento do professor; cada grupo de estudantes reage de forma diferente, diferenciando o resultado de cada aplicação de modelação matemática. Com isso não há uma estratégia de sucesso, para cada trabalho há uma maneira diferente de se aplicar a modelação.

Pode se constatar que o desenvolvimento de um laboratório de matemática, com aplicação de métodos de ensino que caracterizam um ambiente de aprendizagem depende do comprometimento e conhecimento do professor. Quanto maior for o grau do conhecimento do professor, maior será o grau de complexidade do modelo matemático desenvolvido.

Vendo-se dentro desse ambiente de aprendizagem, o estudante pode-se sentir o coautor das atividades desenvolvidas, em sala de aula; esse fato motivou o estudante a aprender mais. Contatou-se isso por meio do bom rendimento que os estudantes obtiveram durante aplicação da avaliação inicial. Verificou-se, também, que os estudantes se tornaram mais confiantes, seguros dos seus passos, se o erro aparecia, voltava-se ao início e corrigia-se.

A modelação matemática possibilitou aos estudantes do laboratório de matemática um ensino significativo, relacionando a matemática do cotidiano com os conteúdos matemáticos: a modelação matemática auxiliou o estudante a superar suas dificuldades de aplicação dos conteúdos de multiplicação e divisão.

Por meio desses dois métodos aplicados nessa pesquisa, pode-se verificar que podemos tornar o ensino de matemática mais prazeroso, com resultados mais eficazes, tornando a sala de aula um ambiente de aprendizagem, fazendo aproximações entre o professor e o estudante, conteúdo e prática. A análise de erros tem a possibilidade de fazer o estudante reconhecer o seu erro, mostrando a ele que o caminho percorrido está errado. Associado com o método de modelação matemática tal procedimento torna a matemática mais prática, solucionando problemas reais.

Surgiram algumas dificuldades, aumentando o papel do professor no processo de modelação matemática, sendo ele um motivador das atividades, o professor tem que estimular os estudantes a buscarem respostas às suas dificuldades. Cabe ao professor encarar os problemas que surgirem, pois ele dará suporte psicológico e técnico ao estudante.

Durante a pesquisa, destacaram-se várias oportunidades criadas pelo professor, por meio de questionamentos e promovendo reflexões sobre os modelos que os estudantes estavam

criando, esse processo fez que os mesmos se estimulassem e pudessem realizar atividades que antes não conseguiriam sozinhos. Ou seja, o estudante desenvolveu seu potencial, por meio de atividades investigativas, sendo que essas atividades proporcionam uma interação entre os estudantes.

Por meio dessa pesquisa, observou-se que é possível tornar o ensino-aprendizado de matemática mais satisfatório, quando desenvolvido com métodos de ensino que proporcione no estudante maneiras de encarar a matemática mais aplicável. Com bases nos registros dessa pesquisa, pôde-se compreender melhor os métodos de ensino como a análise de erro e a modelação matemática, permitindo criar novas experiências por meio desses métodos de ensino em sala de aula.

Sabe-se que os dados estatísticos apresentados pelos sistemas de avaliações do ensino, mostram um alto índice de reprovações, sendo elas oriundas de diversas situações, mas uma delas ainda é a falta de motivação em aprender matemática, pois o modo que normalmente se ensina é o tradicional.

Existem muitas atividades que podem ser aplicadas por meio de modelação matemática; essa atividade, segundo Biembengut (2004), pode contribuir para que os professores desenvolvam métodos de ensino-aprendizado, nos quais os estudantes podem adquirir habilidades investigatórias e desenvolverem conceitos matemáticos presentes nos modelos matemáticos.

Com as dificuldades encontradas em sala de aula e os registros de reprovações em matemática, propõem-se aos educadores de matemática a continuar a busca por caminhos que superem essas dificuldades, desenvolvendo métodos necessários para tornar o ensino de matemática mais eficaz, instigando o estudante a aprender de forma satisfatória.

REFERÊNCIAS

- ABRAHÃO, Maria Helena Menna Barreto. **O professor e o ciclo de vida profissional**. In: ENRICONE, Délcia. **Ser Professor**. Porto Alegre. EDIPUCRS, 2004.
- ALLEVATO, N. S. G. O Modelo de Romberg e o Percurso Metodológico de uma Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, ano 21, n. 29, 2008, p.175 – 197.
- ALVARENGA, Karly B. **O discurso Pedagógico sobre os erros em Matemática**: algumas análises. In: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. BRASÍLIA – DF, 25 a 28 de Outubro de 2009.
- AQUINO. Julio Groppa (org.). **Erro e Fracasso**: Na Escola, Alternativas Teóricas e Práticas. São Paulo: Summus, 1997.
- ANACHE, A. A. Intervenção psicopedagógica: Como e o que planejar? **Seminário de Educação Inclusiva**: um compromisso político com a diferença, Faxinal do Céu, PR, 2000.
- ANOKHIN, P.K. The functional system as a unit of organism integrative activity. In: SYSTEMS SYMPOSIUM, 3, 1966. **System theory and biology**: proceedings. Berlin, Springer, 1968.
- BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. Editora Contexto, São Paulo 2002.
- BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino e Aprendizagem de Matemática**. 2. ed. Blumenau: FURB, 2004.
- _____. **Processos e métodos de ensino e aprendizagem matemática na formação continuada dos professores**. Estágio Pós Doutoral. 2009.
- BITTENCOURT, Jane. Obstáculos Epistemológicos e a pesquisa em Didática da Matemática. **Revista Educação Matemática**, v.5, n. 6, maio de 1998.
- BORASI, R. **Reconceiving mathematics instruction**: a focus on errors. EUA: Ablex Publishing Corporation, 1996.
- BLUM, W. Applications and Modelling in mathematics teaching and mathematics education – some important aspects of practice and of research. In: SLOVER, C. et al. **Advances and perspectives in the teaching of mathematical modeling and applications**. Yorklyn: Water Street Mathematics, 1995.

