FACULDADE DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Renata Urruth Rosa

APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS EM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA - UMA ANÁLISE DA PRODUÇÃO DE ALUNOS DE 7ª E 8 ª SÉRIES DO ENSINO FUNDAMENTAL

Porto Alegre

2008

RENATA URRUTH ROSA

APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS EM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA – UMA ANÁLISE DA PRODUÇÃO DE ALUNOS DE 7ª E 8ª SÉRIES DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª Dra. Helena Noronha Cury

Porto Alegre, 2008

RENATA URRUTH ROSA

APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS EM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA – UMA ANÁLISE DA PRODUÇÃO DE ALUNOS DE 7ª E 8ª SÉRIES DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em 09 de janeiro de 2008, pela Banca Examinadora.

BANCA EXAMINADORA:

____

Profª. Drª. Helena Noronha Cury – PUCRS

____

Profº. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso - UFRGS

____

Profª. Drª. Laurete Zanol Sauer- UCS

AGRADECIMENTOS

Ao concluir esta etapa de minha vida acadêmica, agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, participaram desta pesquisa.

À professora Helena Noronha Cury, pela orientação durante a realização deste trabalho, pelo apoio e confiança, pela compreensão nos momentos difíceis e por contribuir para meu crescimento pessoal e profissional com sua rica experiência na área da Educação Matemática.

Aos professores Marcus Vinícius de Azevedo Basso e Maria Alice Gravina, que fizeram com que despertasse em mim o gosto pela Informática Educativa, no período em que fui sua aluna durante minha graduação na Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Ao colégio em que leciono, por apoiar e permitir a realização desta pesquisa em suas dependências.

Às professoras de Matemática da 7ª e 8ª séries, por me possibilitarem o trabalho com suas turmas e aos alunos que participaram das atividades propostas no laboratório de informática.

Aos grandes amigos, como a Thaiany Garcia, que compreenderam minha ausência em diversos momentos nesses últimos dois anos e àqueles, como a Jaqueline Fastovsky, com quem dividi a angústia da conclusão de um trabalho deste nível.

Ao meu noivo, Alexei que com seu amor soube compreender minha ausência ou “presença-ausente” em muitos finais de semana de intensa dedicação a esta dissertação.

E por fim aos meus pais, Milton e Gilca, grandes exemplos de minha vida que, atualmente, resolveram enfrentar a vida acadêmica em busca de um diploma de nível superior, dando-me mais uma prova de que nunca é tarde o bastante para ter sonhos, nem tão pouco para realizá-los.

“É melhor tentar e falhar,
que preocupar-se e ver a vida passar;
é melhor tentar, ainda que em vão,
que sentar-se fazendo nada até o final.
Eu prefiro na chuva caminhar,
que em dias tristes em casa me
esconder.
Prefiro ser feliz, embora louco,
que em conformidade viver ...”
(Martin Luther King)

RESUMO

A presente dissertação tem como objetivo avaliar a aprendizagem de conceitos geométricos de alunos das séries finais do Ensino Fundamental, a partir de suas produções, obtidas por meio de trabalho desenvolvido em ambiente de Geometria Dinâmica. De forma mais específica, pretende-se identificar as estratégias utilizadas pelos alunos ao se confrontarem com as situações propostas nas atividades em ambiente de Geometria Dinâmica, analisar como os alunos respondem aos questionamentos feitos durante a realização das atividades e refletir sobre como os professores avaliam a contribuição do trabalho nesses ambientes para a aprendizagem de conceitos de Geometria. Desenvolve-se a pesquisa com alunos de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental de um colégio da rede particular de Porto Alegre. Para coletar os dados e informações, realizam-se oito atividades no Laboratório de Informática, em que os alunos fazem uso do software *Cabri Géomètre II*, e entrevistas com as professoras das séries citadas. Faz-se a análise dos dados por meio da categorização das respostas dos estudantes aos questionamentos feitos nos roteiros; das observações de todas as sessões de trabalho e do estudo das construções feitas pelos alunos. A entrevista realizada com as professoras de Matemática revela que estas acreditam na importância de se realizar atividades em ambientes de Geometria Dinâmica como forma de contribuir para a aprendizagem dos estudantes sobre conceitos geométricos. Conclui-se que o trabalho proposto em ambiente de Geometria Dinâmica possibilitou aos estudantes a exploração de conceitos e propriedades geométricas, a formulação de conjeturas e o confronto com suas próprias concepções acerca dos entes geométricos, à medida que validavam as estratégias utilizadas nas construções feitas por eles, frente ao dinamismo oferecido pelo *Cabri Géomètre II*. As atividades desenvolvidas permitiram, portanto, a reestruturação do pensamento e, como conseqüência, a aprendizagem de conceitos geométricos.

Palavras-chave: Aprendizagem de conceitos geométricos. Ambientes de Geometria Dinâmica. Ensino fundamental.

ABSTRACT

The present dissertation has as objective to evaluate the learning of geometric concepts of students of the final grades of elementary school, through their productions, got from the work developed in dynamic geometry environment. Specifically, we intend to identify the strategies used by these students when facing the proposed situations in the activities developed in a dynamic geometry environment, analyzing how the students answer to the questions made during the accomplishment of the activities and to reflect on how the teachers evaluate the work contribution, in these environments, for the learning of geometry concepts. The research is developed with students of 7ª and 8ª elementary grades of a private school in Porto Alegre. To obtain the data and information, eight activities in the computer laboratory have been fulfilled, when the students have used the *Cabri Géomètre II* software, and mathematics teachers of these school grades were interviewed. Data was analyzed through the categorization of the students´ answers to the questions made in the schedules; the observations of all the work sessions and of the study of the constructions made by the students. The interview carried through with the teachers reveals their beliefs about the importance of developing activities in a dynamic geometry environment, as a way to contribute for the students´ learning of geometrical concepts. We conclude that the work in dynamic geometry environments made possible to the students the exploration of geometrical concepts and properties, the formulation of conjectures and the confrontation with their own conceptions concerning geometrical contents, while they validated the strategies used in the constructions, facing the dynamism offered by *Cabri Géomètre II*. The activities developed allowed, therefore, the thought reorganization and, as consequence, the learning of geometrical concepts.

Key-words: Learning of geometrical concepts. Dynamic geometry environments. Elementary school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Diante da evolução da sociedade e do processo de globalização, é necessária a conscientização, por parte de todos os envolvidos com a educação, de que as tecnologias não fazem parte de um futuro distante, mas sim do presente, invadindo nossas casas e nossas escolas.

Nós, professores, devemos perceber que "A sociedade da informação não é vista como um modismo, mas como um novo paradigma técnico/econômico: um fenômeno global de acentuada dimensão política, econômica e social." (AMORIM, 2003, p. 58).

A cada dia surgem novos recursos tecnológicos, novas possibilidades de enriquecer nossas aulas, de torná-las mais atraentes e associadas com a realidade. Toda a diferenciação desses recursos em relação às aulas tradicionais serve como elemento motivador, pois chama a atenção do aluno, despertando sua curiosidade, interesse e desenvolvendo sua criatividade. As novas tecnologias da informação proporcionam uma transformação não só nas formas de comunicação dos educandos, mas também nas suas formas de pensar, refletir e agir. Dessa forma, as Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) são um recurso importantíssimo para o processo de ensino e aprendizagem, tanto para o professor quanto para o aluno.

Como professora, utilizo a informática educativa como um dos recursos de minha prática docente durante o desenvolvimento e aplicação de aulas no Laboratório de Matemática do colégio em que trabalho. A partir disso, surgiu a idéia de realizar esta pesquisa sobre um tema que estivesse relacionado ao uso das TICs no ensino de Matemática.

Em muitas das atividades e oficinas elaboradas para trabalhar com os alunos do Ensino Fundamental e Médio, utilizo, como ferramentas, softwares, jogos matemáticos e programas que permitem a exploração de conceitos matemáticos.

Sendo assim, essa idéia surgiu em função dos riquíssimos recursos, tanto físicos quanto humanos, dos quais disponho em meu local de trabalho para investigar aspectos relevantes a respeito do tema.

Além dos fatores descritos acima, também levei em consideração meu interesse pelo assunto, que surgiu na época da graduação em Matemática, quando participei de atividades de pesquisa desenvolvidas pelo profº Marcus Basso, para sua tese de doutorado em Informática na Educação. Durante um semestre atuei como bolsista voluntária na sua investigação e apresentei resultados no Salão de Iniciação Científica da UFRGS.

O trabalho foi desenvolvido em uma escola municipal de Porto Alegre e consistia em propormos aos alunos atividades em ambiente virtual, para que, por meio do uso de softwares e jogos matemáticos, nós pudéssemos detectar as possíveis dificuldades dos alunos e, posteriormente, propor novas atividades que possibilitassem a redução dessas dificuldades.

Meu interesse aumentou após cursar, já no final da graduação, a disciplina Educação Matemática e Tecnologia Informática em que explorávamos e analisávamos o uso de diversos softwares matemáticos que podem ser utilizados pelos professores em sua ação docente, líamos e discutíamos alguns referenciais teóricos sobre esse assunto, elaborávamos propostas de atividades em ambiente virtual, entre outras atividades.

Ao refletir sobre minha prática docente, um dos aspectos que levo em consideração é que as novas tecnologias da informação tornam-se cada vez mais presentes na vida do homem, fazendo-se necessária a inserção desses recursos na prática educativa do professor.

Como diz Papert (1988, p. 23)

> A presença do computador nos permitirá mudar o ambiente de aprendizagem fora das salas de aula de tal forma que todo o programa que todas as escolas tentam atualmente ensinar com grandes dificuldades, despesas e limitado sucesso, será aprendido como a criança aprende a falar, menos dolorosamente, com êxito e sem instrução organizada. Isso implica, obviamente que escolas como as que conhecemos hoje não terão mais lugar no futuro.

Penso que criar oportunidades para que os alunos possam explorar seus conhecimentos através do trabalho em ambientes informatizados é uma forma de possibilitar-lhes a percepção da importância dos recursos que as novas tecnologias oferecem, no sentido de que podem nos proporcionar não só momentos de lazer, mas também momentos riquíssimos de estudo.

Além disso, o aluno é estimulado a desenvolver sua criatividade, sua capacidade de elaborar estratégias para solução de problemas e a realizar uma análise crítica sobre suas produções, visto que o computador emite, quase que instantaneamente, uma resposta ao raciocínio usado por ele. Ou seja, diante do problema a ser resolvido, o aluno organiza suas idéias, desenvolve e aplica sua estratégia e, diante do que é apresentado como resposta na tela do computador, ele pode fazer suas interferências, posicionando-se criticamente diante do exposto.

De acordo com Papert (1988, p. 50)

> [...] uma vez que o processo de ensino aprendizagem requer, para as informações novas, uma estrutura anterior que permita que essas possam ser melhor assimiladas, não há respaldo para a aprendizagem passiva, caracterizada apenas pela absorção de informações. O mais importante é a investigação, o processo exploratório ao qual é induzido o aluno, levando este a desenvolver um verdadeiro processo de descoberta.

A citação acima leva a refletir sobre os processos de ensino e aprendizagem que estão sendo estabelecidos em nossas aulas, ou seja, confirma a idéia de que "transmitir" conhecimentos, "repassar" informações não nos permite desenvolver um processo educativo que priorize o posicionamento crítico, o pensamento reflexivo, o estímulo ao raciocínio. Considerando, então, que o importante é o processo exploratório e a descoberta, o uso das tecnologias apresenta-se como uma estratégia de grande potencial frente a esse panorama educacional no qual estamos inseridos.

O segundo capítulo desta dissertação traz o problema e as questões de pesquisa, o objetivo geral e os específicos. No capítulo 3, são feitas algumas considerações iniciais, abordando-se aspectos gerais relacionados ao ensino de Geometria, em especial, no Brasil. Também é mencionado o uso de tecnologia informática no ensino de Matemática, bem como o ensino em ambientes de Geometria Dinâmica.

O capítulo 4 traz a metodologia da pesquisa, no qual são apresentados os participantes e os instrumentos de investigação, além da dinâmica empregada na realização das atividades para coleta de dados.

No capítulo 5, é realizada a apresentação de cada uma das atividades, bem como a análise das produções dos alunos, enquanto no capítulo 6 trazemos a entrevista realizada com as professoras de Matemática das 7ª e 8ª séries, além de alguns comentários a respeito das respostas aos questionamentos.

No capítulo, 7 são apresentadas as conclusões, por meio de uma reflexão sobre diversos aspectos presentes na dissertação, nas atividades realizadas e nas situações vivenciadas durante o desenvolvimento da pesquisa. Além disso, também são feitas algumas considerações sobre a entrevista realizada com as professoras.

Finalmente, no capítulo 8, trazemos as considerações finais e algumas sugestões para atividades futuras. A dissertação é concluída com as referências.

2 PROBLEMA, QUESTÕES DE PESQUISA E OBJETIVOS

Diante de todas as experiências como estudante e como professora de Matemática e considerando minha atividade profissional atual, um **problema** delineou-se para minha pesquisa de mestrado: De que maneira o trabalho em um ambiente de Geometria Dinâmica contribui para a aprendizagem de conceitos geométricos de alunos das séries finais do ensino fundamental?

Face ao problema proposto, foram estabelecidas questões de investigação, que nortearam os procedimentos metodológicos e a análise dos dados.

2.1 Questões de pesquisa

2.1.1. Quais estratégias são elaboradas pelos alunos ao se confrontarem com as situações propostas nas atividades em ambiente de Geometria Dinâmica?

2.1.2 Como os alunos respondem aos questionamentos propostos durante a realização das atividades?

2.1.3 Como os professores avaliam a contribuição do trabalho em ambientes de geometria dinâmica para a aprendizagem de conceitos de Geometria?

Para obter respostas aos questionamentos, a pesquisa foi desenvolvida com os seguintes objetivos:

2.2 Objetivo geral

Avaliar a aprendizagem de conceitos geométricos de alunos das séries finais do Ensino Fundamental, a partir de suas produções, em atividades desenvolvidas em ambiente de Geometria Dinâmica.

2.3 Objetivos específicos

2.3.1. Identificar as estratégias utilizadas pelos alunos durante a realização de atividades em ambiente de Geometria Dinâmica.

2.3.2. Analisar as produções dos alunos ao responderem aos questionamentos propostos nas atividades.

2.3.3 Investigar a opinião dos professores sobre a contribuição do trabalho em ambientes de Geometria Dinâmica para a aprendizagem de conceitos de Geometria.

3 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Jean Dieudonné, um dos fundadores do grupo Bourbaki, lançou em um colóquio em Royaumont a célebre frase que ecoou em vários ambientes acadêmicos: “Abaixo Euclides!”. Sua afirmativa tinha o propósito de criticar o ensino excessivo da Geometria do triângulo nos colégios franceses (sendo dele, também, outra frase de impacto: “Morte ao triângulo!”) e “o vigor de suas propostas não significava necessariamente o fundamental de suas posições.” (WALUSINSKI, 1986, p. 1). No entanto, a crítica ao ensino de Geometria vigente teve o apoio dos que defendiam o surgimento da Matemática Moderna, como George Papy, matemático belga cujas obras foram divulgadas também no Brasil.

Papy (1967b) justifica um ensino de Geometria com base na Teoria dos Conjuntos, especialmente levando em conta as estruturas algébricas, topológicas e topológico-algébricas. Segundo ele, “a organização e o modo de pensar dos Elementos são ultrapassados. Ensiná-los é inculcar maus hábitos, já que há meios de ir diretamente ao conhecimento comum às estruturas e ao ponto de vista moderno. (PAPY, 1967a , p. ix).

No entanto, o movimento da Matemática Moderna não teve aceitação inconteste. O matemático René Thom, criticou duramente os reformistas, que

> [...] foram induzidos, pela sua tendência filosófica, por um lado a abandonar aquele terreno que é uma aprendizagem ideal para a investigação, aquela mina inexaurível de exercícios, a Geometria Euclidiana, e por outro lado, a substituí-la pelas generalidades da lógica e da teoria dos conjuntos, isto é, material que é pobre, vazio e desencorajador para a intuição. (THOM, 1973, p. 197).

Pavanello (1993) aborda o abandono do ensino de Geometria no Brasil, fazendo um levantamento detalhado das suas condições no século XX. Na década de 30, a reforma Francisco Campos estabeleceu programas para as diversas disciplinas e procurou-se unificar as matemáticas, de forma a ter um único professor responsável. Para o ensino de Geometria, havia a recomendação de que fosse iniciado com idéias intuitivas e só depois se fizesse a formalização

No II Congresso Nacional de Ensino de Matemática, realizado em 1957, o professor Ubiratan D´Ambrósio criticava os programas de Matemática então vigentes, propondo uma redistribuição de conteúdos de forma que a Geometria não fosse trabalhada de forma isolada e que fossem feitos apelos à história da Matemática. (D´AMBRÓSIO, 1959).

Com a introdução da Matemática Moderna, os professores, tomados de surpresa e despreparados para as mudanças, não conseguiam trabalhar a Geometria sob o enfoque das transformações. Assim, aos poucos essa área da Matemática foi sendo abandonada ou apenas ensinada no antigo curso secundário.

Ao refletir sobre o descaso com o ensino de geometria em nosso país, Miguel e Miorim (1986) também apontam a marginalização imposta ao ensino de geometria por parte da Matemática Moderna, privilegiando-se a álgebra, como um dos fatores que justificam a crítica situação em que o ensino deste conteúdo se apresenta atualmente. E como conseqüência deste fator, apontam também a irrelevância atribuída aos conteúdos de geometria nos livros didáticos, não apenas por serem abordados em menor quantidade, se comparados com os demais assuntos, mas também por serem relegados à condição de capítulos finais do livro, com os quais o professor dificilmente consegue trabalhar por falta de tempo.

Outro agravante, segundo Pavanello (1993), é a falta de conhecimentos de Desenho Geométrico, pelo fato de ter sido essa disciplina substituída, em muitos casos, pela Educação Artística.

Anos antes, Putnoki (1988) já chamava atenção para este fato

> Já faz um bom tempo que o Desenho Geométrico foi banido das nossas escolas de 1º e 2º graus. "Coincidentemente", de lá para cá, a Geometria, cada vez mais, vem se tornando o grande terror da Matemática, tanto para alunos quanto para professores. Com certeza, não se trata apenas de uma coincidência, mas sim, em parte, de uma conseqüência. (p.13).

As novas mudanças decorrentes da implantação da Lei 5692/71, de Diretrizes e Bases, juntamente com a ampliação das redes pública e privada de ensino e com a necessidade de formação de mais professores para atender esses alunos, provocaram a criação das licenciaturas curtas, diminuindo, para muitos desses novos professores, os conteúdos tradicionalmente estudados nos cursos de formação de professores de Matemática. Pavanello (1993) ainda acrescenta que a ênfase no ensino de Álgebra, que veio ocupar a lacuna da geometria, "pode acostumar o indivíduo a operar sem questionamento sobre regras pré-estabelecidas, a fazer isto ou aquilo, sem questionar o que faz." (p. 16).

Neste panorama, diluída a influência da Matemática Moderna, novas diretrizes foram apresentadas aos professores, novamente sem que houvesse uma preparação para a implantação das mudanças: referimo-nos aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), para o Ensino Fundamental e Médio. Nos PCNs do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), encontramos os conteúdos organizados em blocos: números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas; tratamento da informação. Nos blocos relacionados com espaço e forma e com grandezas e medidas, são apontadas a importância de fazer construções com régua e compasso, de localizar figuras e deslocamentos no plano, de estudar sistemas de coordenadas, de trabalhar as transformações geométricas e de explorar as noções de grandezas e medidas que auxiliem a compreensão dos conceitos relativos ao espaço e às formas.

Ao apresentar as orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, nos PCNs é considerada indispensável a capacidade de pensar geometricamente, conforme se pode observar abaixo no trecho retirado do documento:

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, através deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998, p.51).

Porém, nos próprios PCNs é feito um alerta:

> No entanto, a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998, p. 122).

Nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), os conteúdos estão organizados em quatro blocos: números e operações; funções; geometria; análise de dados e probabilidade. Em relação à Geometria, é indicado que sejam aprofundadas noções já estudadas no Ensino Fundamental, “como, por exemplo, as idéias de congruência, semelhança e proporcionalidade, o Teorema de Tales e suas aplicações, as relações métricas e trigonométricas nos triângulos (retângulos e quaisquer) e o teorema de Pitágoras.” (p. 75-76).

Não é somente no Brasil que há a preocupação com o abandono da Geometria e são indicados conteúdos e metodologias. Na França, em 1999, por solicitação de associações de professores e outros órgãos, o ministério da Educação encarregou o professor Jean-Pierre Kahane de coordenar um grupo para elaborar programas de Matemática para o ensino secundário, juntamente com discussões mais gerais sobre o ensino dessa disciplina desde a escola elementar até a universidade. O documento, que ficou conhecido como relatório Kahane, aponta, relativamente à Geometria, algumas razões para ensiná-la: visão espacial, aprendizagem do raciocínio, aspectos estéticos e culturais, relação com a vida cotidiana e com outras ciências, formação de técnicos e engenheiros e, finalmente, aspectos geométricos presentes nos outros ramos da Matemática.

Mesmo considerando que não há nada de novo em termos de pesquisa na Geometria elementar, os autores do relatório concluem que é fundamental a continuação de seu ensino e se debruçam sobre as formas de ensiná-la. Segundo eles, “[...] o ensino da geometria permite formar alunos com cabeças bem feitas, que se tornam cidadãos capazes de refletir e de compreender e que são assim equipados para encarar as dificuldades do mundo que nos cerca.” (KAHANE, 2000, p. 18). Entre muitas sugestões apresentadas, a Comissão Kahane apontou o uso de programas de Geometria Dinâmica, mas ponderou que é necessária uma ampla reflexão didática antes de usar esse recurso, para que efetivamente os trabalhos com a nova tecnologia conduzam a uma melhoria do ensino.

Muitos professores procuram deixar o ensino de Geometria para o final do ano letivo, como se tal conteúdo fosse menos importante, ou como se a falta de tempo para esse trabalho não viesse a ser um grande problema. O ensino da Geometria apresenta, efetivamente, dificuldades particulares, além das já citadas, especialmente pelo fato de que se localiza na fronteira entre o sensível e o inteligível (CÂMARA dos SANTOS, 2001). Dessa forma, é de extrema importância que essa área da Matemática seja apresentada aos alunos inserida num contexto de relação com outros conteúdos, o que contribui para a atribuição de significados aos conceitos mais abstratos, além de evitar o seu estudo fragmentado.

A separação entre o que é abstrato e o que é concreto muitas vezes traz sutilezas que, por muitos motivos, o aluno não consegue perceber, como por exemplo, a falta de maturidade para trabalhar no campo das abstrações; o fato de que há conceitos básicos de Geometria ainda não compreendidos; dificuldade para destacar, nos desenhos, elementos importantes para a resolução de um determinado exercício, entre outros. Nesses momentos, o professor coloca-se como um elo de ligação na fronteira entre o sensível e o inteligível, auxiliando os educandos a compreenderem o mundo em que vivem. Para isso, pode dispor de recursos que enriqueçam esse processo de construção de conhecimentos e de compreensão desses mundos, como por exemplo, o uso de tecnologia computacional.

3.1 Uso de Tecnologia Informática no Ensino

É impossível não percebermos que vivemos, atualmente, num mundo em que se é constantemente bombardeado por informações. A tecnologia invade nossas casas, nossas escolas, nossa cultura sem mesmo “pedir licença” ou anunciar previamente sua chegada, de tal forma que, querendo, ou não, gostando ou não, devemos estar dispostos ou pelo menos conscientes que de o “mundo virtual” já é uma realidade da qual, necessariamente, temos de fazer parte.

Segundo Penteado (1999, p. 297),

> Nos últimos anos, com o desenvolvimento da tecnologia e dos computadores pessoais, a informática vem ocupando um espaço cada vez maior em nossa sociedade, sobretudo no cotidiano dos cidadãos. Grandes transformações estão ocorrendo na produção industrial, nas relações de trabalho, na forma de viver do homem e nos estilos de conhecimento, em razão do desenvolvimento das máquinas informáticas. Vivemos numa sociedade em que prevalecem a informação, a velocidade, o movimento, a imagem, o tempo e o espaço com uma nova conceituação.

Portanto, ao considerar que os avanços tecnológicos provocam impacto significativo no trabalho e na vida diária do homem, é imprescindível que a escola agregue às suas funções a promoção do conhecimento e uso das Tecnologias de Informação e Comunicação, pois conforme Demo (2006, p. 108), “A escola não pode subjugar-se a elas, mas não pode menos ainda, fazer de conta que não existem ou não são decisivas.”.

Nesta perspectiva, Miskulin (1999) ao refletir sobre qual seria o papel da Educação e da escola no contexto atual, escreve

> A Educação deveria proporcionar a formação plena e integral do sujeito, formar indivíduos críticos, conscientes e livres, possibilitando-

> lhes o contato com as novas tecnologias, para que eles não percam a dimensão do desenvolvimento tecnológico que perpassa o país. [...]. Assim sendo, os educadores, devem estar abertos para essas novas formas do saber humano, novas maneiras de gerar e dominar o conhecimento, novas formas de produção e apropriação do saber científico, e novas maneiras de consumo, isto se não quiserem ficar estagnados em métodos de ensino e teorias de trabalho obsoletas. (p.41).

Frente a este panorama que reflete o momento em que vivemos, os órgãos responsáveis pela educação no país têm feito investimentos e recomendações para que os docentes agreguem, às suas práticas pedagógicas, de forma qualificada, o uso de novas tecnologias.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para os 3° e 4° ciclos do Ensino Fundamental destacam que

> É esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais. (BRASIL, 1998, p. 46).

A Internet e a globalização estão inseridas no processo de desenvolvimento dos países, provocando mudanças no pensamento e na postura das sociedades. Em nosso país não é diferente e podemos dizer que tais fatores influenciam diretamente, por exemplo, nosso processo educacional, sendo inadmissível que os profissionais da educação assumam uma postura alienada frente a tal panorama.

Segundo Demo (2006, p. 108): “O mundo da escola não é o mundo no qual a criança vai viver mais tarde, e isto, em grande parte, pela distância tecnológica”. Isso faz com que, ao professor, não mais se possa dar a opção de considerar ou não, em sua prática, o uso desses recursos tecnológicos. A sociedade contemporânea está a exigir cada vez mais indivíduos familiarizados com as tecnologias, conforme podemos verificar nas palavras de Amorim (2003, p. 59): “Não ter acesso à Internet ou a outras inovações tecnológicas dos nossos dias pode comprometer a mobilidade social e a empregabilidade de uma pessoa.”

Hoje, as informações não estão mais apenas nas mãos dos acadêmicos, mas estão livres, à solta, ao alcance das pessoas, e as tecnologias educacionais apresentam-se como um veículo altamente potencial dessas informações. Nesse contexto, a escola - e mais especificamente o professor - têm um papel fundamental no sentido de intervir de forma crítica e qualificada frente às leituras e experiências que o aluno faz e adquire ao interagir com o computador.

Percebe-se então uma necessidade quase urgente de ampliarmos as vias educacionais diante das inovações tecnológicas, tendo sempre o cuidado de não permitir que o uso desses recursos vire um modismo desmedido e desprovido de objetivos educacionais válidos.

Conforme afirma Salomão (2001, p.2) "[...] a qualidade do aprendizado depende, em grande parte, da qualidade das tarefas propostas aos alunos e não apenas da disponibilidade de recursos tecnológicos e computacionais.". Dessa forma, fazer uso do computador segundo uma abordagem em que se utiliza este recurso apenas para servir como meio de transmissão de informação ao aluno, mantendo, na verdade, a prática pedagógica vigente (VALENTE, 1995), seria simplesmente informatizar os meios tradicionais de ensino-aprendizagem.

Devemos ter bem clara a idéia de que a tecnologia educacional não deve ser apenas mais uma novidade, mas estar a serviço da melhoria da educação. Ao fazer uso das TICs, o educador deve ter em mente objetivos bem definidos que possam ser alcançados por meio de uma metodologia de trabalho que tenha em vista uma utilização pedagógica e "[...] uma exploração adequada dos multimeios como fonte de informação e conhecimento". (PORTAL; SOUZA, 1994, p. 6)

A inserção das novas tecnologias na prática docente pressupõe que o educador esteja aberto a assumir um novo papel frente ao processo educacional que estabelece com seus alunos. Isso quer dizer que necessita, primeiramente, estar disposto a abandonar a posição de instrutor e de único detentor do conhecimento.

O professor precisa passar então à condição de mediador, de orientador, de um sujeito que é capaz de participar desse processo também com o objetivo de ser um aprendiz. Além disso, deve saber se posicionar de maneira profissional diante de situações em que seus alunos terão mais conhecimentos sobre o uso dessa tecnologia informática do que ele próprio. Esse, talvez, seja um dos motivos pelos quais muitos professores não fazem uso do computador em suas práticas, e aqui me refiro inclusive àqueles que dispõe desse recurso nas escolas em que trabalham. Aliado a isso podemos dizer também que o medo de enfrentar o novo, o comodismo e a falta de consciência de que de fato estamos diante de um novo paradigma educacional fazem com que professores tenham uma postura alheia à existência dos recursos tecnológicos. Neste contexto, as palavras de Demo (2006, p. 103) mostram-se bastante pertinentes: “A escola não pode evitar o impacto da tecnologia, mas se pudesse, evitaria, porque é mais cômodo continuar dando a mesma aula”.

Considerando então o paradigma educacional vigente, é fato que a escola deve estar ciente da necessidade de enfrentar alguns desafios como, por exemplo, “Desenvolver algumas competências nos alunos para que estejam em ´sintonia` com esse novo cenário que se compõe.” (CARNEIRO; PASSOS, 2007, p.4)

Sendo assim, seria interessante que o uso do computador fosse valorizado ao longo do processo de aprendizagem dos alunos, bem como de construção de seus conhecimentos, pois além de poder proporcionar uma transformação nas formas de comunicação dos educandos aprimora suas capacidades de pensar, raciocinar, refletir e agir.

Além disso, o confronto com situações que exijam a determinação de estratégias eficazes na resolução de problemas e o fato de o educando perceber as novas informações e conhecimentos em diversos sentidos, à medida que explora sua pluralidade sensorial, enriquecendo as diferentes formas de significação da sua realidade, também são razões que justificam o uso do computador na educação.

Esta tendência de se aliar a informática à educação tem sido efetivada por meio do uso de softwares que, conforme as características e o enfoque educacional dado, podem ser classificados, segundo as idéias de Papert (1994), como pertencentes a um dos seguintes paradigmas: instrucionista ou construcionista.

O paradigma instrucionista expressa a crença de que o caminho para uma melhor aprendizagem deve ser o aperfeiçoamento da instrução (PAPERT, 1994). Neste sentido o computador assume o papel de “máquina de ensinar” e o aluno de receptor de informações, ou seja, o computador “manda” e o aluno executa sem necessariamente refletir sobre o que está fazendo.

Nos ambientes com caráter instrucionista, em que os alunos são agentes passivos do processo de aprendizagem

> [...] é muito difícil que venham a ser desenvolvidas habilidades de interpretação; raciocínios espaciais, lógicos e matemáticos; de esboço, leitura e interpretação de desenhos, gráficos e imagens; de síntese de informações ou de argumentação à compreensão e expressão em Língua Portuguesa. (SAUER, 2004, p.16).

Já o paradigma construcionista é concebido sobre a hipótese de que as crianças se sairão melhor se descobrirem por si mesmas o conhecimento. “A meta é ensinar de forma a produzir a maior aprendizagem a partir do mínimo de ensino.” (PAPERT, 1994, p.125)

Os softwares com caráter construcionista na área da Matemática são extremamente importantes, visto que oportunizam aos alunos a aprendizagem de conceitos à medida que estes expressam, confrontam e refinam suas idéias. (GRAVINA; SANTAROSA, 1998)

Na seção seguinte abordaremos alguns aspectos referentes a programas para o ensino e aprendizagem da Matemática, em particular da Geometria, que se inserem nesta perspectiva construcionista.

3.2 Ensino de Geometria em Ambientes de Geometria Dinâmica

Dentre os diversos problemas que existem quanto ao ensino dos conteúdos pertencentes ao currículo de Matemática vigente nas escolas brasileiras, destacaria o descaso com o ensino de Geometria como um dos mais alarmantes. Não é apenas o trabalho com os números que vem se apresentando desprovido de significado, mas o trabalho com as formas também.

A comunidade acadêmica que se dedica às questões relacionadas à Educação Matemática tem se empenhado em buscar diferentes e novas estratégias para o ensino e aprendizagem da Geometria que não estejam baseadas na excessiva valorização de inúmeras definições e propriedades impostas como fatos e que os estudantes devem simplesmente aceitar. Conforme aponta Basso (2003, cap. 1, p. 4),

> [...] se considerarmos que aspectos geométricos relacionados com as representações gráficas dos objetos podem se constituir em instrumentos importantes para resolver problemas relacionados com a construção do espaço, e ainda, que o recurso à suportes computacionais colocam novas questões quanto à aprendizagem de conceitos geométricos, resultados de investigações nesta direção podem se constituir em tecnologias sociais relevantes em Informática na Educação.

Diante de tal desafio, muitas pesquisas vêm sendo realizadas em busca de novas metodologias para o ensino da Geometria e dentre estas existem muitas que sugerem o uso de softwares na prática pedagógica, "[...] apontando-os como criadores de diversas situações de interação alunos-saber a partir da representação dinâmica dos objetos no ambiente virtual.". (NEVES, 2005, p.1)

A expressão designada para expressar a forma de se trabalhar a Geometria e suas propriedades de maneira dinâmica e interativa, por meio de um software "[...] é a chamada Geometria Dinâmica, entendida como a Geometria relacionada aos movimentos de figuras nestes ambientes computacionais de ensino [...]" (AMORIM, 2003, p.60). Desta forma, ao escrever sobre softwares de Geometria como ferramenta de apoio à prática pedagógica do professor, estarei me referindo aos programas que contemplam as características da Geometria Dinâmica.

Ao trabalharmos com tal conteúdo, uma das abordagens que podemos explorar é aquela que enfatiza a questão experimental, auxiliando os alunos no desenvolvimento de sua capacidade de conjeturar e de estabelecer hipóteses. Dentre as diversas ferramentas didáticas existentes, os softwares de Geometria Dinâmica possibilitam, com eficiência, a exploração dessas abordagens. Exemplos desse tipo de programa são: *Cinderella, Dr. Geo, Geometer's Sketchpad, Euklid, Régua e Compasso, Geogebra* e *Cabri-Géométre II.*

Esses programas permitem a construção de objetos a partir das propriedades geométricas que os definem: "Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõem o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação." (GRAVINA, 1996, p. 6). Este fato pode gerar uma série de questões a serem discutidas, levando os estudantes a validarem suas construções.

Uma das contribuições desses softwares é que "Eles podem oferecer novas representações de objetos geométricos que, de alguma forma, 'concretizam' a figura formal." (GUIMARÃES; BELFORT; BELLEMAIN, 2003, p. 6). Isso permite ao aluno explorar e validar as propriedades geométricas de uma figura a partir uma multiplicidade de representações, ou seja, a partir de desenhos pertencentes a uma mesma configuração ou classe, um aspecto que, segundo Neves (2005), é "[...] vital no processo de elaboração de esquemas mentais." (p. 6)

Existem muitos trabalhos de pesquisa nesta linha, associando ensino de Geometria com o uso de tecnologia, e apresentando evidências de que o ensino de conceitos geométricos aliado à construção e sua exploração em ambientes de Geometria Dinâmica favorece a compreensão dos alunos a respeito desses conceitos matemáticos. Podemos citar, por exemplo, os trabalhos de Gravina (1996), Haruna (2000), Rolkouski (2002) e Baldin (2006).

Dentre os diversos exemplos de softwares de Geometria Dinâmica, citados anteriormente, destaco o programa *Cabri-Géomètre II*. Esse aplicativo apresenta duas fortes características: “ser um instrumento (e um produto) de pesquisa nas áreas de educação matemática e informática educacional e apresentar-se como um instrumento didático de grande difusão.” (LABORDE, 1993 apud CÂMARA dos SANTOS, 2001, p. 7).

Com o uso deste software é possível fazer com que os alunos percebam a diferença entre “figura geométrica” e “desenho geométrico” o que é um dos pressupostos teóricos do programa. A figura geométrica é o objeto teórico caracterizado por elementos geométricos, por suas propriedades, enquanto que o desenho geométrico é a representação material dessa figura. Por exemplo, é possível ao aluno perceber, com um simples movimento, que duas retas que aparentemente são paralelas podem deixar de ser, caso as propriedades que caracterizam essa “figura geométrica” não sejam consideradas no momento de construção do “desenho geométrico” que a representa. Isso leva o aluno a perceber que aspectos perceptivos não podem ser garantia de precisão de uma construção geométrica.

Neste sentido, o software situa-se “[...] como importante fator de mudança de status da ação do sujeito com a Geometria, deixando de ser estática, passando a ser dinâmica e capaz de fornecer aos alunos e professores envolvidos uma nova percepção da geometria.” (NEVES, 2005, p.6).

As características do programa permitem aos alunos validarem suas construções, proporcionando momentos de reflexão e reorganização de pensamento, estratégias e conceitos pré-existentes. O dinamismo permitido às construções, em contraposição ao aspecto estático imposto aos objetos desenhados com lápis e papel, é um dos aspectos que fazem com que esse software seja um instrumento riquíssimo para o aprendizado da Geometria. Ou seja, a manipulação e a visualização das formas geométricas, dos desenhos e das figuras fazem do software uma ferramenta didática facilitadora do aprendizado e de extrema importância na construção de conceitos fundamentais. (BRUM, 2001).

Uma forma de o professor explorar o caráter dinâmico do software é propor atividades em que os estudantes se deparem com situações nas quais suas concepções acerca dos entes geométricos entrem em conflito. Tais situações podem fazer com que os alunos avaliem e reflitam sobre conceitos pré-existentes, levando-os a uma reformulação do significado de diversas figuras geométricas.

Ao conceberem o *Cabri*, os autores consideraram a possibilidade de o usuário, ao interagir com o programa, ultrapassar alguns obstáculos relacionados ao estudo e aprendizagem da geometria. Câmara dos Santos (2001, p.14) destaca algumas dificuldades a que o *Cabri* se propõe a transpor:

> O fato que a leitura de um desenho é influenciada por seus aspectos perceptivos [...]; imperfeições de um desenho, que podem impedir a percepção de propriedades da figura [...] e ao fato que dois desenhos diferentes não são reconhecidos como sendo de uma mesma figura [...].

O *Cabri Géomètre II* proporciona que o usuário desenvolva seu espírito investigativo, visto que, na busca pelo entendimento dos problemas geométricos propostos no ambiente, eles elaboram conjeturas, experimentam, testas hipóteses, criam estratégias, deduzem.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Fiorentini e Lorenzato (2006) usam a denominação “pesquisa naturalista ou de campo” para se referir aos estudos que são realizados diretamente no campo em que o fenômeno estudado acontece. Nesse caso, se os alunos estão realizando um trabalho em um ambiente de aprendizagem mediada pelo computador, o campo de pesquisa é este ambiente. Partindo dessa conceituação, a pesquisa aqui relatada tem caráter qualitativo, com elementos naturalístico-construtivistas.

4.1 Os participantes da pesquisa

Os participantes desta pesquisa são alunos de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental de um colégio particular de Porto Alegre e duas professoras de Matemática do mesmo colégio e séries. Os alunos que realizaram as atividades no Laboratório de Informática, em cada série, são os que estavam presentes na aula de Matemática, no dia em que a atividade foi proposta. Para evitar identificá-los, todos serão denominados por “alunos”, independente do gênero.

4.2 Instrumentos de pesquisa e atividades realizadas

Para coletar os dados da pesquisa, foram utilizadas as produções dos alunos referentes às atividades realizadas, as anotações sobre as observações feitas nas sessões de trabalho e as entrevistas realizadas com as professoras.

Durante o desenvolvimento da pesquisa, foram realizadas oito atividades, de forma geral baseadas em roteiros que orientam o trabalho dos alunos no Laboratório de Informática com o software *Cabri Géomètre II*, como, por exemplo, reproduzir construções analisando os conceitos geométricos empregados, de modo a garantir as propriedades geométricas dessas construções; partir de situações particulares e, após análise desses casos, chegar a generalizações de conceitos de Geometria; explorar propriedades geométricas em construções criadas pelos próprios alunos, entre outras. Esse processo tem por objetivo analisar a construção dos conceitos geométricos pelos estudantes, quando trabalham em um ambiente de Geometria Dinâmica.

Os roteiros desenvolvidos pelos alunos, bem como os procedimentos e estratégias utilizados para resolver as atividades propostas, suas conclusões e reflexões, formam o conjunto das produções analisadas. Além disso, todas as sessões de trabalho foram analisadas por meio de anotações e das telas capturadas com as produções dos alunos.

As atividades foram realizadas durante o turno de aula dos estudantes, sendo utilizados os períodos em que tinham aula de Matemática. Para execução de cada roteiro proposto, os alunos utilizaram o software *Cabri Géomètre II*, no ambiente do Laboratório de Informática da escola. Em função de uma limitação do espaço físico do laboratório, cada turma foi dividida em dois grupos, sendo que um deles trabalhou sob orientação da professora de Matemática da série correspondente e outro, sob minha orientação.

A primeira atividade foi um Estudo-Piloto, ainda no ano de 2006, com duas turmas de 8ª série, versando sobre o teorema de Tales. Somente nesta, foram analisadas todas as produções, dos alunos que trabalharam comigo e daqueles que estiveram sob a orientação da professora da turma. A seguir, já em 2007, seguiram-se sete atividades e só foram então observadas e analisadas as produções dos alunos que ficaram sob minha orientação. Dessa forma, quando for mencionado o número de alunos que realizaram cada atividade, entender-se-á que foram somente estes que trabalharam comigo.

As entrevistas realizadas com as professoras foram semi-estruturadas, a partir de um roteiro de questionamentos. Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 134):

> Uma entrevista consiste numa conversa intencional, geralmente entre duas pessoas, [...] dirigida por uma das pessoas, com o objetivo de obter informações sobre a outra. [...] a entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma idéia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo.

Patton (1986) indica os pontos fortes e fracos de uma entrevista semi-estruturada. Efetivamente, é importante ter o roteiro preparado de antemão, podendo decidir a forma e a seqüência das perguntas. Como só foram entrevistadas duas professoras de Matemática do colégio, aquelas que trabalham com os alunos participantes, o ponto fraco apontado por Patton (1986), a saber, a dificuldade de comparar as respostas, não afetou a compreensão das opiniões das docentes.

Lüdke e André (1986, p. 36) consideram que o roteiro “seguirá naturalmente uma certa ordem lógica e também psicológica” e as questões permitirão que o aprofundamento no assunto seja gradual.

Os diálogos com as entrevistadas foram gravados e, posteriormente, transcritos na íntegra, constituindo-se em um texto a partir do qual foi possível tecer considerações. As entrevistas foram realizadas no próprio colégio em que foi desenvolvida a investigação, sendo marcados com antecedência a data, o horário e a sala. Além disso, sua realização e exposição de respostas no trabalho estão devidamente autorizadas pela direção do colégio e pelos participantes, em documentos previamente elaborados segundo as normas do Comitê de Ética em Pesquisa da PUCRS.

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

A partir das produções dos alunos durante as atividades desenvolvidas desde o 2º semestre de 2006 e das observações registradas no diário de campo, os dados são, a seguir, apresentados e analisados.

O detalhamento das descrições teve, entre outros objetivos, a possibilidade de apresentar, aos professores e pesquisadores que trabalham com o software *Cabri* no Ensino Fundamental, um conjunto de dados que podem ser usados não somente para subsidiar outras investigações, mas também para promover discussões entre os usuários desse programa. Por isso, a maior parte deste capítulo se destina à apresentação e análise das produções dos estudantes.

5.1 A Realização do Estudo-Piloto

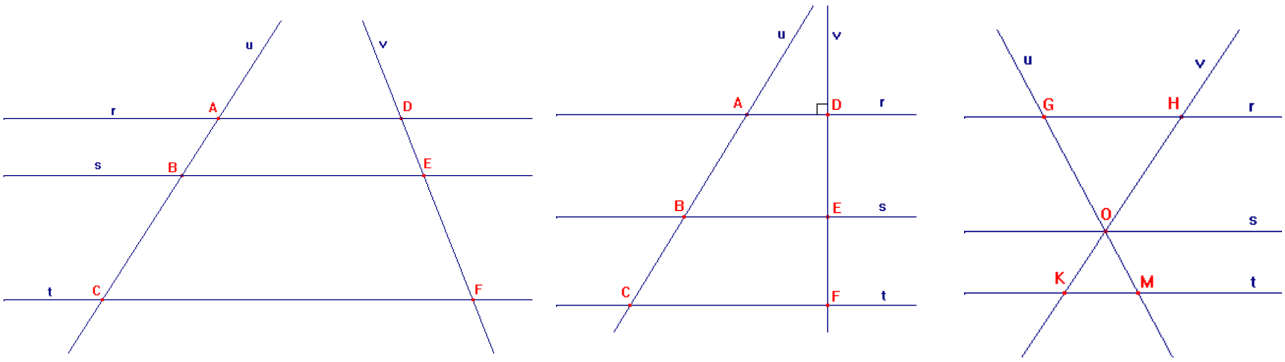
Para avaliar os procedimentos que seriam empregados na pesquisa, optei por realizar uma experiência inicial, de forma a compreender as dificuldades que poderiam ocorrer em atividades de laboratório, bem como validar os instrumentos de pesquisa.

O trabalho foi desenvolvido com duas turmas da 8ª série do Ensino Fundamental do colégio já mencionado. Ao todo, 55 alunos participaram da atividade, que teve a duração de dois períodos de aula. Em alguns momentos, um dos estagiários do Laboratório de Matemática permaneceu junto comigo para que, ao auxiliar os alunos com dúvidas sobre os comandos do programa, eu pudesse observar melhor os comentários feitos e as estratégias utilizadas por eles para a realização da atividade.

Apresento, a seguir, cada uma das oito questões propostas no trabalho, bem como a análise das respostas obtidas para cada uma delas e observações sobre o decorrer do trabalho. Esclareço que, embora tenha considerado as respostas obtidas em todo o material escrito, os comentários que fiz a respeito da postura, reações ou posicionamentos orais, referem-se somente aos alunos que trabalharam sob minha orientação.

Questão 1

*Abre um arquivo em branco no Cabri e constrói **uma** das três representações abaixo. A seguir, escreve todos os passos e menus que utilizaste para fazer a construção escolhida.*



A maioria dos participantes dessa experiência escolheu a primeira representação para construir (56%) e, dentre aqueles que escolheram a segunda (31%), nenhum utilizou o recurso *Reta Perpendicular* para traçar uma das transversais ao feixe de retas paralelas, utilizando para isso apenas a opção *Reta*. A terceira opção foi escolhida por apenas 13% dos alunos.