Brasil. Ministério da Educação e Cultura: **SAEB 97: Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica : primeiros resultados.** 2007.

CIASCA, S. M. **Distúrbios e dificuldades de aprendizagem em crianças:** Análise de diagnóstico interdisciplinar. Tese de doutorado, Campinas: Faculdade de Ciência Médica da Unicamp, 1994.

CURY, Helena Noronha. **Disciplina de Matemática em Cursos Superiores:** Reflexões, Relatos, Propostos. Porto Alegre, EDIPUCRS, 2004.

_____. **Análise de Erros:** O que podemos aprender com as respostas dos estudantes. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade a ação:** reflexões sobre educação e matemática. 2. ed., Campinas: Faculdade de Ciência Médica da Unicamp. São Paulo: SUMMUS, 1986.

ESTEBAN, Maria Tereza (org.). **Avaliação:** uma prática em busca de novos sentidos. 2. ed., Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

_____. **O que sabe Quem erra?** Reflexão sobre avaliação e fracasso escolar. 3.ed., Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

FERREIRO, Emilia; TEBEROSKY, Ana. **Psicogênese da Língua Escrita.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1985.

FONSECA, Maria da Conceição F. R. **Educação Matemática de Jovens e Adultos: Especificidades, desafios e contribuições.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

FONSECA, V. da. **Introdução às dificuldades de aprendizagem,** Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

GUTHRIE, E. R. **A Psicologia da Aprendizagem:** Edição revisada. Harper Bros: Massachusetts 1952.

HADJI, Charles. **Avaliação desmistificada.** Trad. Patrícia C. Ramos. – Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

_____. **Pensar e Agir:** da inteligência do desenvolvimento ao desenvolvimento da inteligência. Trad. Vanise Dresh. – Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

HOFFMANN, Jussara M. L. **Avaliação Mediadora:** uma prática em construção da pré- escola à Universidade. Porto alegre, Educação & Realidade, 1993.

HULL, David L. **The Philosophy of Biology.** Oxford, Ed. Oxford University Press, 1998.

IDE, S. M. O jogo e o fracasso escolar. *In: Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação*. Tizuko Kishimoto (org.), São Paulo: Cortez, 1996, p.89 – 108.

LORENZATO, Sergio. **Educação infantil e percepção matemática**. Campinas- SP: Autores Associados, 2006 189 p. A

_____. **Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. B

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação de Aprendizagem Escolar**. 19 ed. São Paulo- Cortes, 180 p., 2008.

MACEDO, L. de. Ensaio Construtivistas: O construtivismo e sua função educacional. **Revista Educação e Realidade**. Porto Alegre, v.18. n.1, 1992.

MORAES Roque, GALIAZZI Maria do Carmo. **Análise textual Discursiva**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2007.

MORETI, Mércles Thadeu; SOARES, Maricélia; ARRUDA, Joseane Pinto de. **O jogo das relações didáticas sob a influência dos projetos de trabalho**. Zetetike- Cempem-FE-UNICAMP-V.11-Nº.20- Julho/Dezembro de 2003- p.85-110.

NOGARO, Arnaldo. GRANELLA Eliane. **O erro no processo de ensino e aprendizagem**. Revista de Ciências Humanas da URI. Ano V, n ° 5, 2004. Disponível em: <http://www.uri.com.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/911.doc>. Data de acesso: 08 janeiro 2010 às 15 h 46 min.

PIAGET, Jean. **Development and learning**.*In: LAVATELLY, C. S. e STENDLER, F.* Reading in child behavior and development. New York: Hartcourt Brace Janovich, 1972.

_____. **Para onde vai a Educação?** Tradução de Ivete Braga – 15º edição. Rio de Janeiro: José Olympio. 2000. p. 79.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática: Estudo do Erro no ensino de Matemática elementar**. Campinas- SP Papyrus, 2000.

RIO GRANDE DO SUL. **Avaliação da Educação de 2007**. Boletim pedagógico de matemática da 5ª série/6º ano do ensino fundamental, SAERGS.