Ao observar as respostas dadas pelos alunos para essa questão, pude constatar que[1]:

a) sete alunos fizeram referência aos botões e aos recursos utilizados em cada passo da construção;

b) quinze alunos fizeram referência ao botão ou ao recurso utilizado e ao objeto geométrico (ponto, reta) construído com ele;

c) nove alunos fizeram referência aos objetos geométricos construídos, mas não fizeram referência aos botões e/ou recursos utilizados;

d) três alunos fizeram referência apenas aos botões ou aos recursos utilizados informando quantas vezes selecionaram cada um;

e) onze alunos fizeram referência ao botão e ao recurso utilizado, mas por vezes apenas comentaram sobre um ou mais objetos construídos sem explicitar como fizeram;

f) cinco alunos utilizaram desenhos para explicar cada passo da construção;

g) seis alunos responderam de forma inadequada;

[1] Nem sempre o número de alunos que responderam às questões corresponde ao número de alunos citados no início da descrição da atividade, pois alguns, às vezes, preferem ficar apenas observando o trabalho do colega, visto que aos trabalhos das aulas de laboratório não são atribuídas notas.

h) três alunos não responderam a questão.

Embora não tivesse sido escrito no enunciado desta questão que as retas *r*, *s* e *t* eram, de fato, paralelas, a forma como os desenhos foram apresentados induziu os alunos no momento da construção, de forma que, mesmo sem usarem o recurso *Reta Paralela,* eles procuraram fazer com que, visualmente, as retas parecessem paralelas.

Cabe ressaltar aqui que nenhum aluno utilizou a opção *Reta Paralela*, todos empregaram simplesmente o comando *Reta* para a construção do feixe.

Alguns alunos utilizaram ainda a opção *Segmento*, visto que as figuras apresentadas no roteiro eram apenas partes da construção toda, levando-os a pensar que se tratavam de segmentos e não de retas. Considerando que esses objetos estavam devidamente nomeados, tal postura me leva a crer que esses estudantes não reconhecem que letras minúsculas identificam retas e não segmentos.

Alguns alunos optaram por essa “troca” por considerarem que utilizar segmentos em vez de retas não faria diferença para a resolução do exercício.

Apresento, no quadro 1, a porcentagem de construções em que foi utilizada apenas a opção *Reta*, apenas a opção *Segmento* ou as duas opções juntas.

OPÇÃO	**PORCENTAGEM**
Reta	82%
Segmento	15%
Reta e segmento	3%

Quadro 1 – Distribuição das construções na questão 1 segundo as opções

Exemplos de construções feitas pelos alunos:

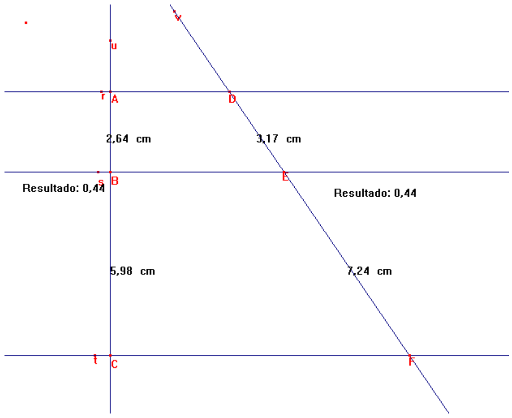


Figura 1 – Exemplo de construção utilizando apenas retas

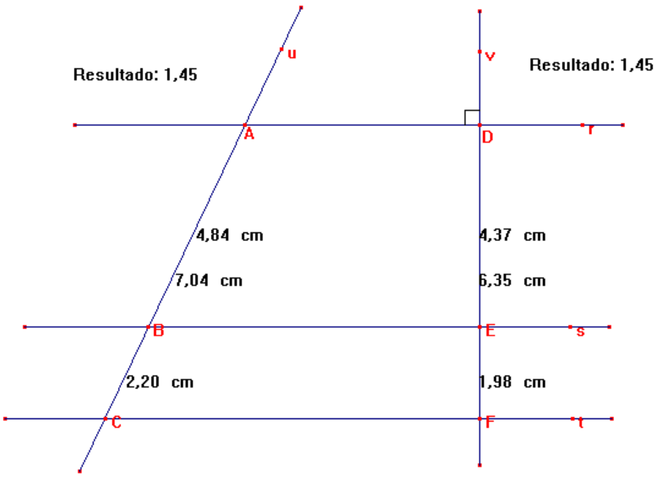


Figura 2 – Exemplo de construção utilizando apenas segmentos

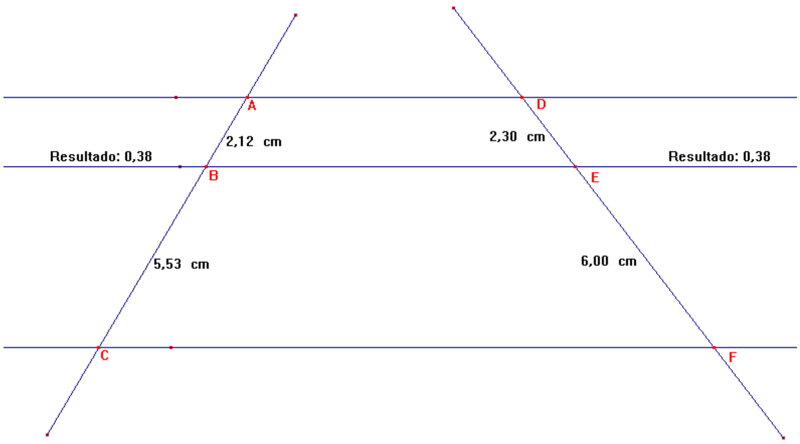
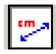


Figura 3 – Exemplo de construção utilizando retas e segmentos

Outra questão observada com relação ao uso dos recursos é que pouquíssimos alunos lembravam de como nomear os pontos. Apenas um estudante recordou que, ao marcar o ponto, poderia nomeá-lo em seguida, bastando digitar a letra maiúscula. Os demais utilizaram os recursos *Rótulo* ou *Comentário,* porém após a marcação de todos os pontos da construção.

Alguns alunos nomearam os pontos com letras minúsculas, mostrando que, possivelmente, não reconhecem o uso de letras maiúsculas para identificar esses objetos.

Questão 2

Seleciona no 9º botão a opção Distância e Comprimento  *e mede as distâncias entre os pontos que estão sobre uma mesma reta transversal. Por exemplo, medir a distância entre A e B, B e C e entre A e C. Para isso basta clicar, sucessivamente, sobre os dois pontos.*

Nesta questão, pude observar que muitos alunos não sabem o que é uma reta transversal, pois era solicitado no exercício que eles medissem a distância entre pontos que estivessem sobre uma mesma reta transversal e, no entanto, alguns mediam, por exemplo, a distância entre A e D, entre B e E e entre C e F, conforme figura 4.

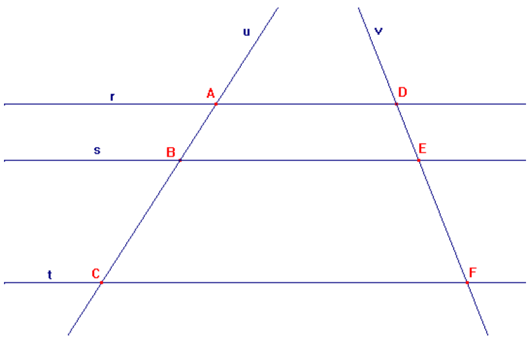


Figura 4 – Ilustração da situação exemplificada

Mais uma vez, constatei que alguns alunos não reconhecem que letras minúsculas são utilizadas para nomear retas e pude observar que marcavam os “pontos” *u* e *v* e, posteriormente, mediam as distâncias entre *u* e G e entre *v* e H, por exemplo, como mostra a figura 5:

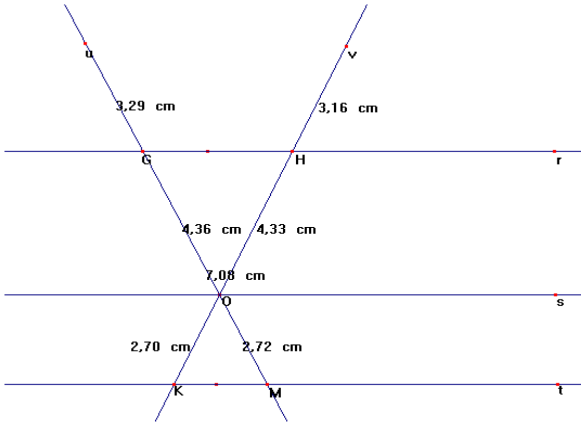


Figura 5 – Exemplo de construção que ilustra a observação

À parte das observações que lhes fiz, praticamente todos os alunos mediram corretamente as distâncias entre os pontos. Mesmo não tendo sido solicitado, alguns alunos registraram na folha do roteiro as distâncias medidas entre os pontos.

Questão 3

Seleciona no 9º botão a opção Calculadora. Encontra o valor de algumas razões entre dois segmentos determinados pela construção. Por exemplo: AB/BC, DE/EF, AB/DE, BC/EF, AC/BC, DF/EF, etc.

Ao selecionar esta opção, uma calculadora aparecerá na parte inferior da tela. Para calcular, por exemplo, a razão AB/BC, clica sobre o número que expressa a distância entre A e B, já determinado no item anterior; clica cobre o sinal "/"; sobre o número que expressa a distância entre B e C e finalmente sobre o sinal "=". Clica sobre o resultado encontrado, arrastando-o para fora da calculadora. Deixe-o reservado em algum lugar da tela.

Muitas vezes os alunos demonstram certa resistência para ler o roteiro e tomar conhecimento das instruções da atividade. Nesse caso, ou eles perguntam o que é para fazer antes mesmo de ler, ou então lêem o enunciado pela metade e já começam a executar o que é solicitado.

Isso pôde ser observado também no momento em que resolviam esta questão, pois, conforme o enunciado, para calcular a razão eles deveriam clicar sobre os números que expressavam a distância entre dois pontos, para que esses aparecessem em forma de parâmetros na calculadora (a/b); no entanto, alguns alunos digitaram esses valores utilizando os números do teclado.

A diferença entre esses dois procedimentos é que, quando são digitados os valores na calculadora, o resultado da operação se mantém estático, ou seja, quando o aluno movimenta as retas e as distâncias entre os pontos variam, a razão não varia conforme deveria, ela não se altera. Visto que na questão 4 eles teriam que movimentar as retas para justamente observar a forma como as razões variavam, os alunos que não seguiram corretamente as instruções da questão tiveram que repeti-la.

Questão 4

Movimenta as retas e observa o que ocorre com o valor das razões. Eles se mantêm ou se alteram? Escreve o que tu observaste.

Nesta questão, todos os alunos responderam que os valores das razões se alteravam. Ao serem perguntados sobre o motivo pelo qual isto acontecia, a grande maioria respondeu, não exatamente com essas palavras, que esta alteração se devia ao fato de as retas não se manterem sempre paralelas quando as movimentavam, provocando desta forma uma alteração não proporcional nas distâncias entre os pontos, o que provocava, conseqüentemente, a alteração, também não proporcional, entre as razões.

Alguns escreveram ainda que, quando movimentavam as retas transversais, os valores não se alteravam, ou seja, que a alteração ocorria apenas com o movimento das “retas paralelas”.

Questão 5

O que diferencia as construções em que o valor das razões se mantêm das construções em que esses valores se alteram ao movimentarmos as retas?

No momento em que apliquei a atividade, percebi que havia um problema no enunciado desta questão, pois na verdade, o valor das razões nunca se mantém o mesmo ao movimentarmos as retas. O que ocorre é que, quando as retas não permanecem paralelas sob ação do movimento, as razões se alteram, de forma que a proporção não é mantida, enquanto que, ao permanecerem paralelas, as razões variam de forma proporcional. Neste caso, não faz muito sentido perguntar qual a diferença entre as construções em que o valor das razões se mantém daquelas em que os valores se alteram, visto que em ambos os casos ocorre a variação.

Quando formulei esta questão, não havia pensado na possibilidade de nenhum aluno construir a representação sem o uso do comando *Reta Paralela*. Tinha a intenção de que aparecessem os dois tipos de construção, ou seja, com e sem o uso do recurso, para que pudéssemos comparar os resultados.

Como isso não aconteceu, visto que todos os estudantes fizeram a construção do feixe utilizando apenas a opção *Reta*, tive que provocar a discussão desta questão no grande grupo, logo após a discussão da questão anterior.

A turma concordou que o motivo pelo qual as razões não variavam igualmente estava relacionado ao fato de as retas não se manterem sempre paralelas ao serem movimentadas. Ao serem questionados sobre como poderíamos realizar as construções de forma que as retas se mantivessem sempre paralelas, independentemente do movimento provocado, apenas dois alunos lembraram e sugeriram o uso do recurso *Reta Paralela*.

Embora eu tenha observado que, após a discussão no grande grupo, a maioria dos alunos recordou a existência desse recurso, nenhum lembrou como utilizá-lo. Em seguida, todos os alunos foram solicitados a refazer a construção utilizando agora a opção *Reta Paralela*.

Após a construção ter sido refeita, eles responderam a questão indicando o fato de que o uso do recurso *Reta Paralela* faz com que as razões se alterem de forma proporcional ao movimentarmos as retas, o que não acontece quando as retas não permanecem paralelas sob a ação do movimento.

Transcrevo a resposta de um dos alunos: “Na primeira as razões mexiam, mas não tinha nada a ver uma com a outra e as retas sendo realmente paralelas as razões mudam, mas as duas ficam sempre iguais”.

Questão 6

*Escreve o que é para ti uma **proporção**.*

As respostas dadas pelos alunos para esta questão foram agrupadas em categorias, segundo o quadro 2, a seguir:

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Definiram proporção como sendo uma relação entre valores, medidas ou grandezas.	9 alunos
B - Definiram proporção como sendo uma igualdade entre duas ou mais razões.	19 alunos
C - Definiram proporção referindo-se às transformações provocadas em medidas de lados, de segmentos ou em figuras.	13 alunos
D - Definiram proporção utilizando um exemplo concreto.	4 alunos
E - Não responderam à questão	10 alunos

Quadro 2 – Distribuição das respostas à questão 6, segundo as categorias

As respostas que foram agrupadas na categoria **B** estão mais de acordo com as definições que aparecem nos livros didáticos ou com as que, usualmente, os professores apresentam aos alunos em sala de aula quando se inicia, formalmente, o estudo deste conteúdo.

Embora seja possível, são poucos os casos em que os alunos lembram, perfeitamente, das definições formais. No entanto, quase 35% deles responderam que “uma proporção é uma igualdade entre duas razões” e diante disso, penso que seja interessante relatar um fato ocorrido durante a realização da atividade.

Enquanto trabalhávamos com o software, a conexão com a Internet não foi suspensa e, quando chegou o momento de responder a pergunta desta questão, percebi que alguns alunos haviam consultado sites de busca, transcrevendo para a folha do roteiro definições formais, prontas.

Acredito que agiram de forma natural, não tentaram esconder o que estavam fazendo. A questão é que, atualmente, essa cultura do “pesquisar na Internet” dá margem à que, quando necessitam escrever sobre algum conceito, assunto ou definição, os sites de busca aparecem como a solução de todo o problema. Eles acessam as páginas, digitam os termos e tudo está ali, pronto. Não é necessário pensar. Basta copiar e colar.

Diante deste quadro, muitos alunos apresentam resistência e grandes dificuldades no momento em que devem explicar algo com suas próprias palavras, expressando suas próprias idéias.

Quando este fato ocorreu, não recriminei os alunos pela atitude, disse apenas que, naquele momento, eu não estava interessada no que as pessoas que construíram aqueles sites julgavam ser uma proporção, mas que eu gostaria de saber o que **eles** pensavam ser uma proporção, não importando a forma como iriam escrever. O fato é que a resposta deveria expressar uma idéia própria.

Dentre os alunos que não responderam à questão (categoria E), estão aqueles que deixaram em branco e os que responderam de forma redundante ou incompreensível.

Questão 7

Podemos dizer que há uma proporção entre as razões determinadas pelos segmentos que estão sobre as retas transversais? Justifica tua resposta.

As respostas dadas pelos alunos para esta questão foram agrupadas nas seguintes categorias, apresentadas no quadro 3:

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A - Justificaram a existência da proporção em função do uso das retas paralelas.	8 alunos
B - Justificaram a existência da proporção porque a razão ou a divisão entre as distâncias é a mesma.	5 alunos
C - Justificaram a existência da proporção em função das razões sofrerem modificações proporcionais.	12 alunos
D - Justificaram a existência da proporção de forma incorreta ou redundante.	13 alunos
E – Responderam que não há uma proporção.	4 alunos
F - Não responderam à questão	13 alunos

Quadro 3 – Distribuição das respostas à questão 7, segundo as categorias

Antes de os alunos registrarem, na folha do roteiro, as respostas para essa questão, realizamos uma discussão, no grande grupo, sobre a existência ou não de uma proporção entre as razões determinadas pelos segmentos que estavam sobre as retas transversais.

Nesse momento, ao serem questionados sobre o referido assunto, nenhum aluno se manifestou contrário à existência da proporção, no entanto, posteriormente, ao ler as repostas dadas por eles para essa questão, constatei que quatro participantes responderam que não havia uma proporção. Acredito que tais alunos possam não ter expressado, oralmente, suas opiniões, em função das respostas afirmativas de todos os demais colegas que participaram da discussão, por se sentirem constrangidos diante da maioria.

Dentre todos os alunos que responderam sim à questão, 13 justificaram de forma incorreta ou redundante, de maneira que não fica muito claro se realmente não compreenderam o que é uma proporção, ou se apenas não conseguiram expressar, corretamente, suas idéias.

Dos 13 alunos que não responderam à questão, há alguns que não conseguiram concluir a atividade.

Questão 8

O que tu concluíste com esta atividade?

As respostas dadas pelos alunos para esta questão foram sintetizadas e agrupadas nas categorias apresentadas no quadro 4:

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A - A existência da proporção entre os segmentos ou medidas deve-se ao fato de as retas serem paralelas.	15 alunos
B - Quando as retas são paralelas, sob ação do movimento, os números se alteram de forma proporcional.	2 alunos
C - Quando três retas paralelas são cortadas por transversais, a razão entre os segmentos determinados sobre elas forma uma proporção.	5 alunos
D - Proporção é a igualdade entre duas razões e que só há proporção se as retas forem paralelas.	6 alunos
E – Conclusão expressa de forma confusa.	12 alunos
F - Não responderam a questão	15 alunos

Quadro 4 – Distribuição das respostas à questão 8, segundo as categorias

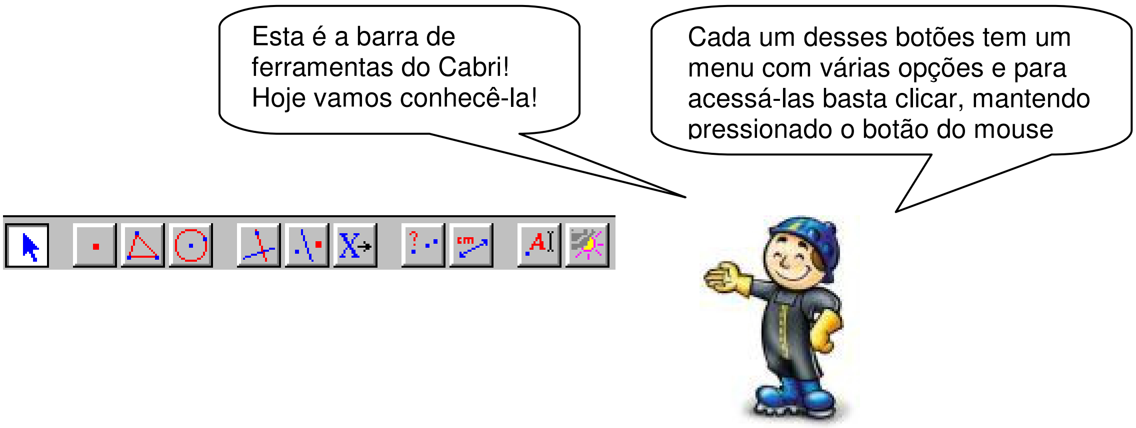
Penso que, assim como na questão anterior, a resolução dessa questão também ficou prejudicada em função do tempo, de forma que 15 alunos não responderam e 12 apresentaram uma resposta confusa, demonstrando não ter sido feita uma reflexão mais profunda a respeito da pergunta.

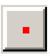
Sobre a conclusão a ser feita, muitos alunos deram destaque para a necessidade de as retas utilizadas na construção do feixe serem paralelas. Concluem que só há presença de proporção quando as retas são, de fato, paralelas, ou seja, quando, mesmo sob ação do movimento, essa propriedade é mantida.

Apenas cinco alunos apresentaram respostas mais completas, envolvendo quase todas as idéias contidas no Teorema de Tales.

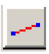
5.2 Familiarização com as ferramentas do software *Cabri Géomètre II*

Apresento, a seguir, a análise dos dados coletados durante a realização da primeira atividade desenvolvida com turmas de 7ª série do Ensino Fundamental, com o objetivo de explorar os conceitos de Geometria elementar com o *Cabri* e proporcionar a familiarização do aluno com as ferramentas do programa. Sessenta e um alunos trabalharam na atividade, que teve a duração de um período. No roteiro, alguns itens apenas solicitavam construções que os alunos deveriam realizar com o software. Outros solicitavam os registros de algumas conclusões. A seguir são listadas as primeiras cinco primeiras questões, sobre as quais os alunos não encontraram muitas dificuldades, visto que solicitavam apenas a execução de determinados procedimentos com vistas à construção de alguns objetos geométricos, como pontos, segmentos e triângulos.



1. Vamos criar dois pontos, para isso clica no 2º botão e seleciona a opção ponto .

Clica na tela uma vez e digita "A" para nomear o primeiro ponto, clica novamente e digita "B".

2. Cria um segmento que una os pontos A e B. No 3º botão existe a opção segmento,  *clica nela e depois nos pontos A e B.*

3. Pronto! Agora que fizeste o segmento AB, vamos criar um triângulo ABC:

Cria o ponto C, fora do segmento AB.

Cria os segmentos AC e BC.

4. Mede os lados do triângulo que construíste, para isso basta clicar na opção distância e comprimento, que se encontra no 9º botão, e após, sobre os segmentos AB, BC e CA.

5. Existe ainda outra maneira de se construir um triângulo no Cabri: Clica no 3º botão e seleciona a opção triângulo . Clica na tela e, em seguida, digita o nome do primeiro ponto: "M". Clica em outro ponto da tela e digita o nome do segundo ponto: "E". Faz o mesmo para o terceiro ponto: "U".

Diante da natureza dessas questões iniciais, a análise da produção dos participantes é feita a partir do item 6.

6. *Construíste o triângulo MEU. Agora, seleciona a opção **distância e comprimento** e clica sobre os pontos M e E. A seguir, faz o mesmo com os pontos M e U e com os pontos U e E. O que obtiveste?*

Pudemos constatar que, dos 61 alunos que responderam a este item, 49 o fizeram de forma adequada, de modo que apenas 12 alunos apresentaram uma resposta confusa ou pelo menos matematicamente incorreta.

Enquanto 50% dos alunos limitaram-se a dizer que obtiveram exatamente a distância entre os pontos, apenas 17 explicitaram o estabelecimento de alguma relação dos pontos M, E e U com o triângulo MEU, respondendo que haviam obtido as medidas dos <u>lados</u> do triângulo, ou seja, que esses pontos não eram quaisquer, mas vértices que determinavam os lados de um triângulo. Assim, esse grupo de 17 alunos não analisou apenas as conseqüências mais óbvias do procedimento solicitado.

Quanto aos 12 alunos que responderam de forma inadequada, alguns conseguiram mostrar que, de certa forma, entenderam o significado dos resultados obtidos, apresentando dificuldade apenas para expressar suas idéias, utilizando termos matemáticos inadequados para essa situação como, por exemplo, o aluno que respondeu que "As retas não têm o mesmo comprimento", quando seria mais correto escrever "os segmentos não têm o mesmo comprimento".

Outro exemplo de resposta dada para esse item foi: "Cada reta possui um lado diferente". Suponho que o aluno, ao escrever esta resposta, estivesse tentando dizer que cada LADO possui um COMPRIMENTO diferente.