ROMÃO, J. E. **Avaliação dialógica: desafios e perspectivas**. São Paulo: Cortez, 1998.

ROSSINI, S.D.R. e SANTOS, A.A.A. (2001). **Fracasso escolar: Estudo documental de encaminhamentos**. In SISTO, F.F; BORUCHOVITCH, E. e FINI, L.D.T (Orgs.), *Dificuldades de Aprendizagem no Contexto Psicopedagógico*, pp. 214-235. Petrppolis, RJ: Vozes, SAMPAIO, I.

SILVA Eleonora Maria Diniz da. **A Virtude do Erro: uma visão construtiva da avaliação.** Estudos em Avaliação Educacional, v. 19, n. 39, jan./abr. 2008.

SKINNER, Burrhus Frederic (2003) **Ciência e comportamento humano.** 11. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2003. 489p.

VYGOTSKY, L. S. **A Formação Social da Mente.** São Paulo: Martins Fontes, 1991.

_____ **Pensamiento y Leguaje.** Buenos Ares: Ed. Lautaro, 1964.

TAILLE, Yves de La. O Erro na Perspectiva Piagetiana. *In: Erro e Fracasso: Na Escola, Alternativas Teóricas e Práticas.* Julio Groppa Aquino – São Paulo: Summus, 1997.

THORNDIKE, Edward L. **Princípios elementares da Educação.** Tradução de Haydeo Bueno de Camon, Ed. Saraiva, São Paulo: 1936.

TOLMAN, Charles W. **Psycholgy, socyty and subjectivity.** Routledge. LONDON, 1994.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e Linguagem: teoria do desenvolvimento cultural das funções mentais.** Buenos Aires, Ed: Lautaro. 183 p. 1964.

_____ **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** 4º Ed. São Paulo: Ícone. 1991.

APENDICE I**Avaliação de Matemática:**

1) Multiplique:

- a) 321×12
- b) 256×15
- c) 456×52
- d) 123×18
- e) 852×20
- f) 405×13
- g) 159×63
- h) 745×16
- i) 489×14
- j) 741×16
- k) 203×16
- l) 145×18

2) Divida

- a) $128 : 4$
- b) $265 : 8$
- c) $525 : 5$
- d) $656 : 4$
- e) $810 : 18$
- f) $325 : 13$
- g) $1044 : 12$
- h) $1242 : 18$
- i) $901 : 17$
- j) $810 : 15$
- k) $437 : 19$

APENDICE II

Resolva as Situações-problema:

- 1) Em um teatro há 126 poltronas distribuídas igualmente em 9 fileiras. Quantas poltronas foram colocadas em cada fileira?
- 2) Quantos garrações de 5 litros são necessários para engarrafar 315 litros de vinho?
- 3) Em um restaurante, a conta de uma mesa com 8 pessoas foi 104 reais. Como todos devem pagar a mesma quantia para pagar a conta, determine a quantia que cada um pagou.
- 4) Um livro tem 216 páginas. Quero terminar a leitura desse livro em 18 dias, lendo o mesmo número de páginas todos os dias .
- 5) Quantos grupos de 18 estudantes podem ser formados com 666 estudante?
- 6) A distancia da casa de Marquinhos até a sua escola é de 380m. Quantos metros ele percorre par ir e voltar de segunda a sexta-feira?
- 7) Em um jogo de basquete o time de Leandro fez 9 cestas de 3 pontos, 12 cestas de 2 pontos e 11 cestas de 1 ponto. Quantos pontos esse time fez no jogo?
- 8) Na escola de Pedro há oito classes de 35 estudantes, 5 classes de 33 estudantes e 12 classes de 30 estudantes. Qual é o total de estudantes?

APENDICE III

Venho, por meio deste, pedir-lhes autorização para que seu filho participe de um “Laboratório de Matemática”, com a finalidade de superar as suas dificuldades em desenvolver conteúdos matemáticos. O laboratório acontecerá no turno contrário do horário de aula, não atrapalhando o seu desempenho em sala de aula. O laboratório de Matemática será desenvolvido com aplicação de métodos de ensino: Análise de Erro e Modelagem Matemática. Os encontros serão realizados nas quartas feiras, das 13:30 às 16:30.

Eu _____ autorizo meu filho _____
a participar do laboratório de matemática, nas quartas-feiras, das 13:30 às 16:30.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P436a Pereira, Renata Brito
Análise de erros e superação de dificuldades matemáticas por meio da modelação matemática no ensino fundamental / Renata Brito Pereira. – Porto Alegre, 2011. 90 f.

Diss. (Mestrado) – Faculdade de Educação em Ciências e Matemática, PUCRS.

Orientador: Profa. Dra. Maria Salett Biembengut.

1. Matemática - Ensino Fundamental. 2. Aprendizagem - Dificuldades. 3. Análise de Erros (Matemática).
I.Biembengut, Maria Salett. II.Título.

CDD 372.7

Bibliotecário Responsável
Ginamara Lima Jacques Pinto
CRB 10/1204