*7. Seleciona a mesma opção, **distância e comprimento** e clica sobre cada um dos três lados do triângulo MEU. Que medida tu obtiveste?*

Dentre todas as respostas dadas para este item, duas tiveram uma freqüência maior. Vinte e sete alunos escreveram a medida - o valor obtido - mas não mencionaram o que ela significava na construção, embora ao clicarem sobre os lados do triângulo MEU tivesse aparecido a informação “perímetro deste triângulo”.

Outros 27 alunos responderam que a medida obtida foi a do perímetro e, ao observá-los durante a sessão de trabalho, foi constatado, pelos comentários que faziam, que essa resposta não era dada pelo fato de aparecer na tela a expressão “perímetro deste triângulo” quando clicavam sobre seus lados, mas porque, ao observarem o valor obtido, percebiam que ele era, aproximadamente, a soma das três medidas encontradas na questão anterior. Na verdade a medida era, de fato, o valor exato da soma dos comprimentos dos três lados do triângulo, mas uso a expressão “aproximadamente”, porque fizeram apenas um cálculo mental, ou seja, sem a precisão obtida com a calculadora.

Dos 61 alunos, apenas quatro realizaram o procedimento de forma incorreta, ou seja, em vez de clicarem sobre os lados do triângulo MEU, clicaram sobre seus vértices encontrando, portanto, as mesmas respostas da questão anterior.

Somente um aluno parece não ter compreendido o significado da medida obtida e nem percebido a informação de que ela era o perímetro do triângulo, visto ter respondido que tal valor se tratava da medida de um dos lados.

8. *Compara o que tu fizeste no item 4 com o que tu fizeste no item 7. Qual é a diferença entre as respostas?*

Nesta questão, os alunos não foram solicitados apenas a realizar um procedimento e dizer o que obtinham como resultado. Além disso, tiveram que exercitar suas habilidades de comparar a resposta do item 4, em que deveriam medir os lados de um triângulo que fora construído a partir de segmentos, com a resposta do item 7, em que o triângulo fora construído com a opção “triângulo” do Cabri.

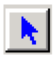
Sob esse aspecto já se pode considerar que este item apresenta um nível de exigência superior aos dois anteriores. Mesmo assim, a grande maioria dos participantes, 33 deles, percebeu a diferença entre as duas respostas ao escreverem que, no item 4, mediram os lados ou a distância de um ponto a outro, enquanto que no item 7, mediram o perímetro.

As respostas dadas por 17 alunos evidenciam que estes não perceberam a diferença entre os resultados obtidos nos itens 4 e 7. Alguns responderam que a diferença era apenas a medida, o comprimento, ou seja, referiam-se aos diferentes valores encontrados em cada uma das questões. Esses alunos não reconheceram que o procedimento realizado no item 7 determinava o perímetro do triângulo MEU. Podemos observar isto ao lermos, por exemplo, a seguinte resposta: “No item 4 os lados são diferentes e no 7 são iguais”.

Já cinco alunos compreenderam a diferença, mas não conseguiram expressá-la de forma correta. São exemplos de respostas para esse caso: “No item 4 eu medi os lados do triângulo e no 7 o perímetro de todos os lados juntos” e “A diferença é muito pequena de **a** a **b** – 14 cm, de **a** a **c** – 14,80 cm e de **b** a **c** – 15,04 cm. No triângulo MEU o perímetro é de 14,42”. Na primeira resposta apresentada como exemplo para este caso, provavelmente, o aluno pensou que no item 7 ele obteve uma medida que era a soma de todos os lados juntos, mas como essa soma é representada pela palavra perímetro, ele relacionou as informações, mas não conseguiu expressá-las de maneira correta.

Mais uma vez se confirma o fato de que para os alunos é bastante difícil expressarem suas idéias com clareza por meio da escrita.

Três alunos não responderam ao item.

9. *No primeiro botão, seleciona a opção ponteiro* *, clica sobre o ponto M e arrasta-o para outra posição na tela. O que acontece com as medidas?*

Nesta questão, os alunos puderam observar uma pequena mostra do caráter dinâmico oferecido pelo programa, pois ao serem solicitados a movimentarem o ponto M, podiam perceber as variações das medidas dos lados do triângulo. Nesses momentos, a expressão de surpresa dos alunos foi quase unânime, sendo possível perceber que eles acham muito interessante poder visualizar as construções mudando de forma e de tamanho e os números que representam as medidas variando rapidamente com um simples movimento do *mouse*.

Treze alunos responderam que as distâncias apenas aumentaram, 38 alunos escreveram que as medidas se modificaram e neste caso são considerados tanto os alunos que disseram que as medidas aumentavam e diminuíam quanto aqueles que disseram que elas simplesmente se modificavam.

Cinco alunos fizeram uma afirmação correta, mas que não respondia o que acontecia com as medidas como, por exemplo, um aluno que escreveu que “o triângulo mudava”.

Um único aluno respondeu que as medidas não se alteravam e é analisando essa resposta que se pode observar a importância da realização de atividades que permitam aos alunos explorarem as ferramentas disponíveis no programa. É importante que eles aprendam a forma correta de utilizá-las para que as potencialidades do software sejam aproveitadas da melhor forma possível. O que ocorreu com este aluno é que, ao lado de cada um dos vértices do triângulo, havia rótulos, ou seja, letras que serviam para nomear esses vértices. Se ao selecionar a opção **ponteiro** o aluno clicar sobre o rótulo e não sobre o vértice, o que ele conseguirá movimentar será a letra e não o ponto. E movimentando as letras nada acontece com o triângulo e, conseqüentemente, nada acontece com suas medidas.

Quatro alunos não responderam a questão.

10. *Agora vamos colorir os triângulos que tu construíste. Primeiro tu irás colorir o triângulo MEU.*

Clica no 11º (último) botão e escolhe a opção ***preencher*** *. Abrirá uma pequena janela com as opções de cores que tu poderás escolher. Clica com o mouse na cor desejada e em seguida sobre um dos lados do triângulo (aparecerá a informação Este triângulo).*

Agora tu vais colorir o triângulo ABC. Siga as mesmas instruções acima. O que aconteceu? Registra tuas conclusões

Nesta questão, 16 alunos apresentaram uma resposta mais completa, dizendo que não havia sido possível colorir o triângulo ABC porque ele era construído a partir de segmentos, enquanto que o triângulo MEU podia ser pintado porque era construído a partir da ferramenta triângulo. Dentre esses alunos, estão aqueles que chegaram a essa conclusão sozinhos e os que formularam essa justificativa quando eu dizia para que pensassem na forma como haviam construído os triângulos, ao solicitarem minha ajuda para responder à questão.

Sete alunos responderam corretamente a questão, mas em suas justificativas comentavam apenas sobre a construção do triângulo ABC sem mencionar, portanto, a maneira como fizeram o triângulo MEU.

Onze alunos responderam que não era possível pintar o triângulo ABC, mas não apresentaram nenhuma justificativa, enquanto que 12 participantes responderam corretamente, mas justificaram de forma incorreta como, por exemplo, “Não pinta porque no ABC são retas independentes.”, “O triângulo ABC não pinta porque não tem medida exata", "Não tem como pintar porque a outra tem perímetro." ou ainda "Não acontece nada porque ele não foi feito no segmento triângulo".

Ao analisar as justificativas acima, pude perceber que, mesmo estando erradas, algumas delas têm certa lógica. O aluno que disse "Não pinta porque no ABC são retas independentes", provavelmente queria dizer que não é possível colorir o ABC porque foi feito apenas por **segmentos** independentes, segmentos ligados ao acaso.

Um dos grandes problemas que podemos observar ao trabalharmos Geometria com os alunos está na compreensão do significado, da representação das figuras geométricas. Para a grande maioria dos estudantes, qualquer linha que não seja curva é chamada de reta, então nada mais natural que o aluno dizer que o ABC não pinta porque "são retas independentes". É na confusão dos conceitos que está, em grande parte, a dificuldade que eles têm de se expressarem de forma correta.

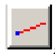
Dois alunos fizeram uma afirmação correta, mas que não vinha ao encontro de uma resposta adequada. Um exemplo de resposta para esse caso é "O computador não considera a forma segmento como triângulo". De fato essa afirmação está correta, visto que um segmento nunca será considerado um triângulo, nem pelo computador e nem por ninguém. O aluno, portanto, não responde a pergunta.

Apenas um dos participantes conseguiu colorir os dois triângulos, mas isso ocorreu porque após construir o triângulo MEU, este aluno percebeu um erro no triângulo ABC que havia construído e apagou-o para refazê-lo. Porém, como havia achado mais fácil construir um triângulo utilizando a opção **triângulo** em vez de unir três segmentos, ele acabou por não construir o ABC conforme havia sido solicitado e conseqüentemente conseguiu pintá-lo também.

Seis alunos escreveram de forma confusa ou incorreta. Segue um exemplo de resposta dada por um dos alunos para essa questão: "A opção triângulo não aparece porque o triângulo ABC é uma junta de três segmentos e o triângulo MEU já está pronto. Não dá porque o triângulo ABC tem lados diferentes.".

Seis alunos não responderam a questão.

11. Já construíste vários segmentos, agora constrói uma reta r. No 3º botão encontrarás a opção reta *, seleciona-a e depois clica em dois pontos diferentes da tela. Não esquece de digitar "r" logo em seguida para nomear a reta.*

12. No 3º botão também existe a opção semi-reta *, constrói então uma semi-reta s clicando em dois pontos diferentes da tela. Não esquece de nomeá-la também.*

13. Qual a diferença entre uma reta e uma semi-reta?

Nesta questão, foi possível observar, novamente, a dificuldade de alguns alunos para estabelecer relações, diferenças ou comparações entre objetos ou situações. Sete alunos não responderam qual a diferença entre uma reta e uma semi-reta, apenas explicaram o que significa uma ou outra.

Dentre os alunos que responderam esta questão, 15 definiram o que seriam esses objetos, expressando idéias associadas ao infinito considerando, dessa forma, que uma reta é infinita enquanto que uma semi-reta não é.

As respostas de outro grupo, formado também por 15 alunos, relacionam-se, de certa forma, às anteriores, pois estes expressaram que a reta não tem início nem fim ao passo que a semi-reta possui apenas início. O que chamou a atenção nas respostas desses 15 estudantes é o fato de alguns terem escrito que a semi-reta possui apenas um fim, em vez de indicarem que possui apenas um começo. Não ficou claro, no entanto, se o ponto origem da semi-reta estava sendo considerado um ponto final.

Foi interessante observar também, pela resposta de alguns estudantes, que é evidente a idéia de que a reta é composta por duas partes ou por "dois lados", como expressa um dos alunos: "A reta não possui fim, enquanto que a semi-reta possui um lado finito e o outro infinito." Dentre esses estudantes, há ainda aqueles que escrevem que a semi-reta é exatamente a metade de uma reta.

Ao analisar as idéias que supostamente estariam subjacentes às respostas que expressavam ser a semi-reta a metade de uma reta, considero que, em grande parte dos casos, estavam fortemente associadas com a forma como o *Cabri* representa esses dois objetos, como podemos observar na figura 6, que mostra a construção feita por um estudante:

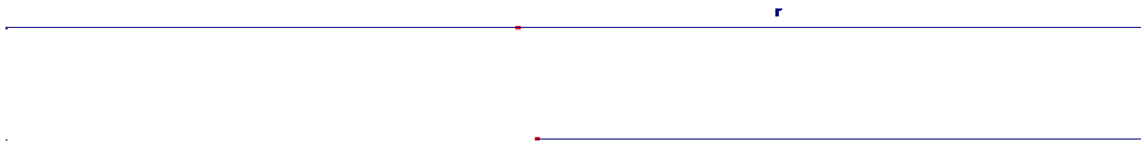


Figura 6 – Construção de um aluno para a questão 13

Além disso, observei também a resposta dada por um dos estudantes: “A reta ela se estende entre os dois lados do ponto e a semi-reta em apenas um lado do ponto”. Pode-se considerar, assim, que o ponto que surge no momento em que se clica sobre a tela para iniciar a construção da reta faz parecer, a estes alunos, que este objeto foi “dividido” em duas partes e que a semi-reta construída posteriormente caracteriza-se, dessa forma, como uma de suas “metades”.

A partir de outras respostas fornecidas, foi possível observar a influência do dinamismo característico do programa, pois alguns alunos, ao estabelecerem comparações entre os dois objetos, escreveram que a reta “estica”, “se estende” para os dois lados enquanto que a semi-reta “vai” para um lado só. Logo, para esses estudantes, a possibilidade de visualizar os objetos construídos em movimento foi um aspecto que influenciou as respostas relacionadas com esses entes geométricos.

14. Vamos fazer diferente? Descobre como se constrói uma circunferência c com centro O e descreve abaixo todos os passos que usaste para criá-la.

Como esta questão foi uma das últimas do roteiro, 23 alunos não conseguiram respondê-la por falta de tempo. Dentre os estudantes que responderam, 17 o fizeram de forma sucinta, descrevendo apenas alguns passos da construção da circunferência.

Já 11 alunos relataram de forma completa todos os passos utilizados e 10 estudantes fizeram um relato pouco claro.

15. Sempre que quiseres escrever um texto no Cabri, deves criar uma caixa de ***comentários****. Essa opção encontra-se no 10º botão. Utilizando essa ferramenta escreve os teus dados de identificação (nome, série e turma) em algum canto da tela.*

16. O Cabri possui muitos outros recursos além desses que conheceste hoje. Explora-o, construindo um desenho usando tanto os recursos conhecidos quanto os novos que descobrires.

Anota no quadro abaixo as ferramentas que usares para desenhar.

Nº do botão	***Opção***	***Nº do botão***	***Opção***

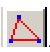
Nesta questão, 15 alunos construíram um desenho.

5.3 Soma das medidas dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros.

As questões apresentadas e analisadas a seguir, compõem a segunda atividade realizada com 77 alunos da 7ª série do Ensino Fundamental, em dois períodos. O trabalho teve como objetivo verificar algumas propriedades dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros.

5.3.1 Trabalhando com triângulos

Questão 1

Vamos construir um triângulo qualquer. Para isso, clica no 3º botão e seleciona a opção ***triângulo*** .

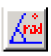
Clica na tela e, em seguida, digita o nome do primeiro ponto: "A".

Clica, em outro ponto da tela, e digita o nome do segundo ponto: "B".

Faz o mesmo para o terceiro ponto: "C".

Os estudantes construíram o triângulo com facilidade. O único fator a ser destacado é que muitos (mais de 50% dos estudantes) já se preocupavam em nomear os pontos da construção com letras maiúsculas, demonstrando que já apresentavam maior preocupação com os detalhes formais das construções do que quando realizaram a atividade de familiarização com as ferramentas do software.

Questão 2

Vamos medir os ângulos do triângulo ABC. Seleciona no 9º botão a opção ***ângulo***  *e clica sobre os pontos A, B e C, nessa ordem, para medir o ângulo*

$A\hat{B}C$; sobre os pontos B, C e A, nessa ordem, para medir o ângulo $B\hat{C}A$; e sobre os pontos C, A e B para medir o ângulo $C\hat{A}B$.

Um dos fatores que garante aos estudantes a validade dos resultados encontrados é a precisão das construções e das ações realizadas para resolução de uma questão. Enquanto os estudantes mediam os ângulos, pude observar que alguns deles não tomavam o cuidado de clicar sobre os três vértices do triângulo para encontrar a medida de um determinado ângulo como, por exemplo, do ângulo *CÂB*. Na pressa, clicavam sobre o lado do triângulo e bem próximo ao vértice, mas não sobre ele, fazendo com que a medida encontrada não fosse de fato a medida do ângulo. A figura 7 ilustra o ocorrido.

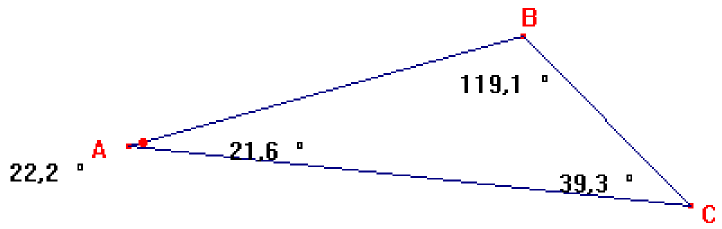


Figura 7 – Ilustração de um erro cometido por um aluno

O ângulo *CÂB* mede, de fato, 21,6°, mas ao clicar próximo ao vértice A (conforme exemplifica o ponto em destaque sobre o lado AB) e não sobre ele, o aluno encontra outra medida para o ângulo, neste caso 22,2°, como se pode verificar na figura acima.

O problema é que muitos alunos não se preocupam com a questão da precisão, de forma que vários deles só se davam conta da existência do ponto próximo ao vértice, quando eu os questionava sobre a finalidade do referido objeto, naquele local. Em seguida, mediam novamente o ângulo, apagando ou não o ponto.

Questão 3

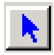
*Seleciona a opção **calculadora***  *no 9º botão. Em seguida, clica com o mouse sobre a medida do ângulo A. Aparecerá no visor da calculadora a letra "a", clica sobre o sinal de "+". Repete o mesmo procedimento para as medidas dos ângulos B e C e a seguir clica no sinal de igual. Que valor tu obtiveste?*

Nesta questão, os alunos não encontraram muita dificuldade para executar o solicitado. Praticamente todos os 77 alunos apresentaram a mesma resposta para a soma dos três ângulos internos do triângulo, ou seja, 180°.

Embora não tenha sido solicitado, um aluno acrescentou em sua resposta as medidas encontradas para cada um dos três ângulos, bem como a expressão da sua soma. O interessante é que um dos alunos justificou que havia encontrado 180° para a soma dos três ângulos porque era um triângulo, dando, portanto, indícios de que já conhecia essa propriedade.

Um dos estudantes escreveu a seguinte resposta para essa questão: “24,74 cm e 180°”, ou seja, ele apresentou o perímetro do triângulo e complementou com a soma dos ângulos, embora não fosse solicitado o perímetro.

Questão 4

Seleciona no 1º botão a opção ***ponteiro*** *. Em seguida, clica sobre um dos três vértices do triângulo ABC arrastando-o para outra posição na tela. O que aconteceu com as medidas dos ângulos internos?*

As respostas dadas para essa questão foram agrupadas por semelhança e distribuídas nas categorias indicadas no quadro 5:

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A - As medidas dos ângulos sofreram alterações.	53
B - As medidas diminuíram e aumentaram.	13
C – As medidas aumentaram.	6
D – As medidas diminuíram.	2
E – Não aconteceu nada.	3

Quadro 5 – Distribuição das respostas da questão 4, segundo as categorias

Fazem parte da categoria A, as respostas que expressavam que após a movimentação de um dos vértices do triângulo, as medidas dos ângulos internos mudavam, se modificavam ou eram alteradas. Nessas respostas não era mencionado que tipo de alteração ocorria com as medidas.

Embora não tenha sido solicitado nenhum tipo de justificativa, alguns alunos complementavam suas respostas com argumentos que, para eles, pareciam bastante claros. Seguem dois exemplos de respostas dadas pelos estudantes: “Mudaram de valor, pois o triângulo ficou menor ou maior (no meu caso maior).” e “Eles mudavam de acordo com que eu aumentava ou diminuía.”

Considero que, para esses estudantes, parece ser evidente o fato de que, ao aumentarmos ou diminuirmos os triângulos, as medidas dos ângulos também acompanhem essas modificações, porque eles ainda não estudaram os casos de semelhança de triângulos. Sendo assim, para esses alunos não é clara a idéia de que é possível, por exemplo, duplicamos as medidas dos lados de um triângulo, sem que seus ângulos também tenham suas medidas duplicadas.

Da categoria B, fazem parte as respostas indicativas de que as medidas dos ângulos internos aumentavam e diminuíam após a movimentação de um dos vértices do triângulo, como, por exemplo, "O "A" e o "B" aumentaram e o C diminuiu" ou "O vértice movimentado aumentou seu ângulo, o ângulo C e B diminuíram". Pode-se dizer que esses alunos, ao realizarem o movimento solicitado, observaram as alterações das medidas dos ângulos de uma forma geral, ou seja, preocuparam-se em descrever as modificações ocorridas com as medidas de todos os ângulos internos do triângulo e não apenas de um ou dois ângulos.

Já as respostas agrupadas nas categorias C e D revelam uma observação mais direta, sem uma análise mais detalhada como, por exemplo: "As medidas aumentaram." ou "Diminui a medida dos ângulos internos". Julgo que foi uma observação mais direta porque, considerando que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°, é inviável que, ao movimentar um dos vértices da figura, o estudante tenha percebido que as três medidas tivessem aumentado concomitantemente ou que as três tivessem diminuído. Isso dá indícios de que a resposta fornecida por esses alunos foi baseada na observação das modificações ocorridas por apenas dois ângulos do triângulo.

Finalizando a análise das respostas dadas para essa questão, temos três alunos que expressaram que as medidas ficaram iguais ou que nada aconteceu. Considerando que, ao movimentar qualquer um dos três vértices, certamente, as medidas dos ângulos internos sofreriam alterações, é provável que esses estudantes não tenham clicado sobre o vértice do triângulo, mas sim sobre o lado provocando simplesmente o deslocamento da construção para outra posição da tela o que de fato não altera as medidas dos ângulos.

Questão 6

Após movimentar um dos vértices do triângulo ABC e somar, novamente, as medidas dos ângulos internos, que valor tu encontraste?

Nesta questão todos os alunos responderam que encontraram 180°.

Questão 7

O que tu concluíste sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo?

As respostas dadas para essa questão foram agrupadas por semelhança e distribuídas nas categorias indicadas no quadro 6:

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Enuncia a propriedade.	47
B – Enuncia a propriedade e complementa a resposta.	10
C - Demonstra ter compreendido a propriedade, mas apresenta uma frase incompleta.	18
D - Demonstra ter compreendido a propriedade, mas a resposta apresenta palavras inadequadas.	2

Quadro 6 – Distribuição das respostas da questão 7, segundo as categorias

Todos os alunos parecem ter compreendido que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°, mas alguns apresentaram respostas mais completas, acrescentando algum complemento à propriedade enunciada, outros escreveram de forma incompleta ou utilizaram termos inadequados, porém as principais idéias da propriedade estavam implícitas nas frases formuladas.

As respostas agrupadas na categoria A enunciaram a propriedade de forma bastante clara, como por exemplo: "Concluí que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°" ou "A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°".

Já na categoria B, pode-se observar respostas que, além de expressarem compreensão da propriedade, chamam atenção, de alguma forma, para o caráter dinâmico do software. São respostas que destacam o fato de não importar o tamanho ou a forma do triângulo quando se trata da soma dos ângulos internos deste objeto geométrico. Ou seja, o dinamismo oferecido pelo *Cabri* permitiu que, após sucessivos movimentos, os alunos percebessem a ocorrência da mesma resposta, independente do formato, tamanho dos lados e medidas dos ângulos internos do triângulo. Fazem parte desta categoria respostas como: "Que não importa o tamanho ou a forma do triângulo, a soma de seus ângulos sempre vai dar

180°”, “Que não importa o tamanho dos lados, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°”, “Que independente dos tamanhos dos ângulos para ser um triângulo precisa ter 180°” e “Concluí que por mais que movimentamos um vértice, os outros ângulos vão se ajustar regularmente, com o resultado final: 180°”.

As respostas que pertencem à categoria C foram escritas de forma incompleta. Em cada uma delas sempre faltou alguma palavra para que a propriedade fosse expressa corretamente, mas, considerando o contexto da atividade, todas elas também mostram que os alunos compreenderam as idéias. Seguem a seguir: “A medida dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°”. (faltou a palavra **soma);** “Sempre dá a mesma medida”. (faltou escrever **qual** é a medida que sempre é a mesma); “A soma das medidas internas de um triângulo sempre é igual a 180°” (faltou escrever que a soma é **dos ângulos internos**).

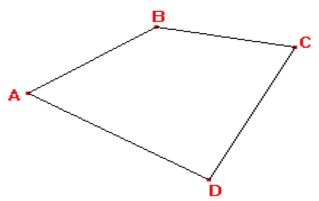
Concluindo a análise das respostas obtidas para essa questão, apresento a categoria D, da qual fazem parte duas respostas que, de acordo com o contexto da atividade, mostram que o estudante compreendeu a propriedade, mas respondeu utilizando-se de palavras inadequadas. São elas: “Não importa o número que encontramos nos ângulos internos porque a soma dos **lados** de um triângulo é sempre 180°.” e “A soma de todos os **lados**, não importa o tamanho sempre vai dar 180°.” Ou seja, os participantes escreveram **lados** quando deveriam escrever **ângulos internos**, mas não sabemos se foi um lapso ou se, efetivamente, os alunos não compreenderam a situação.

5.3.2 Trabalhando com os quadriláteros

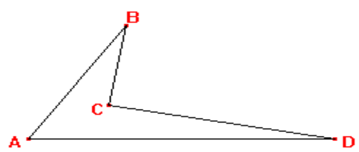
Questão introdutória

*Agora, vamos trabalhar um pouco com os quadriláteros e para isso veremos, inicialmente, dois tipos deles: os quadriláteros **côncavos** e os quadriláteros **convexos**.*

Observa, abaixo, um exemplo de cada um deles.



Quadrilátero convexo



Quadrilátero côncavo

Que(ais) diferença(s) tu observas entre eles?

As respostas dadas para essa questão foram agrupadas nas categorias apresentadas no quadro 7:

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Destacaram a forma e os ângulos como diferenças entre as duas figuras.	20
B - Fizeram alguma observação quanto ao ângulo C do quadrilátero côncavo.	27
C – Expressara já ter algum conhecimento sobre a diferença entre os dois tipos de quadriláteros.	16
D – Fizeram referência à concavidade de um dos quadriláteros.	5
E – Apresentaram algum argumento falso.	4
F – Não responderam.	5

Quadro 7 – Distribuição das respostas da questão introdutória, segundo as categorias

As respostas agrupadas na categoria A são aquelas que destacam, como diferenças entre os dois quadriláteros, o formato e os ângulos. Muitos alunos que escreveram simplesmente que o formato era um aspecto diferenciador das duas figuras disseram ter conseguido compreender a diferença entre os polígonos, mas não expressá-la por meio da fala ou da escrita.

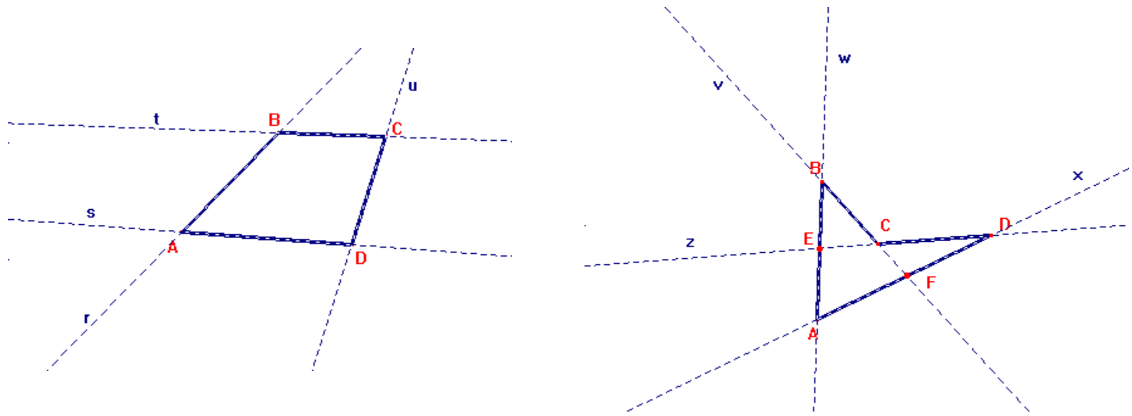
Outros estudantes também fizeram referência aos ângulos, mostrando que percebiam, nesse aspecto, uma diferença entre os dois objetos. Uma resposta formulada por um deles, sobre a diferença, foi: “o quadrilátero convexo tem um ângulo interno menor que o quadrilátero côncavo”. Ou seja, este aluno percebeu, de alguma forma, que o quadrilátero côncavo tinha um ângulo interno cuja medida era maior que 180°. Ele não escreveu essa conclusão de forma explícita, mas parece ter sido essa a idéia subjacente à resposta.

Para os 27 estudantes cujas respostas fazem parte da categoria B, a diferença que mais lhes chamou atenção foi a característica do ângulo C do quadrilátero côncavo. Muitos escreveram que, no quadrilátero acima citado, havia um ângulo “mais para dentro”, ou seja, tentavam dizer, de alguma maneira, que o vértice deste ângulo “invadia” a região interna do quadrilátero. Algumas respostas são: “O ângulo C do quadrilátero côncavo está mais para dentro (+ inclinado para dentro)”; “No côncavo tem ângulos para dentro e para fora e no convexo tem ângulos para fora.” e “Por que o ângulo C é arrastado pra dentro, então seu ângulo fica maior.”.

As respostas apresentadas na categoria C dão indícios de que esses alunos já haviam estudado esse aspecto com relação aos quadriláteros, ou seja, a diferença entre côncavos e convexos. São respostas que expressam idéias muito semelhantes às apresentadas em definições formais presentes nos livros didáticos e, além disso, ficaram concentradas em apenas duas das cinco turmas com que trabalhei, levando-me a crer que, para esses estudantes, a professora, provavelmente, já tinha feito algum comentário.

Todas as respostas apresentadas são muito semelhantes as que destaco a seguir, como exemplo: “Percebi que no quadrilátero convexo as linhas não se cruzam e no côncavo elas se cruzam” e “A diferença entre eles é que no convexo se traçarmos retas a partir de seus vértices elas não se cruzarão, já no côncavo sim”. Em todas as respostas havia as expressões “se cruzam” e “não se cruzam”.

Relacionando o que escreveram com alguns desenhos que fizeram sobre as figuras presentes no enunciado desta questão, compreendi o que os estudantes tentavam dizer. A idéia está representada nas construções indicadas na figura 8:



Quadrilátero convexo **Quadrilátero côncavo**

Figura 8 – Representação gráfica das respostas dadas pelos alunos

O que os 16 alunos tentavam dizer é que, no quadrilátero côncavo, algumas das retas determinadas pelo prolongamento dos lados interceptam o polígono em algum ponto sobre seus lados. Observa-se, na figura acima, que a reta z, que é o prolongamento do lado CD, intercepta o lado AB no ponto E e a reta v, que é o prolongamento do lado BC do quadrilátero côncavo, intercepta o lado AD no ponto

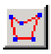
F. Tal fato não ocorre nos quadriláteros convexos. Parece ser essa a idéia que os alunos tentavam explicar quando escreviam “Que o convexo não se cruza e o côncavo se cruza”.

Na categoria D estão as respostas que faziam referência à existência de uma concavidade, de um “buraco” nos quadriláteros côncavos. Alguns exemplos do que os alunos escreveram para essa questão são: “O quadrilátero côncavo tem uma espécie de buraco”, “Um dos quadriláteros possui uma concavidade” e “Que o quadrilátero côncavo dá uma sensação que se tem um buraco e no convexo não”. Esse foi o aspecto observado por cinco participantes.

Os quatro estudantes cujas respostas fazem parte da categoria E, apresentaram algum argumento falso em suas considerações, como, por exemplo: “Uma tem lados retos e a outra não”; “Um tem um ângulo de 90º” (não é possível fazer essa afirmação com base no desenho) e “Os quadriláteros convexos têm ângulos internos e os côncavos têm ângulos externos” (ambos os quadriláteros têm ângulos internos e externos).

Para concluir, temos cinco estudantes na categoria F, que são aqueles que não responderam a questão, seja por que não apresentaram resposta alguma ou por que o argumento é redundante, como, por exemplo, a resposta a seguir: “As diferenças que observei entre eles foi que são diferentes tipos de quadriláteros”.

Questão 1

Agora, constrói um quadrilátero ***convexo*** *selecionando, no 3º botão, a opção* ***polígono***  *e nomeando seus vértices A, B, C e D durante a construção.*

O enunciado da questão ficou bastante claro para os estudantes, de modo que apenas um participante construiu um quadrilátero côncavo. Na figura 9, é apresentada a construção feita pelo aluno:

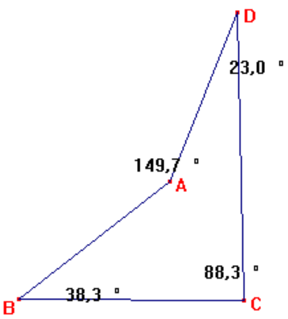


Figura 9 – Construção do aluno para a questão 1

Ao analisar, posteriormente, os quadriláteros construídos pelos alunos, verifiquei que apenas um aluno cometeu um erro durante a construção da figura. Ao construir um dos vértices do polígono ele clicou duas vezes seguida sobre a tela, marcando dessa forma dois vértices bem próximos um do outro. Ocorre então que, ao movimentarmos o ponto que foi marcado a mais entre os dois vértices consecutivos do quadrilátero, a figura passa a ser um pentágono, conforme ilustra a figura 10, a seguir:

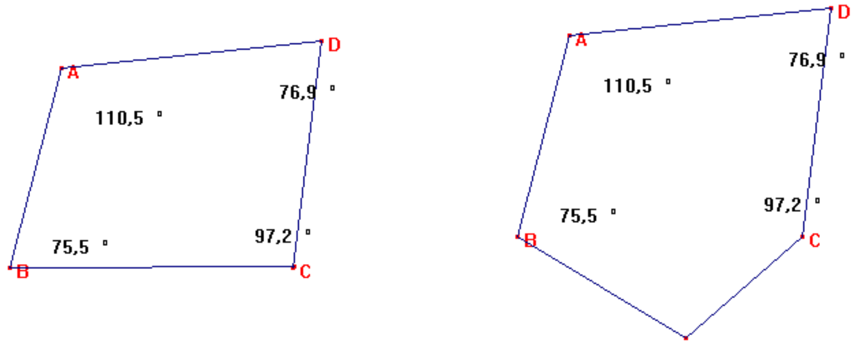
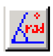


Figura 10 – Construção incorreta de um aluno

Esse erro cometido durante a construção do quadrilátero poderia ter prejudicado a execução do que é solicitado na questão seguinte, ou seja, medir os quatro ângulos internos do quadrilátero. Porém, ao medir o ângulo C, o aluno clicou sobre os pontos B, C e D, o que garantiu que medisse corretamente o ângulo.

Questão 2

*Seleciona a opção **ângulo***  *no 9º botão e mede os quatro ângulos internos do quadrilátero da mesma forma que tu fizeste para medir os ângulos internos do triângulo no exercício anterior.*

Dos 77 alunos, apenas quatro realizaram algum procedimento incorreto ao medir os ângulos internos do quadrilátero. Seguem abaixo os quatro casos.

1°) O aluno mediu de forma incorreta o ângulo B do quadrilátero, pois em vez de clicar sobre os vértices A, B e D ele clicou sobre A, B e C, encontrando 46° em vez de 89,3°, que seria a medida correta. A figura 11 ilustra o procedimento incorreto e a forma como deveria ter sido feita a medição.

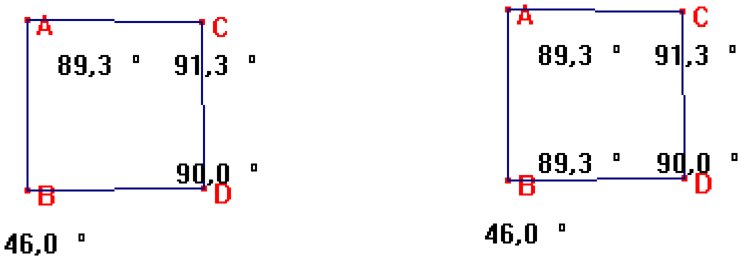


Figura 11 – Ilustração dos procedimentos incorreto e correto

2°) O aluno mediu de forma incorreta o ângulo A do quadrilátero clicando sobre o vértice D, sobre o lado AD num ponto próximo ao vértice A e sobre o vértice B.

Como o vértice A era a origem do ângulo que estava sendo medido, o fato de o aluno ter clicado próximo a ele, mas não sobre ele, fez com que a medida encontrada fosse 166,0° e não 165,2° que seria o valor correto.

A figura 12 mostra a construção feita pelo aluno.

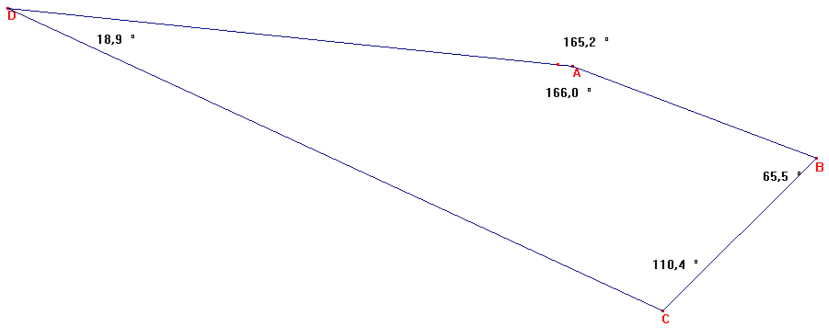


Figura 12 – Construção com medição incorreta do ângulo A

3°) o terceiro aluno cometeu o mesmo erro comentado no caso anterior. A figura a seguir mostra a construção feita por ele e a linha pontilhada que foi acrescentada por mim, no desenho, apenas para sinalizar qual o ângulo medido pelo aluno.

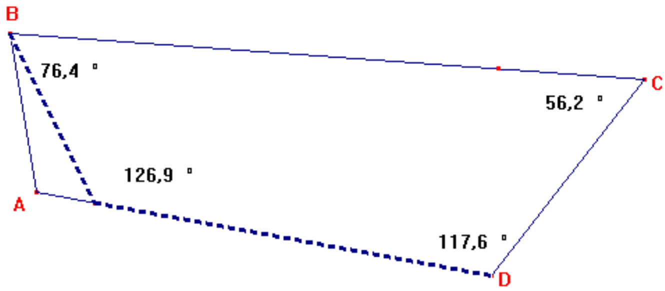


Figura 13 – Outra construção com medição incorreta do ângulo A

Observa-se também, nesta figura, a presença de outro ponto marcado sobre o lado BC, mas que não interferiu de forma negativa no resultado encontrado para medida do ângulo B.

Isso ocorreu porque, ao medir o ângulo supracitado, o estudante clicou sobre o vértice A, sobre o vértice B (origem do ângulo) e sobre o ponto marcado sobre BC, ou seja, o fato deste ponto “extra” ter sido marcado sobre um dos lados do ângulo faz com que sua posição, seja ela próxima à B ou próxima a C, não interfira na medida encontrada para o ângulo ABC.

Cabe ressaltar que, assim como este último aluno mencionado, outros 16 participantes adotaram o mesmo procedimento para medir um ou mais ângulos do quadrilátero, ou seja, em vez de clicarem sobre três vértices consecutivos, faziam o primeiro e o terceiro clique em qualquer posição sobre os lados do quadrilátero, garantindo apenas que a origem do ângulo fosse, de fato, um dos vértices do polígono.

Julgo ser esse um aspecto interessante a ser destacado por revelar uma estratégia utilizada pelos alunos que difere da sugerida por mim para resolução da questão.

O dinamismo oferecido pelo *Cabri* permite aos alunos validarem suas estratégias próprias, como neste caso, por exemplo, em que, ao movimentarem o ponto marcado sobre o lado do ângulo para qualquer posição, sobre este mesmo lado, podem verificar que a medida originalmente encontrada não varia.

A construção a seguir foi feita por um aluno e está sendo usada para ilustrar o comentário feito acima. Observa-se que a medida do ângulo ADC permanece a mesma, independente da posição do ponto sobre o lado DC.

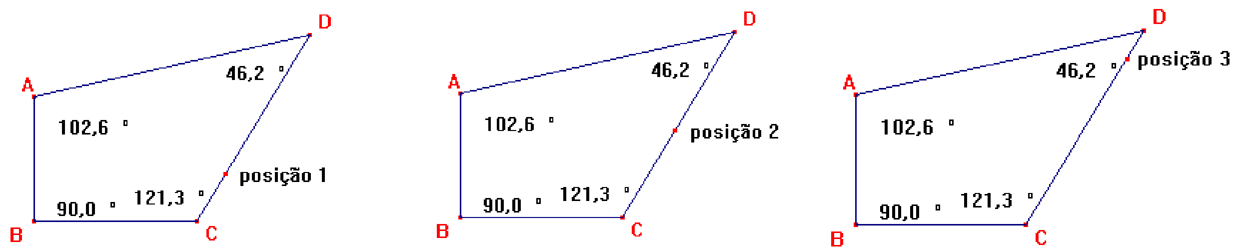


Figura 14 – Seqüência de construções que mostra a validação da estratégia

4º) Um dos alunos construiu um quadrilátero côncavo em vez de um convexo e, ao realizar o procedimento solicitado, encontrou como resposta as medidas de três ângulos internos e de um externo.

Ocorre que, no *Cabri*, quando um ângulo é definido por três pontos selecionados, a ferramenta **Ângulo** calcula e exibe as medidas de 0º a 180º. Como na construção desse aluno, o ângulo interno A era maior que 180º, ao selecionar os pontos D, A e B o programa exibiu a medida do ângulo externo, ou seja, 149,7º.

Para medidas maiores que 180º é necessário primeiro marcar o ângulo com a opção **Marca de Ângulo** e depois clicar sobre a marca para que a medida seja exibida.

A figura 15 mostra como seria o resultado obtido.

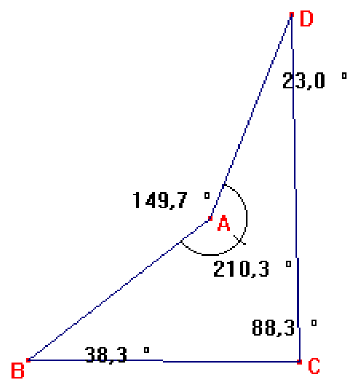


Figura 15 – Construção resultante de um procedimento correto

Para finalizar, citamos o caso de um aluno que, embora tenha realizado o procedimento correto, mediu apenas dois dos quatro ângulos internos do quadrilátero. Na figura 16, segue sua construção:

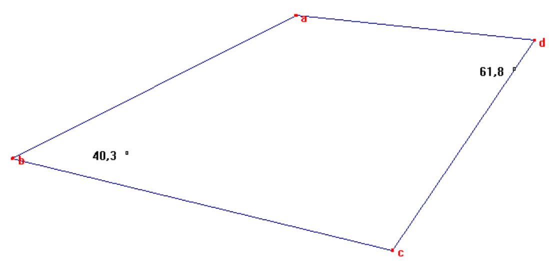


Figura 16 – Construção com medição de apenas dois ângulos internos

Questão 3

*Em seguida, soma as medidas dos quatro ângulos conforme tu fizeste no item **3** do exercício anterior. Que resultado tu encontraste?*

Dos 73 alunos que mediram corretamente os ângulos internos do quadrilátero na questão anterior, 65 responderam que encontraram 360º para a soma. Outro estudante também apresentou a mesma resposta para essa questão, porém ela não condiz com a construção feita por ele, já que construiu um quadrilátero côncavo em vez de um convexo, não podendo, portanto, encontrar 360° como resposta para a soma das medidas dos ângulos internos do polígono em questão. Acreditamos que ele possa ter copiado a conclusão de outro colega.

Os participantes que representaram os três primeiros casos citados na análise da questão dois, com o objetivo de revelar alguns procedimentos incorretos realizados no momento de medir os ângulos, encontraram medidas diferentes de 360º, conforme já se esperava.

Sete alunos não concluíram a atividade e o estudante que mediu apenas dois ângulos do quadrilátero escreveu 135,29° como sendo a resposta para a questão, o que sequer representa a soma dos dois ângulos medidos por ele. Dessa forma, não foi possível concluir o motivo pelo qual apresentou essa resposta.

Questão 4

Com base no exercício anterior, o que acontecerá com as medidas os ângulos internos do quadrilátero se movimentarmos um dos vértices?

Como os alunos já haviam movimentado um dos vértices do triângulo construído no exercício anterior, esperava-se que respondessem a essa questão com base no que já haviam observado ao realizarem tal procedimento.

As respostas dadas para essa questão também foram agrupadas por semelhança e distribuídas nas seguintes categorias, conforme o quadro 8:

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A - As medidas dos ângulos internos sofrerão alterações.	39
B - As medidas dos ângulos internos sofrerão alterações, mas sua soma continuará sendo 360º.	14
C – A soma dos ângulos internos continuará sendo 360º.	15
D – Resposta incorreta.	3
E – Não responderam à questão.	7

Quadro 8 – Distribuição das respostas da questão 4, segundo as categorias

Analisando as respostas dadas para essa questão, pode-se observar que, dos 74 alunos que na questão 4 do exercício anterior responderam que as medidas dos ângulos internos haviam sofrido alterações do tipo aumentar e/ou diminuir, 39 mantiveram a mesma resposta, agora para o caso dos quadriláteros.

Já 29 estudantes (categorias B e C) mostraram, com suas respostas, que fizeram uma analogia com os resultados obtidos nos exercícios sobre a soma dos ângulos internos do triângulo, ou seja, os alunos já sabiam que, ao movimentar um dos vértices do triângulo, as medidas dos ângulos internos sofrem modificações mas a sua soma permanece inalterada, resultando sempre 180º. independente da quantidade e tipo de movimentos. Sendo assim, ao serem questionados sobre o que aconteceria ao movimentarem um dos vértices do quadrilátero, eles parecem ter raciocinado de maneira análoga, concluindo que, além das medidas dos ângulos internos aumentarem e/ou diminuírem, a soma, neste caso, continuaria sendo 360º. Dos 29 estudantes, 15 não mencionaram, explicitamente, a questão das modificações ocorridas com os ângulos do polígono, ressaltando apenas que o valor da soma permaneceria inalterado.

Três alunos responderam à questão de forma incorreta. Um deles escreveu: “O valor dos lados diminuiu”. É provável que esse aluno tenha tido a intenção de se referir ao valor dos ângulos. Os outros dois estudantes que responderam incorretamente escreveram: “Aumenta sempre o número mas sempre dá 180°” e “A soma dará sempre 180°”. Essas seriam conclusões para o caso dos triângulos, mas não para o dos quadriláteros. No entanto, na questão anterior, eles responderam que a soma encontrada foi 360° e, ao verificar suas construções, pude comprovar que a soma das medidas dos ângulos internos dos quadriláteros realmente resultava

360°. Dessa forma, é possível que esses três alunos tenham apenas se confundido no momento de responder a esta questão.

Para finalizar, temos a última categoria formada pelos sete alunos que não responderam por não terem concluído em tempo a atividade.

Questão 5

Movimenta, então, um dos vértices do quadrilátero, limpa a calculadora e repete os procedimentos necessários para somar as medidas dos ângulos internos do quadrilátero. Que valor tu encontraste?

Os 65 estudantes que, na questão 3, escreveram que a soma dos ângulos internos do quadrilátero resultava 360º, apresentaram a mesma resposta para este exercício.

Os quatro alunos que procederam de maneira incorreta no momento de medir os ângulos internos do polígono encontraram as seguintes medidas: 333,34º, 299,41º, 360,61º e 362,11º.

O aluno que mediu apenas dois ângulos do quadrilátero indicou 102,13° como resposta para essa questão, que seria o valor da soma dos dois ângulos em questão.

Sete alunos não responderam por não terem concluído a atividade.

Questão 6

O que tu concluíste sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero?

As respostas dadas pelos estudantes foram agrupadas por semelhança e distribuídas nas seguintes categorias, indicadas no quadro 9:

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Demonstraram compreensão da propriedade.	54
B – Enunciaram a propriedade e complementam a resposta.	9
C - Demonstraram ter compreendido a propriedade, mas a resposta não foi formulada adequadamente.	5
D – Não responderam	7
E – Responderam incorretamente	2

Quadro 9 – Distribuição das respostas da questão 6, segundo as categorias

Na categoria A, foram agrupadas as respostas que expressam compreensão da propriedade, ou seja, são as respostas daqueles alunos que, de alguma forma, concluem que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°. São exemplos de algumas respostas para esta questão: “Que todas as somas dos ângulos de um quadrilátero vai dar 360°”, “O quadrilátero sempre tem de dar 360° na soma interna dos ângulos”, ou simplesmente, “Que sempre vai dar 360°”.

Dentre esses 54 alunos, estão três dos quatro participantes que realizaram procedimentos incorretos para medir os ângulos internos do quadrilátero e que, portanto, não puderam encontrar as respostas corretas para as questões propostas. Mesmo assim eles concluíram a atividade respondendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°. É provável que tenham respondido esta questão juntamente com outro colega.

O quarto participante é um dos representantes da categoria E, que respondeu incorretamente que “A soma aumenta”. O outro aluno cuja resposta faz parte dessa categoria é o que mediu apenas dois ângulos do quadrilátero e respondeu o seguinte: “Que dependendo do tamanho ele aumenta ou diminui”.

Da categoria B fazem parte as respostas daqueles alunos que, além de demonstrarem compreensão de que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, apresentam algum complemento às suas respostas. Nestes casos, podemos observar a interferência do software nas conclusões dos alunos, visto que destacam questões como forma e tamanho dos lados dos quadriláteros. Ou seja, o caráter dinâmico do *Cabri*, novamente enriqueceu a aprendizagem dos estudantes.

Ao movimentarem um dos vértices do polígono para outro local da tela, aumentando ou diminuindo as medidas dos lados e alterando a forma do quadrilátero originalmente construído, os alunos puderam validar suas conjeturas, confirmando que, apesar dessas modificações, a soma permanecia sendo 360°. Algumas respostas formuladas pelos alunos são: “Que independente da forma do quadrilátero convexo a soma de suas medidas será sempre 360°”, “Que não importa o tamanho dos lados, a soma dos ângulos internos é sempre 360°”, “Mesmo que tu movimentes os ângulos vai dar sempre 360° na soma interna”.

Destacamos ainda a resposta de um participante que, ao formular sua conclusão para o caso dos quadriláteros, estabeleceu uma comparação com o que aprendeu sobre a soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos: “Conclui que a soma dos ângulos de um quadrilátero é sempre 360°. Um quadrilátero é o dobro de um triângulo, logo se num triângulo a soma é sempre 180°, num quadrilátero a soma sempre será 360°".

Na categoria C foram agrupadas aquelas respostas que, de alguma forma, mostram terem os alunos compreendido a propriedade, mas não a formularam adequadamente. Pelos roteiros que esses alunos preencheram, pude observar que entenderam a propriedade, porém, no momento de formularam a conclusão da atividade, não fizeram uso correto das palavras. São exemplos de respostas: "Que a soma de todos os lados de um quadrilátero é sempre 360°" (trocou a palavra ângulos por **lados**), "Que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 360°" (trocou a palavra quadrilátero por **triângulo**) e "Não importa a soma dos ângulos, pois a soma da medida dos lados de um quadrilátero será sempre 360° e a de um triângulo 180°" (também trocou a palavra ângulos por **lados**).

E para finalizar, temos sete alunos que não responderam a questão porque não concluíram a atividade, incluídos na categoria D.

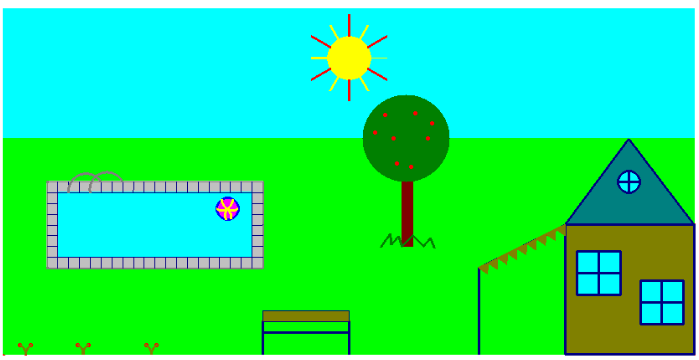
5.4 Redescobrindo o *Cabri Géomètre* II - Parte I

As questões analisadas a seguir consistem na primeira atividade, realizada em um período, com 65 alunos de 8ª série, no ano de 2007, para a coleta de dados.

Em 2006, quando cursaram a 7ª série, os estudantes já haviam tido contato com o software e, portanto, essa primeira atividade proposta para eles teve como objetivo relembrar algumas das funções do software *Cabri Géomètre II*, explorando suas ferramentas.

A primeira solicitação feita na atividade foi a seguinte:

Abre um arquivo em branco no Cabri e, com base na figura abaixo, tenta desenhar uma cena semelhante. Anota, no quadro que está no verso da folha, todas as ferramentas (botões) que utilizaste para fazer as construções.



Além da solicitação do enunciado, ainda foi pedido que especificassem quais objetos foram construídos com cada uma das ferramentas utilizadas.

Segue abaixo o quadro 10, em que estão especificados os objetos construídos pelos alunos, quais ferramentas eles utilizaram e com que freqüência esta utilização foi feita.

OBJETO	FERRAMENTA	FREQÜÊNCIA
Sol	Circunferência	46
	Segmento	32
	Vetor	2
	Polígono	1
	Ponto	1
Árvore	Circunferência	38
	Segmento	19
	Polígono	16
	Ponto	9
	Polígono regular	1
	Vetor	1
Piscina	Polígono	20
	Segmento	19
	Arco	7
Casa	Segmento	29
	Triângulo	28
	Polígono	26
	Circunferência	15
	Polígono regular	2
	Ponto	1
	Vetor	1
Céu	Reta	6
	Polígono	4
	Segmento	2
	Semi-reta	2
Bola	Circunferência	11
	Segmento	5
Banco	Segmento	12
	Polígono	3
Chão	Reta	9
	Segmento	6
	Polígono	4

Quadro 10 – Objetos construídos pelos alunos

OBJETO	FERRAMENTA	FREQÜÊNCIA
Fundo	Polígono	2
	Polígono regular	1
	Semi-reta	1
Grama	Segmento	4
	Polígono	1
	Triângulo	1
Flores	Circunferência	3
	Segmento	3
Nuvens	Circunferência	2
	Arco	1
Aparência	Espessura	5
Pintar	Preencher	17
	Cor	9

Quadro 10 – Objetos construídos pelos alunos (Continuação)

Todos os objetos existentes no desenho foram construídos por, pelo menos, um estudante, de modo que foi possível observar que eles se lembravam de algumas ferramentas do software e que, mesmo quando não recordavam da localização ou da utilização de algumas delas, não se intimidavam em explorar os recursos do programa.

Além das construções sugeridas, dois alunos acrescentaram nuvens aos seus desenhos explorando, portanto, a capacidade de determinar estratégias próprias de utilização dos objetos geométricos para a reprodução de suas representações mentais.

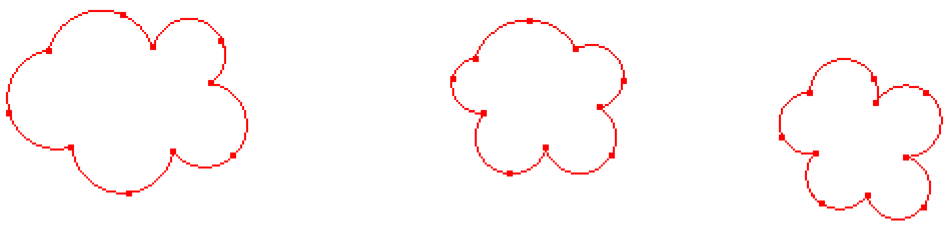


Figura 17 – Nuvens construídas pelos alunos

A piscina, a bola e as flores apresentavam um grau de dificuldade um pouco maior por terem arcos em suas construções. Muitos alunos, ao iniciarem a reprodução desses objetos, desistiam em função dessa dificuldade. Alguns estudantes conseguiram, depois de algumas tentativas, descobrir que, para traçar arcos com o *Cabri*, é necessário a determinação de três pontos e não apenas de dois (inicial e final).

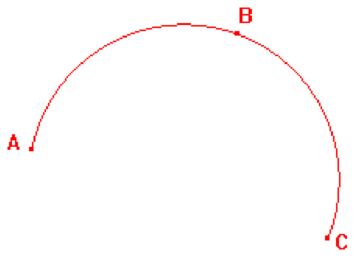
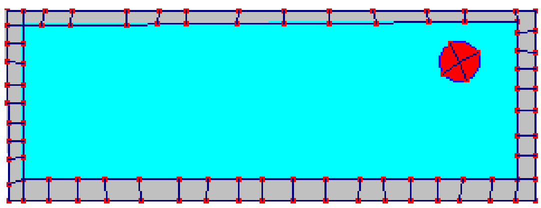
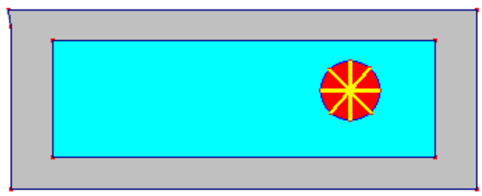


Figura 18 - Arco construído com o software

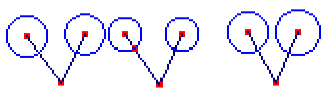
Outros alunos, por não conseguirem desenhar os arcos da bola e das flores, traçaram segmentos, conforme figura 19, a seguir.



Piscina e bola



Piscina e bola



Flores

Figura 19 – Construções feitas pelos alunos

Alguns estudantes construíram o céu e o chão separados, enquanto outros fizeram uma única construção que denominaram de **fundo**, conforme apresentado no quadro 10.

Construídos alguns objetos, os alunos começaram a tentar descobrir como poderiam pintar o desenho de acordo com as cores sugeridas. Foi então que começaram os “problemas”. Não demorou muito para que descobrissem a diferença entre os recursos *Cor* e *Preencher*, percebendo que o primeiro é utilizado para pintar apenas o contorno das construções, enquanto o segundo permite o preenchimento de algumas regiões.

Os “problemas” começaram quando ao tentarem preencher com as cores algumas regiões da casa, da piscina e da árvore, por exemplo, eles não tiveram êxito, enquanto que o sol era colorido facilmente. Intrigados com a situação passaram a me questionar o porquê de tal fato estar ocorrendo.

Enquanto isso, outros participantes mostravam orgulhosos aos colegas suas casas, árvores e piscinas preenchidas com as cores dizendo: “Ah! Eu consegui pintar!”. Nesses momentos eu me restringia a observar as discussões entre eles em torno das hipóteses que justificavam porque alguns colegas conseguiam pintar o interior das regiões e outros não.

A primeira pergunta feita aos alunos era relativa ao botão que haviam utilizado para colorir a parte interna das figuras. E, ao descobrirem que tinham selecionado a mesma opção, mas sem o mesmo sucesso que os colegas, ficavam ainda mais intrigados. Nesse instante eu intervinha na conversa e questionava-os sobre como haviam feito as construções e, ao responderem uns para os outros, percebiam que utilizavam recursos diferentes para fazer os mesmo objetos. Nesse momento surgia uma hipótese para explicar o fato em questão.

Rapidamente os estudantes validavam a hipótese conjeturada, ou seja, descobriam que regiões construídas a partir de segmentos, retas ou semi-retas não podiam ser preenchidas. Somente os objetos construídos com as opções *Polígono* ou *Polígono Regular* permitiam essa possibilidade.

Dessa forma, muitos objetos não foram pintados porque os alunos teriam que construí-los novamente, mas o mais importante é que compreenderam como as regiões devem ser construídas quando desejam colori-las.

Feita essa descoberta, os alunos que haviam limitado o céu e o chão com segmentos ou retas, traçaram polígonos sobre esses objetos, para que pudessem então pintar o fundo do desenho. Porém, como o polígono havia sido o último elemento construído, ao ser pintado, todos os demais objetos ficavam cobertos pela cor. Nesse momento os estudantes perceberam que o fundo (chão e céu) deveria ser construído primeiro.

Não solicitei a eles que recomeçassem o trabalho, mas pedi-lhes que escrevessem no roteiro o motivo pelo qual não haviam conseguido pintar. Mesmo sabendo que não precisavam refazer o desenho para poder pintá-lo, alguns alunos insistiram em recomeçar o trabalho e como, ao final da aula, não haviam refeito muitos objetos, eles escreveram justificativas no roteiro para não terem concluído a atividade. Segue um exemplo: “Tive que refazer, pois o programa não pinta segmentos. Troquei os segmentos por polígonos.”

Seis alunos nomearam as ferramentas utilizadas para reproduzir o desenho, mas não especificaram em quais construções as usaram, enquanto um aluno escreveu quais objetos reproduziu, mas não informou quais ferramentas utilizou.

Quatro estudantes não responderam a questão.

Seguem, a seguir, alguns exemplos de desenhos reproduzidos pelos alunos:

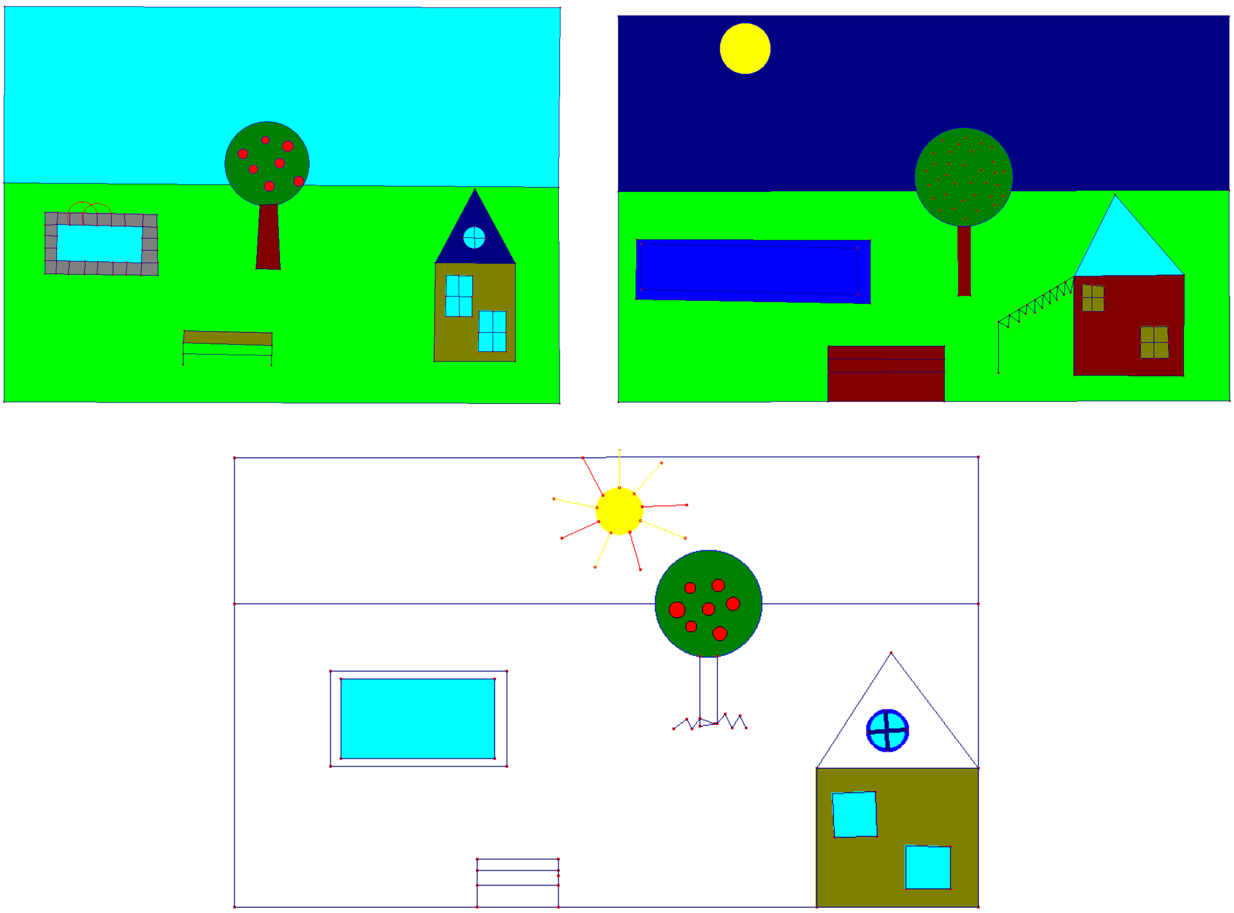


Figura 20 – Desenhos reproduzidos pelos alunos

A segunda solicitação feita na atividade foi a seguinte:

Após reproduzires o desenho, movimenta as construções e observa se as figuras e objetos geométricos que tu utilizaste mantêm suas características ou se os mesmos sofrem deformações.

Caso ocorram alterações no desenho, pensa sobre o motivo pelo qual isso possa ter acontecido e, em seguida, registra abaixo as tuas observações e conclusões.

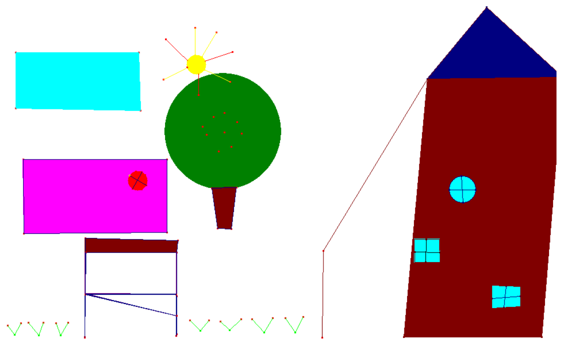


Figura 21 – Exemplo de ação do movimento sobre uma construção

As respostas dadas pelos alunos foram agrupadas por semelhança e distribuídas nas seguintes categorias, conforme o quadro 11:

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Responderam que sofrem deformações porque os objetos geométricos estão interligados na construção.[2]	27
B – Responderam que sofrem deformações, pois mudam a forma original.	7
C – Responderam que sofrem deformações mas as justificativas não são adequadas.	12
D – Responderam que deformam, mas não apresentaram justificativa para o fato.	11
E – Responderam que sofrem deformações porque não houve precisão nas construções.	1
F- Não responderam	7

Quadro 11 - Distribuição das respostas referentes à segunda parte da atividade, segundo as categorias

As respostas agrupadas na categoria A expressam que, ao movimentar as construções, o desenho sofre deformações, porque todos os objetos geométricos estão interligados, ou seja, são dependentes uns dos outros. Sendo assim, ao movimentar, por exemplo, um ponto qualquer, o segmento tal que um dos extremos é esse ponto, também sofrerá ação do movimento.

Algumas das respostas apresentadas pelos alunos seguem como exemplo: “Porque as linhas estão interligadas, assim, se nós mexemos em uma das linhas a

[2] Neste trabalho, a palavra “deformação” está sendo usada com o significado de modificar a forma da figura, não preservando as características ou propriedades geométricas que a definem.

figura toda sofre alterações", "Ao puxar um ponto ela se deforma porque estou movimentando ele, os segmentos também se movem para acompanhar a figura", "Isso pode ter acontecido porque as construções foram feitas com base em pontos. Ao mudar os pontos, mudamos a figura" e "Porque eu movimentei o ponto, e isso mexeu as arestas das coisas que eu desenhei".

Da categoria B fazem parte as respostas daqueles alunos que dizem que as figuras e objetos sofrem deformações ao serem movimentados porque seus formatos mudam. Na verdade, são respostas redundantes, visto que, se as construções sofrem deformações, é de se supor que seus formatos tenham sido alterados. São alguns exemplos de resposta para esse caso: "Sim, deforma, as coisas que eu construí mudaram de forma, de lugar", "Se deforma, pois muda a forma do objeto" e "Sim, elas ficam deformadas, eu acho que é porque eu estou mexendo nelas, mudando o formato original".

Na categoria C, os alunos responderam que as construções sofreram deformações, mas não apresentaram justificativas adequadas, ou seja, no contexto da questão, elas não faziam sentido. Seguem alguns exemplos de resposta: "Pois a simetria se desfaz quando arrumamos uma linha", "Deformou, pois é uma figura plana" e "As construções deformam, embora os botões mudem de posições".

Na categoria D foram agrupadas as respostas que, de alguma forma, afirmam que os objetos geométricos não mantêm suas características iniciais sob ação do movimento, porém não apresentam nenhuma justificativa para ocorrência do fato. São respostas como os exemplos que seguem: "Deforma, mas não sei por quê", "Quando eu mexi a reta, deformou o desenho" e "Não sei por que está acontecendo".

Apenas um aluno, cuja resposta faz parte da categoria E, apresentou uma justificativa mais próxima da correta para o fato de as construções feitas por eles sofrerem deformações ao serem movimentadas: "Deformou porque foi mal construído, pois os lados não estão retos e com medidas iguais".

Esta parece ter sido a resposta mais próxima da correta porque de alguma forma esse aluno percebeu que o fato de os desenhos terem sido feitos "a mão livre", sem a preocupação, por exemplo, com a precisão das medidas, do paralelismo e perpendicularismo das retas, ou seja, sem garantia da presença das propriedades que definiam os objetos geométricos utilizados no desenho, fez com que as construções se deformassem sob ação do movimento.

O fato de haver apenas uma resposta na categoria E não é surpreendente, visto que já se imaginava ser difícil para os alunos chegarem à conclusão de que, se usassem livremente as ferramentas do programa, sem se preocuparem com as propriedades geométricas dos objetos que estavam construindo, fatalmente as características iniciais dos desenhos não seriam mantidas após o movimento.

Para finalizar, temos a categoria F da qual fazem parte aqueles alunos que não apresentaram nenhuma resposta para a questão ou que apresentaram afirmativas que não respondem a pergunta feita. São exemplos para esse caso: “A figura se movimenta, pois aparece uma mão que puxa as figuras”, “Porque o desenho se alarga conforme as linhas” e “Puxando o objeto, cada vez mais ele vai aumentando”.

5.5 Redescobrindo o *Cabri Géomètre* II - Parte II

As questões analisadas a seguir representam a segunda parte da atividade apresentada no item 5.4. Desta feita, trabalharam 63 alunos, em dois períodos.

O objetivo desta tarefa foi construir um quadrado utilizando as ferramentas do *Cabri Géomètre II* de forma que a figura geométrica mantivesse suas características sob ação do movimento.

A introdução do trabalho foi feita por meio do seguinte texto:

Na parte I desta atividade tu reproduziste, livremente, uma figura e, após a conclusão, foste solicitado a movimentar os objetos construídos.

O que aconteceu? Os desenhos sofreram deformações, correto? E sabes por quê?

Possivelmente, porque tu não te preocupaste com as características que definem as figuras geométricas que utilizaste, reproduzindo a obra escolhida à “mão livre”.

Ao fazermos construções no Cabri, é imprescindível que consideremos tais características para garantirmos não só a precisão de nosso trabalho, mas também para que as formas não sofram alterações sob ações como, por exemplo, ampliação, redução ou rotação.

A seguir, verás um exemplo de como construir um quadrado que, mesmo após sucessivos movimentos, mantém as características que o definem.

Primeiramente, descreve nas linhas abaixo, o que é um quadrado.

As respostas dos estudantes a respeito do que seja um quadrado foram agrupadas por semelhança e organizadas nas seguintes categorias:

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A - Possui todos os lados iguais e todos os ângulos medem 90°.	10
B - Possui os quatro lados iguais e todos os ângulos medem 90°.	15
C - Possui os quatro lados iguais.	13
D – Possui quatro ângulos iguais.	2
E - Possui todos os lados e/ou ângulos iguais.	9
F – Resposta com elementos corretos e incorreções de linguagem.	12
G – Não respondeu.	1

Quadro 12 - Distribuição das respostas referentes ao conceito de quadrado

Nas categorias acima, foram destacados aspectos relativos aos lados e aos ângulos do quadrado, não sendo mencionadas as formas como os alunos se referiam ao quadrado. As expressões mais utilizadas por eles são mencionadas a seguir: Quadrilátero, polígono, polígono regular, figura, figura geométrica, desenho e objeto.

Na categoria A foram agrupadas as respostas dos estudantes que definiram quadrado como sendo um quadrilátero, objeto, figura, etc., que possui todos os lados iguais e todos os ângulos medem 90°. Esses alunos não quantificaram o número de lados e de ângulos.

Sabemos que, na verdade, o correto não seria dizer que o quadrado possui todos os lados iguais, mas sim que possui todos os lados de medidas iguais ou, simplesmente, todos os lados congruentes. No entanto, não considerei como incorreta a expressão "lados iguais", utilizada pelos alunos na formulação de suas respostas.

São alguns exemplos dessa categoria as seguintes frases: "É um objeto onde todos os seus lados são iguais e todos os ângulos são de 90°" e "É polígono regular, com lados iguais e ângulos de 90".

As respostas pertencentes à categoria B são bastante semelhantes às da categoria A, porém agora os participantes especificaram o número de lados do quadrado e, em alguns casos, também especificaram o número de ângulos. Seguem alguns exemplos de resposta: “É uma figura geométrica que possui 4 lados iguais e os ângulos são de 90” e “Um quadrado é um polígono com 4 ângulos de 90° e com 4 lados iguais”.

Das categorias C e D fazem parte os alunos que se referiram exclusivamente aos quatro lados iguais ou apenas aos quatro ângulos iguais. Seguem dois exemplos para essas categorias, o primeiro pertencente à C e o segundo à D: “Figura com os quatro lados iguais, de mesma medida” e “Um quadrado é um polígono regular que possui 4 ângulos de 90 e ao todo tem 360”. Este último aluno complementou sua resposta acrescentando um comentário sobre a soma dos ângulos internos do quadrilátero em questão.

Na categoria E foram agrupadas respostas muito semelhantes às pertencentes às categorias C e D. São alunos que expressaram que o quadrado possui todos os lados e/ou ângulos iguais, porém sem quantificá-los.

Já na categoria F estão as formulações que apresentam alguns aspectos corretos, mas que mostram incorreções de linguagem. Destaco, a seguir, exemplos dessas respostas seguidos de alguns comentários: “É um polígono regular, com 4 arestas, 4 vértices e pares de linhas paralelas”. De fato, o quadrado é um polígono regular, formado por pares de linhas paralelas e que possui quatro vértices. No entanto, por se tratar de uma figura geométrica plana e não espacial, o aluno deveria utilizar a palavra **lados** em vez de **arestas**.

Outro exemplo é: “O quadrado é uma figura geométrica com quatro lados iguais, a soma dos seus lados resulta em 360°”. Não foi possível saber se houve apenas um lapso de memória ou se, efetivamente, há erro de conceituação.

Outra resposta, ainda dessa categoria, segue: “Uma coisa com 4 ângulos iguais de noventa centímetros”. Neste caso, além do uso da palavra “coisa” para se referir ao ente geométrico, o estudante utilizou uma unidade de comprimento para se referir a uma medida que deveria ser expressa em **graus**.

Ainda sobre as unidades de medida, destaco o fato de que alguns estudantes, ao escreverem que a medida de cada ângulo do quadrado é 90°, acrescentaram o símbolo “C” junto aos 90, como se os graus em questão fossem Celsius. É possível que, na época da realização desta atividade, as turmas estivessem estudando os estados físicos da água na disciplina de Ciências e isso explicaria o fato de confundirem o grau como unidade de medida de ângulo com o grau como unidade de medida de temperatura. Destaco a resposta de um aluno como exemplo para esta situação: “É uma figura geométrica de quatro lados iguais, com ângulo de 90°C”.

A seguir, são apresentados os 15 itens que compõem a atividade, bem como as respostas e suas análises.

1. Abre um arquivo em branco no Cabri.

2. Escolhe a medida do lado do quadrado que irás construir (preferencialmente, entre 1 cm e 10 cm). Escreve, na linha ao lado, esse valor:

No quadro 13 estão as medidas dos lados dos quadrados, além da freqüência com que foram escolhidas pelos estudantes.

MEDIDA DO LADO DO QUADRADO	**FREQÜÊNCIA**
2 cm	1
4 cm	3
5 cm	25
6 cm	17
7 cm	2
8 cm	6
9 cm	1
10 cm	8

Quadro 13 – Distribuição das medidas dos lados dos quadrados a serem construídos

*3. Seleciona no 10º botão a opção **edição numérica** e clica em qualquer lugar da tela. Abrirá uma janela onde deves digitar o valor escolhido para o lado do quadrado.*

Nesta questão, a única dúvida que alguns alunos tiveram foi se deveriam digitar **cm** junto ao valor escolhido para a medida do lado do quadrado. Ao me questionarem sobre isso, eu solicitava que eles tentassem escrever a unidade no interior da janela. Logo eles mesmos percebiam que a finalidade da opção ***edição numérica***, como o próprio nome sugere, é editar números, não permitindo, dessa forma, a inserção de letras na janela de edição.

*4. Seleciona a opção **ponto** no segundo botão e clica em qualquer lugar da tela. Para nomeá-lo, seleciona a opção **rótulo** no 10º botão e, em seguida, clica sobre ele de forma que apareça a informação “Este ponto”. Abrirá uma janela na qual tu vais digitar a letra **A**.*

Muitos alunos não necessitaram utilizar a opção ***rótulo***, pois lembravam que podiam nomear o ponto em seguida de sua construção, bastando apenas digitar a letra escolhida.

*5. O que faremos agora é transferir a medida que tu escolheste para o lado do quadrado, a partir do ponto **A**.*

*Para isso, clica na opção **transferência de medidas***  *que se encontra no 5º botão. Clica sobre a medida escolhida e sobre o ponto **A**.*

Deverá aparecer um segmento pontilhado cuja medida é exatamente a do lado do quadrado. Movimenta o mouse, mas não clica sobre a tela.

Imagina que na extremidade livre desse segmento exista um lápis. Ao realizar o movimento, que figura ficaria traçada na tela?

O que o segmento pontilhado representaria nessa figura?

As respostas dadas para o primeiro questionamento feito nesta questão estão distribuídas no quadro 14:

FIGURA	FREQÜÊNCIA
Círculo.	42
Circunferência.	15
Arco.	2
Redondo.	1
Reta.	1
Não responderam.	2

Quadro 14 – Distribuição das respostas dadas pelos alunos para o primeiro questionamento do item 5

Dos 63 alunos que realizaram esta atividade, 15 apresentaram uma resposta matematicamente correta, ou seja, expressaram que uma **circunferência** ficaria traçada na tela, após a movimentação do mouse.

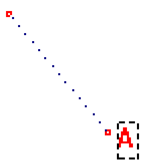


Figura 22 – Segmento pontilhado que aparece na tela durante a transferência de medida

A seqüência de figuras abaixo ilustra uma possível representação para o que os alunos poderiam ver quando movimentassem o mouse, supondo que na extremidade livre do segmento pontilhado existisse um lápis.

Figura 23 – Seqüência imaginária

Outros 42 estudantes responderam que a figura traçada na tela seria um **círculo** que também é uma resposta plausível, se levarmos em consideração o fato de que muitos alunos confundem o significado de círculo e circunferência e muitas vezes acreditam até mesmo que ambas as palavras representem o mesmo ente geométrico.

Dois participantes responderam que a figura seria um **arco**, provavelmente porque não fizeram a rotação de 360° do segmento pontilhado. Neste caso, a representação mental feita por eles pode ter sido, por exemplo, uma das três primeiras figuras da seqüência de desenhos acima, o que configuraria como correta a resposta apresentada.

O único aluno que respondeu **redondo** parece também ter conseguido representar mentalmente a seqüencia de figuras acima, quando movimentou o mouse. No entanto, ele não conseguiu encontrar um termo matemático que expressasse corretamente seu pensamento utilizando, dessa forma, a palavra "redondo".

Um estudante escreveu que uma reta ficaria traçada na tela, o que, neste caso, é uma resposta incorreta. É possível que ele tenha pensado no traçado do segmento pontilhado quando formulou esta resposta, mas ainda assim estaria inadequada, por confundir um segmento com uma reta.

Dois alunos não apresentaram resposta para esta questão.

No quadro abaixo encontram-se as respostas formuladas pelos estudantes para o último questionamento feito nesta questão: *O que o segmento pontilhado representaria nessa figura?*

REPRESENTAÇÃO DO SEGMENTO PONTILHADO	FREQÜÊNCIA
Raio.	30
Lado do quadrado.	7
Reta ou segmento.	3
A medida escolhida.	6
Resposta incorreta.	10
Não responderam.	5

Quadro 15 – Distribuição das respostas dadas pelos alunos para o segundo questionamento do item 5

Podemos observar que praticamente metade dos participantes desta atividade respondeu corretamente a esta questão, ou seja, escreveu que o segmento pontilhado representaria o raio da figura.

Sete alunos responderam que o segmento seria um dos lados do quadrado, o que de fato está correto. No entanto, se considerarmos o contexto da pergunta, esta resposta se torna inadequada, visto que o lado do quadrado não é um elemento do círculo, especialmente porque nenhum aluno respondeu “quadrado” para a primeira questão desse item.

Três estudantes responderam “reta” ou “segmento”, demonstrando que se detiveram apenas no desenho propriamente dito, ou seja, não estabeleceram nenhuma relação do segmento pontilhado com a figura que ficaria traçada na tela.

Seis alunos apresentaram uma afirmação correta em suas respostas, mas que não expressa a relação que se esperava que eles estabelecessem. Estes estudantes afirmaram que o segmento pontilhado era a representação da medida que eles haviam escolhido no item 2 da atividade. A afirmação não está incorreta, mas também não expressa o que o segmento pontilhado representaria na figura, ou seja, qual elemento da construção ele seria.

Dez dos participantes formularam incorretamente suas respostas. Seguem alguns exemplos: “O ângulo”, “O lápis” e “Um eixo”.

Cinco alunos não responderam a questão.

*6. Agora, clica em qualquer lugar da tela para fixar o ponto que está na extremidade livre do segmento e chama-o de **B**.*

Pronto! Está determinado o lado AB do quadrado.

Agora, reflete e escreve, nas linhas abaixo, a razão pela qual, após realizar a transferência de medida a partir do ponto A, tu podes garantir que o lado AB tem *exatamente a medida que tu escolheste, independente do local escolhido para fixar o ponto B.*

As respostas formuladas para este item foram agrupadas por semelhança e distribuídas nas categorias apresentadas na tabela abaixo:

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A - O lado AB representa o raio do círculo.	20
B - A transferência de medida garante que a medida seja sempre a mesma.	12
C - AB é um dos lados do quadrado e o quadrado tem 4 lados iguais.	2
D – AB seria a abertura de um compasso.	2
E - Resposta incorreta.	10
F – Não responderam	17

Quadro 16 – Distribuição das respostas dadas pelos alunos para o questionamento feito no item 6

Da categoria A fazem parte as respostas que expressaram que era possível garantir que o lado AB tivesse exatamente a medida escolhida, independente do local escolhido para fixar o ponto B, porque o lado AB representava o raio do círculo.

Analisando as respostas desses alunos, foi possível observar que eles demonstram uma compreensão bastante clara do que seja o raio de um círculo. Em suas formulações está implícita a idéia de a distância do centro do círculo a qualquer ponto da circunferência seja sempre a mesma e que esta distância representa o raio. Seguem alguns exemplos de respostas para esta categoria: “Porque essa medida é o raio independente de onde estiver será sempre a mesma medida”, “Porque é como o raio de um círculo, não importa até que ponto ele vá, ele sempre vai ter o mesmo tamanho” e “Porque o B era o extremo do raio e o raio tem 6 cm”.

As respostas agrupadas na categoria B são redundantes. Na verdade, são frases que não respondem ao questionamento feito, visto que o fato de a transferência de medida garantir que a distância do ponto A ao ponto B fosse a medida escolhida por eles no item 2, já era conhecido. A questão a ser justificada era razão pela qual se podia garantir que a distância entre os dois pontos seria sempre a mesma, independente do local escolhido para fixar o ponto B.

Dessa forma, exemplos como os que são apresentados a seguir apenas reproduziram afirmações já conhecidas. São eles: “Com a transferência de medidas eu cliquei na medida em que eu escolhi e no ponto A, assim a partir do ponto A tinha exatamente 10 cm", "Porque a distância entre os pontos é determinada pelo valor que escrevi anteriormente" e "Porque eu determinei a sua medida então independente do lugar, as retas têm que ter a mesma medida".

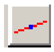
As respostas que fazem parte da categoria C são as seguintes: "Porque eu tinha a intenção de criar um quadrado com 4 lados iguais" e "Porque o quadrado tem os quatro lados iguais, independente de sua posição". Os argumentos desses alunos foram baseados na afirmação, existente no enunciado deste item, de que o segmento AB representava o lado do quadrado a ser construído. Ou seja, eles consideraram o fato de AB ser lado de um quadrado e de um quadrado ter sempre os lados de mesma medida como uma explicação para o segmento pontilhado ter sempre o mesmo valor, independente do local escolhido para o ponto B. Eles utilizaram duas informações corretas, mas que não respondem adequadamente ao questionamento feito.

Esses estudantes não perceberam que, mesmo que AB não fosse lado de um quadrado (fosse, por exemplo, lado de um retângulo), ainda assim seria possível garantir que o segmento pontilhado determinado pelos pontos A e B teria sempre a mesma medida. Dessa forma, AB teria sempre o mesmo valor não por ser lado de um quadrilátero cujos lados são congruentes, mas por ser o raio do círculo.

Já as respostas pertencentes à categoria D são as seguintes: "Ele fica com a mesma distância mesmo estando em movimento, ou seja, ele funciona como um compasso" e "Quando ele se movimenta, ele sempre estava com a mesma distância, por isso funcionaria como um compasso". Estas são respostas em que se subentende a idéia de que AB seria a abertura de um compasso. O ponto A seria a ponta seca e o ponto B seria o grafite. Dessa forma, em qualquer lugar que B fosse fixado, estaria garantido que AB tivesse a mesma medida, visto ele ser o raio do círculo a ser desenhado.

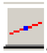
Na categoria E estão reunidas 10 respostas que foram consideradas incorretas por não apresentarem argumentos que pudessem responder a pergunta em questão. Seguem alguns exemplos: "Pois eu segui as instruções", "Porque quando eu movimentava não mudava de medida" e "Porque os pontos estão retos".

Para finalizar, temos 17 alunos na categoria F que não apresentaram nenhuma resposta.

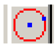
*7. Seleciona, no 3º botão, a opção **reta**  e, em seguida, clica sobre os pontos **A** e **B**. Digita **r** para nomeá-la.*

Obs.: Caso tenhas esquecido, tu podes nomear um objeto logo após sua construção, simplesmente digitando o nome escolhido.

Ao total, 52 alunos nomearam a reta r após sua construção.

*8. Constrói uma reta perpendicular à reta **r** passando pelo ponto **A**. No 5º botão, escolhe a opção **reta perpendicular** , clica sobre a reta **r** e sobre o ponto **A**. Em seguida, digita **s** para nomeá-la.*

Também 52 alunos nomearam a reta s após a sua construção.

*9. Agora, tu vais criar uma circunferência com centro em **A** e que passa pelo ponto **B**. Para isso, seleciona a opção **circunferência**  no 4º botão, clica sobre o ponto **A** e sobre o ponto **B**.*

*10. Na intersecção da circunferência com a reta **s** tu deves marcar um ponto. Logo, escolhe a opção **ponto** e clica nessa intersecção. Esse será o ponto **D**.*

*11. Seleciona a opção **reta perpendicular** e constrói a reta **t** perpendicular à reta **s** passando pelo ponto **D**. Em seguida, constrói uma reta **u** perpendicular à reta **t** passando pelo ponto **B**.*

Quarenta e seis alunos nomearam a reta t e 44 nomearam a reta u.

*12. Na intersecção das retas **u** e **t**, marca o ponto de intersecção **C**.*

Observa que o quadrado ABCD já está determinado na tela.

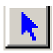
13. Agora tu vais esconder os seguintes objetos construídos:

** retas **r**, **s**, **t** e **u**;*

** a circunferência.*

*Para fazer isso, basta selecionar a opção **esconder/mostrar** no último botão e clicar sobre os objetos que a serem escondidos.*

*14. Para finalizar a construção do quadrado, seleciona no 3º botão a opção **polígono**  e clica sobre os pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **A** nessa ordem.*

*15. Agora, seleciona a opção **ponteiro**  no 1º botão, clica sobre o ponto **A** e arrasta o mouse para dar movimento à construção. Em seguida, clica também sobre o ponto **B** e movimenta a figura.*

Responde:

*Qual o tipo de movimento sofrido pelo quadrado quando tu arrastaste o ponto **B**?*

E então? A construção sofreu deformações? Perdeu suas características? Por quê?

As respostas dadas para o primeiro questionamento deste item foram agrupadas por semelhança e dispostas nas seguintes categorias:

CATEGORIA	**FREQÜÊNCIA**
A - Rotação.	4
B - Rotação em torno do ponto A.	2
C - Dá voltas, gira, faz um movimento circular	30
D - Gira, movimento circular em torno do ponto A.	6
E - Não especificaram o tipo de movimento.	8
F - Nenhum movimento.	2
G - O movimento provocou mudanças na construção.	3
H - Não responderam.	8

Quadro 17 – Distribuição das respostas dadas pelos alunos para o primeiro questionamento feito no item 15

Se os alunos tivessem realizado a construção corretamente, de acordo com as orientações constantes no roteiro da atividade, o vértice B, ao ser movimentado, deveria fazer um movimento de rotação de 360° em torno do vértice A.

Além disso, as propriedades geométricas conferidas ao quadrado deveriam ser mantidas mesmo sob ação do movimento, ou seja, os ângulos permaneceriam medindo 90° e os quatro lados continuariam sendo congruentes.

A seqüência de figuras, a seguir, ilustra o movimento sofrido pelo quadrado ao se movimentar o vértice B.

A opção **Rastro On/Off** foi acionada para que a trajetória percorrida pelo ponto B, ao ser movimentado, ficasse registrada na tela.

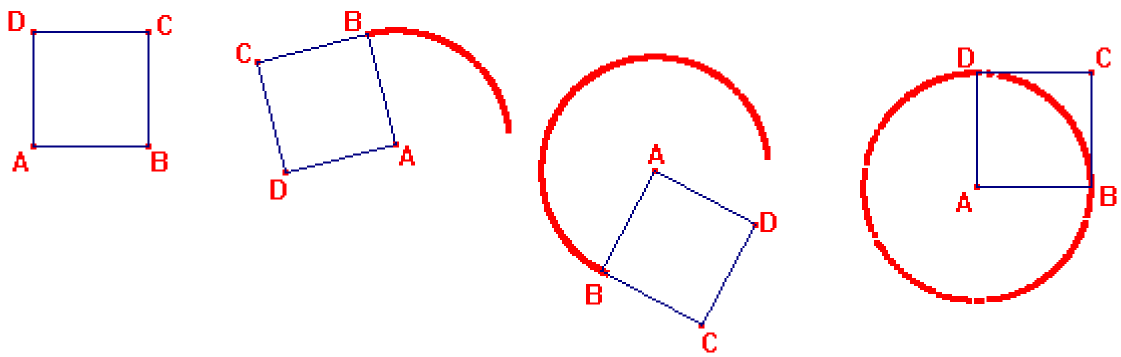


Figura 24 – Ilustração da trajetória

Na apresentação das categorias, da primeira delas fazem parte as respostas de quatro alunos que escreveram “rotação” para explicar o tipo de movimento sofrido pelo quadrado ao arrastarem o ponto B. Estes estudantes não especificaram o ponto em torno do qual ocorreu a rotação.

Já os alunos cujas respostas foram agrupadas na categoria B, além de escreverem que o movimento foi de rotação, explicitaram o ponto A.

Nas respostas da categoria C está implícita a idéia de que o movimento sofrido pelo quadrado ABCD foi de rotação. No entanto, os 30 alunos expressaram esta idéia por meio de outras palavras ou expressões, tais como: “Ele apenas girou, mas continuou o mesmo tamanho”, “Ele dá voltas como se criasse uma circunferência”, “Um movimento circular” e “Ele fez uma volta”. Assim como na categoria A, estes estudantes não citaram o ponto em torno do qual ocorreu o movimento.

Já as respostas da categoria D são bastante semelhantes às da categoria C, porém os alunos fizeram referência ao ponto A.

Os oito participantes cujas respostas foram reunidas na categoria E não especificaram o tipo de movimento sofrido pelo quadrado ABCD, porém, diferentemente dos demais colegas, eles destacaram o fato de o quadrilátero não sofrer deformações durante o movimento.

Para estes alunos, ficou muito presente que o objetivo desta tarefa era construir um quadrado de forma que a figura geométrica mantivesse suas características sob ação do movimento. Ou seja, o resultado a ser alcançado era diferente do obtido na parte I desta atividade (Redescobrindo o *Cabri Géomètre II*) quando as propriedades geométricas das construções feitas “a mão livre” não foram mantidas.

Alguns exemplos de respostas que fazem parte desta categoria são os que seguem: “Ele se mexe junto com os pontos C e D, só o A ficou fixo, não se mexeu, mas mesmo assim não perdeu suas características”, “Nenhuma movimentação que altera sua estrutura”, “Ele não mudou de forma, apenas se mexeu” e “Um movimento que não modifica a figura”.

Na categoria F, temos duas respostas que expressam a não-realização de qualquer movimento. Analisando as construções feitas por estes dois estudantes, verifiquei que uma delas foi feita corretamente, mas a outra não. É bastante provável que eles tenham resolvido escrever a mesma resposta, baseados na análise de apenas uma das construções, visto que ambos são da mesma turma e estavam sentados juntos durante a realização da atividade.

É possível que a construção incorreta tenha sido descartada para análise, visto que sofria deformações durante o movimento. A figura 25 ilustra o ocorrido.

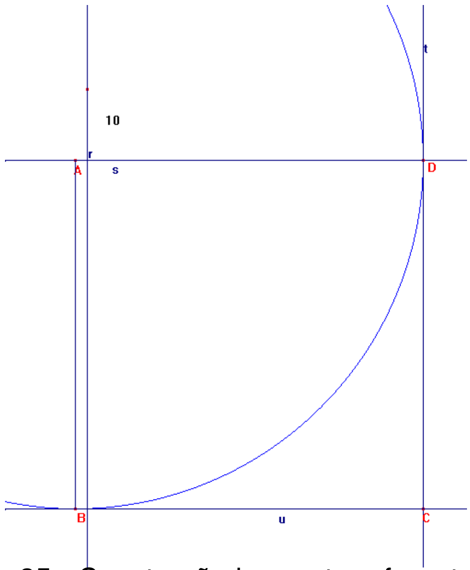


Figura 25 - Construção incorreta referente à categoria F

As linhas da construção não foram escondidas, para que se pudesse observar exatamente onde o aluno cometeu um erro. O problema desta construção foi o fato de a reta r não ter sido traçada sobre os pontos A e B. Na intersecção das retas r e u deveria estar o ponto B, vértice do quadrado, mas como a reta r não foi traçada sobre ele, o mesmo pôde ficar livre sobre a circunferência, sem apresentar vínculo correto com os lados do quadrado. A figura 26 mostra a deformação do quadrado durante a movimentação do vértice B.

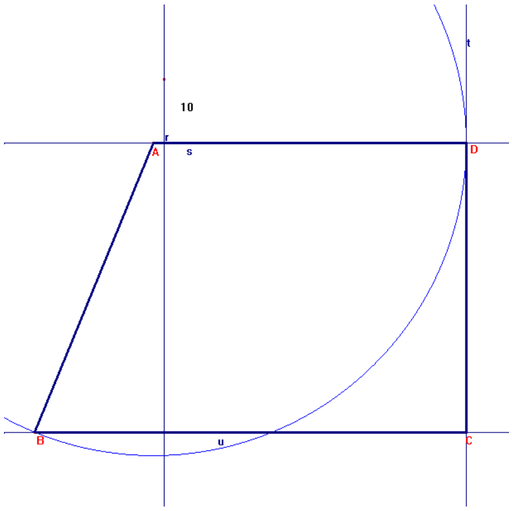


Figura 26 – Mesma construção com destaque para o erro

Já a construção do outro aluno, conforme dito anteriormente, foi feita com precisão, garantindo que o quadrado sofresse uma rotação em torno do ponto A, sem perder suas características geométricas.

Sendo assim, uma hipótese provável que justifique o posicionamento destes alunos é que, ao responderem que **nenhum** movimento ocorreu, estavam, na verdade, querendo expressar o fato de que **nenhum** tipo de deformação ocorreu após a movimentação do vértice B.

As respostas da categoria G confirmam que as construções feitas pelos três estudantes não foram precisas, conforme se pode notar pelo que escreveram: “Ele movimentou e trocou de ´aparência` porque provavelmente não ficou bem em cima das retas”, “Ele se deformou” e “Sofreu mudanças”.

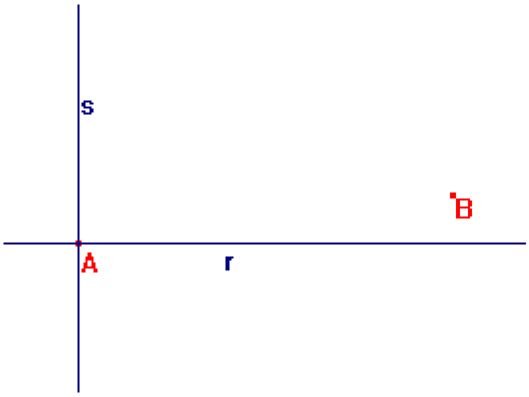
A seqüência dos sete desenhos a seguir ilustra os passos da construção de um desses três alunos. (Figura 27).

1º) Marcou o ponto A

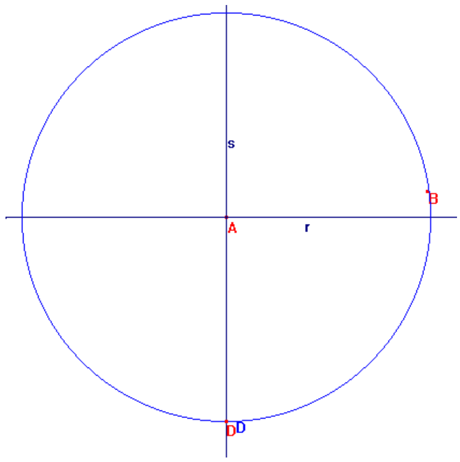
2º) Marcou o ponto B, a partir da transferência de medidas.

3º) Traçou a reta r passando pelo ponto A, mas não pelo ponto B.

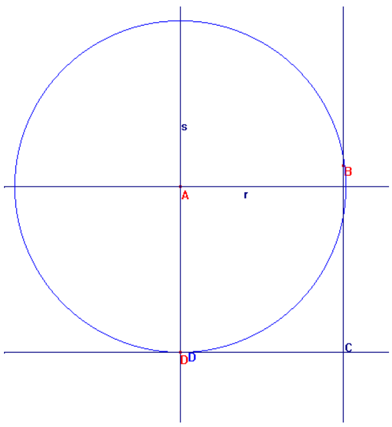
4º) Traçou a reta s perpendicular a reta r, passando pelo ponto A.



5º) Construiu a circunferência, que chamou de D, com centro em A, passando pelo ponto B. Em seguida, marcou o ponto D na intersecção da reta s com a circunferência.



6º) Traçou uma reta perpendicular a reta s, passando pelo ponto D e uma perpendicular a reta r, que chamou de C, passando pelo ponto B.



7º) Marcou o ponto C na intersecção das duas últimas retas construídas e traçou o polígono ABCD.

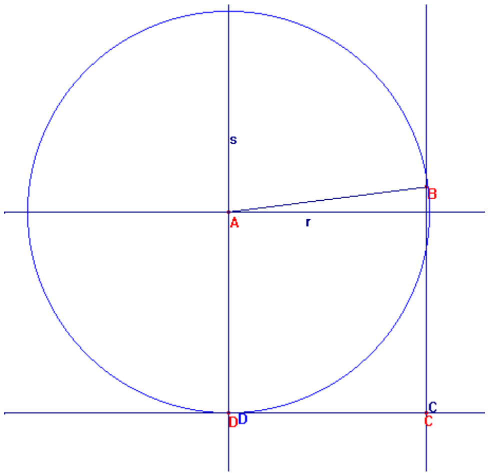


Figura 27 – Seqüência dos sete desenhos que ilustram os passos da construção

Analisando a construção acima e as demais que também foram feitas de forma incorreta, percebe-se que o erro cometido foi o mesmo, ou seja, a reta r não foi construída de forma que passasse sobre os pontos A e B. Observando os passos da seqüência mostrada acima, fica fácil compreender que esse erro, já no começo da construção, compromete todos os demais passos, fazendo com que ao final do trabalho as propriedades geométricas do quadrado não se mantenham sob ação do movimento do vértice B.

A figura 28 mostra a deformação do quadrado ABCD, quando movimentado.

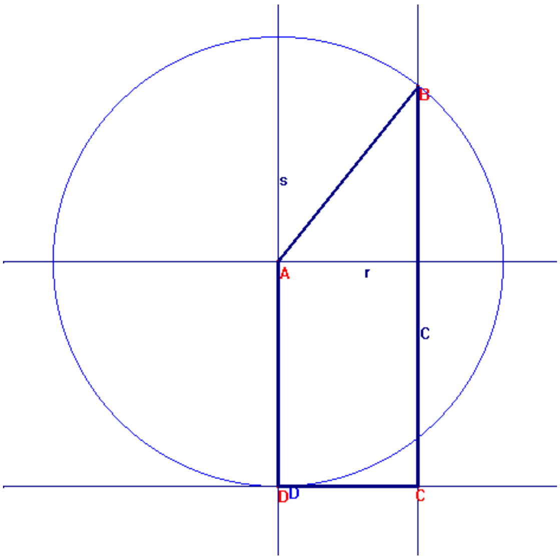


Figura 28 – Deformação do “quadrado”

No caso das construções que não foram feitas de forma correta, não foi possível observar uma das vantagens do dinamismo dos softwares de Geometria Dinâmica, que é justamente a capacidade de preservar relações entre os elementos do objeto construído. O deslocamento do vértice B fez com que sua posição relativa aos demais vértices e lados do quadrado fosse alterada.

Para finalizar, temos oito alunos que não responderam a questão.

Com a realização dessa atividade, os estudantes puderam validar ou reformular suas concepções acerca do que seja um quadrado. Seguindo corretamente os passos da construção e utilizando recursos do programa, tais como, **Transferência de Medidas** e **Reta Perpendicular**, foi possível garantir que o objeto geométrico tivesse os quatro lados congruentes e os quatro ângulos de 90°.

Além disso, explorando os recursos do *Cabri*, puderam comprovar, conforme afirmam Nunes e Gravina (2003), que:

> Nessa interface têm-se objetos geométricos que podem ser manipulados, que se modificam, mas que guardam as propriedades geométricas impostas à construção e, conseqüentemente as propriedades que dessas decorrem. (p.33)

A seguir, faremos a análise das respostas dadas pelos alunos para o seguinte questionamento feito também no item 15:

E então? A construção sofreu deformações? Perdeu suas características? Por quê?

Dos 63 estudantes que participaram da atividade, apenas três responderam que a construção sofria deformações, perdendo suas características geométricas. Estes alunos perceberam que suas construções não foram feitas com precisão e, por isso, apresentaram as seguintes justificativas: “Sim, porque não ficou bem em cima dos pontos”, “Sim, pois o ponto B não passou bem em cima da intersecção r com a circunferência” e “Sim, porque não coloquei o ponto B na intersecção das duas retas”.

Quatro estudantes responderam, simplesmente, “não” para esta pergunta, sem apresentarem justificativas.

Dois participantes escreveram que o objeto construído não deformava sob ação do movimento, porém suas justificativas não explicavam tal fato. Seguem as duas respostas: “Não, porque o quadrado está com seus pontos iguais” e “Não porque é o raio”.

Outros 19 alunos também responderam que o quadrado não sofria deformações ao ser movimentado, no entanto, seus argumentos eram redundantes ou não eram suficientes para justificar o porquê de ocorrer o fato supracitado. São alguns exemplos de respostas dadas por eles: “Não. Ao contrário da primeira aula, ela não se deformou”, “Não, porque ele apenas se movimentou”. “Não, ela toda se mexeu, mas as linhas não foram deformadas”, “Não, pois agora é um polígono regular” e “Não, pois é um quadrado exato”.

Vinte e seis alunos responderam que o motivo pelo qual o quadrado não teve sua estrutura modificada foi porque, durante as construções, preocuparam-se em garantir a presença das características geométricas que definem o quadrado. Alguns destes estudantes especificaram quais seriam estas características. Seguem alguns exemplos de respostas: “Não, ela se movimentou, mas sem perder suas propriedades porque o quadrado está com as características não foi feito ‘a mão livre’”, “Não, porque eu fiz um quadrado definindo as características geométricas”, “Não, porque foram usadas medidas iguais”, “Não, não, porque o quadrado que eu fiz foi feito com retas paralelas e perpendiculares” e “Não sofreu nada, não alterou sua característica porque o quadrado foi feito com suas características básicas. (ângulo de 90°, etc.)”.

Nove alunos não responderam ao item.

5.6 Descobrindo o Teorema da Pitágoras

Esta atividade foi realizada com a 8ª série do Ensino Fundamental e teve como objetivo utilizar as ferramentas do software *Cabri Géomètre II* para compreender o Teorema de Pitágoras. Sessenta e três alunos participaram, durante quatro períodos.

O roteiro desta tarefa consta de 22 itens, sendo alguns, orientações sobre os passos da construção e outros, perguntas que os estudantes tiveram que responder por escrito.

Os participantes leram o seguinte texto introdutório (constante no roteiro da atividade) antes de começarem o trabalho com as ferramentas do programa:

DESCOBRINDO O TEOREMA DE PITÁGORAS

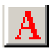
Na aula passada, tu aprendeste como podemos construir um quadrado no Cabri de tal forma que, mesmo após sucessivos movimentos, esta figura mantém as características que o definem.

*Hoje, tu farás uma construção que permitirá que tu explores as idéias de um Teorema muito importante da Matemática, ou seja, o **Teorema de Pitágoras**.*

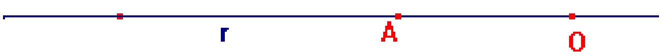
Como nesta atividade também é necessário que se construam quadrados, tu utilizarás os mesmos procedimentos realizados na atividade anterior para construí-los.

São apresentados a seguir os 22 itens e a análise das respostas dadas pelos alunos. Além disso, foram acrescentadas algumas construções, feitas por mim, para ilustrar os passos da atividade, descritos no roteiro. Por este motivo, as figuras correspondentes não serão nomeadas.

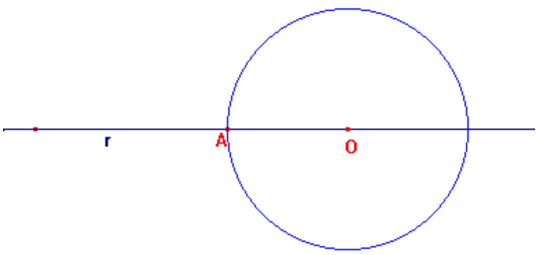
1. Abre um arquivo em branco no Cabri.

*2. Traça uma reta em qualquer parte da tela e nomeia-a de **r**. Lembra-te de que para nomear os objetos tu podes digitar o respectivo nome em seguida da construção, ou selecionar no 10º botão a opção **rótulo***  *e clicar sobre o objeto a ser nomeado.*

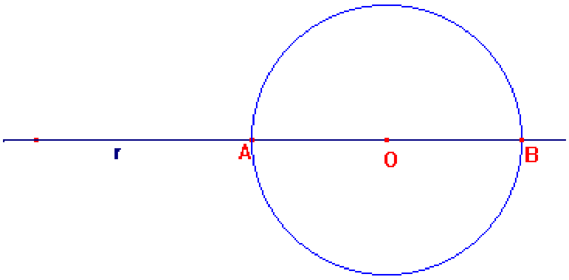
*3. Sobre a reta **r**, marca um ponto **O** em qualquer lugar que não seja sobre o ponto já existente na reta. Em seguida, marca outro ponto **A**, mas que também não seja sobre os dois pontos já existentes. É aconselhável marcar o ponto **A** nem muito próximo nem muito distante do ponto **O**. Em torno de 2 e 3 cm.*

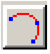


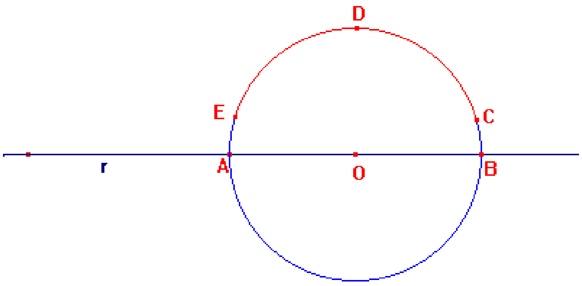
*4. Constrói uma circunferência com centro em **O** e que passe pelo ponto **A**.*



*5. Marca o ponto **B** na outra intersecção da circunferência com a reta **r**.*



*6. Agora tu vais criar um arco sobre a circunferência. Para isso, seleciona a opção **arco***  *no 4º botão. Marca, sobre a circunferência, o ponto **C** um pouco acima do ponto **B**. Em seguida, marca o ponto **D**, também sobre a circunferência, em qualquer lugar entre os pontos **A** e **B**. E por fim, marca o ponto **E**, sobre a circunferência, um pouco acima do ponto **A**.*



Muitos alunos encontraram dificuldade para construir os arcos, porque insistiam em querer marcar apenas dois pontos, inicial e final, para determinar o objeto, esquecendo-se do ponto que deveria ser marcado entre os outros dois citados.

Vários estudantes, após marcarem o ponto C, disseram que não estavam conseguindo construir o arco e recomeçaram repetidas vezes o procedimento. Isso ocorreu porque, ao criarem o ponto inicial do arco sobre a circunferência e arrastarem o mouse para construírem o ponto D, a linha que definia o arco não se mantinha sobre a circunferência, conforme eles imaginavam que devesse acontecer.

As figuras abaixo ilustram o que acontecia nesses casos.

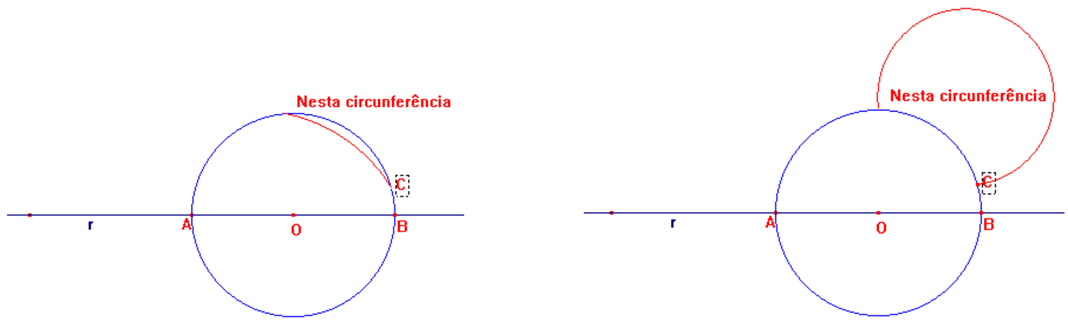


Figura 29 – Construção do arco

Quando os alunos solicitavam meu auxílio para resolverem o problema, eu os orientava para que marcassem o ponto D, mesmo que o arco não se mantivesse sobre a circunferência e, em seguida, determinassem o ponto E, observando o que ocorria.

Logo eles percebiam que, ao marcarem o ponto D e partirem para a determinação do ponto E, automaticamente, o arco se ajustava sobre a circunferência.

*7. Marca o vértice **F** que será um ponto sobre o arco em qualquer lugar entre os pontos **B** e **A** desde que não seja sobre nenhum dos pontos marcados anteriormente. Não te esquece de nomeá-lo. Agora cria o triângulo **BFA**.*

Neste momento da construção, alguns alunos em vez de marcarem o vértice **F** sobre o arco, conforme o solicitado, o marcaram sobre a circunferência. Talvez tenham incorrido nesse erro por não lerem com devida atenção o enunciado da questão; já outros, embora soubessem que o ponto deveria ser marcado sobre o arco, cometeram um pequeno deslize em um dos procedimentos da questão, a seguir descrito.

O fato é que o arco CDE foi construído sobre a circunferência e o aluno ao tentar marcar um ponto qualquer sobre ele, se depara com a seguinte pergunta feita pelo software: **"Qual objeto?"**. Isso ocorre porque o programa não é capaz de reconhecer sobre qual objeto o estudante deseja marcar o vértice **F**.

Ao surgir a pergunta na tela, os alunos clicaram no local em que iriam definir o ponto, porém não tomaram o devido cuidado no momento de selecionar a resposta correta, clicando dessa forma sobre a opção **circunferência**, em vez de clicarem sobre a opção **arco**.

A figura a seguir mostra o momento em que deveriam fazer a escolha de um dos objetos.

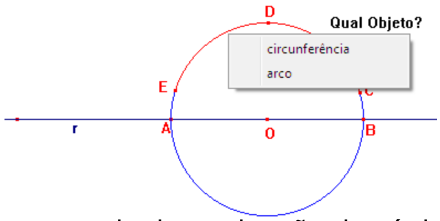
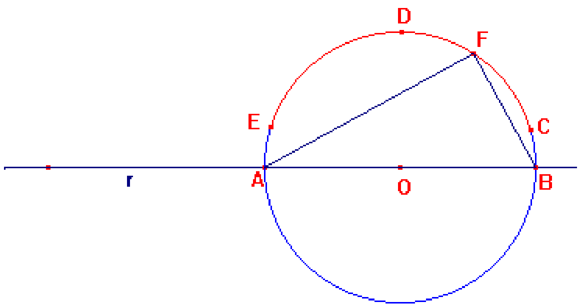


Figura 29 – Momento de determinação do vértice F sobre o objeto

Na verdade, o fato de estes alunos terem construído o vértice **F** sobre a circunferência e não sobre o arco não provocou nenhum erro que não lhes permitisse, ao final da construção, validar em termos de valores o teorema de Pitágoras.

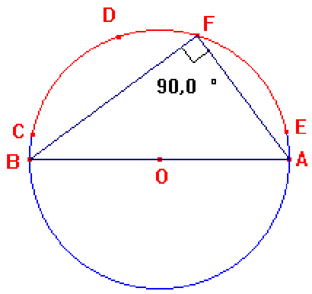
O problema que este descuido causou no trabalho destes estudantes será discutido mais adiante.

Continuo, então, com a descrição dos procedimentos e apresentação dos itens, com a figura abaixo que ilustra a construção após a determinação do triângulo BFA.

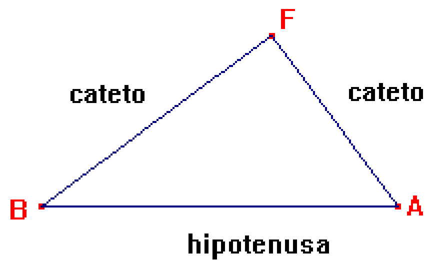


Em função de algumas proposições geométricas já formuladas e demonstradas como verdadeiras, podemos afirmar que os triângulos inscritos em semicircunferências são retângulos.

*Dessa forma, tu podes observar que o triângulo **BFA** é retângulo em função da forma como foi construído.*



Nesse triângulo, os lados têm nomes especiais. Os **catetos** formam o ângulo reto enquanto que a **hipotenusa** é o lado oposto ao ângulo reto. Observa o desenho abaixo:

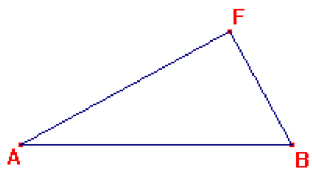


Agora tu construirás um quadrado sobre cada um dos três lados do triângulo retângulo **BFA**.

8. Primeiramente, vamos esconder alguns objetos dos quais não precisaremos para construir os quadrados. São eles:

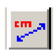
* pontos **C**, **D**, **E** e **O**. Obs.: Clica sobre os pontos e não sobre as letras;
* reta **r** e o ponto que está sobre ela;
* o arco e a circunferência;

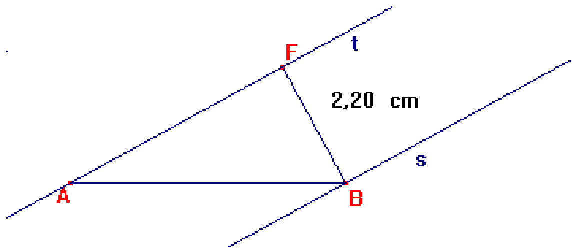
Lembra que para esconder objetos basta selecionar a opção **esconder/mostrar**  que se encontra no último botão.



9. Constrói duas retas perpendiculares ao cateto **BF**, uma passando pelo vértice **B**, que tu chamarás de reta **s** e outra passando pelo vértice **F** que tu chamarás de **t**.

10. Na atividade anterior, tu pudeste escolher o valor que querias para medida do lado do quadrado. Porém, como agora os quadrados serão construídos sobre os lados do triângulo **BFA**, suas medidas já estão determinadas.

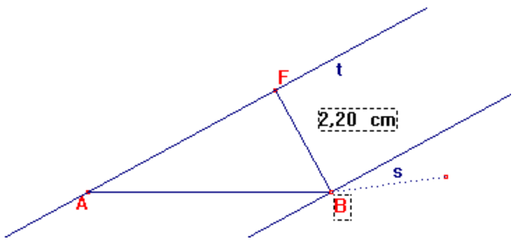
Sendo assim, seleciona no 9º botão a opção **distância e comprimento**  e clica sobre os vértices **B** e **F** para saber a distância entre eles e, conseqüentemente, a medida do lado do quadrado.

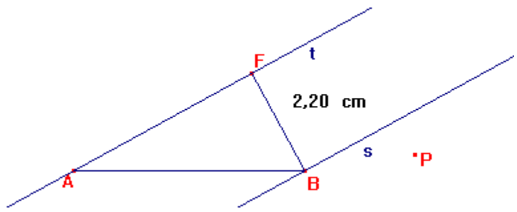


11. *O que tu farás agora é transferir a medida do cateto* ***BF****, a partir do ponto* ***B****.*

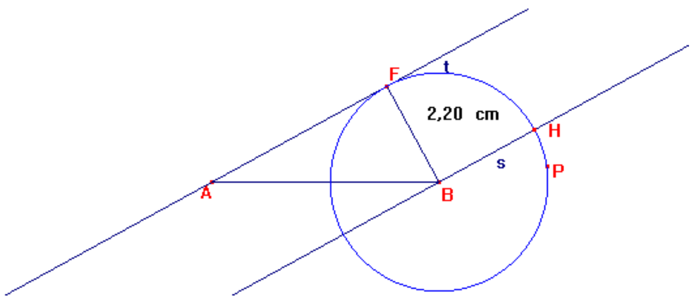
Lembra que, para isso, tu deves selecionar a opção ***transferência de medidas***  *que se encontra no 5º botão, depois deves clicar sobre a medida em questão e sobre o ponto* ***B****.*

Deverá aparecer um segmento pontilhado cuja medida é exatamente a do lado do quadrado. Agora, clica em qualquer lugar da tela para fixar o ponto que está na extremidade livre do segmento. Esse ponto tu chamarás de ***P****.*



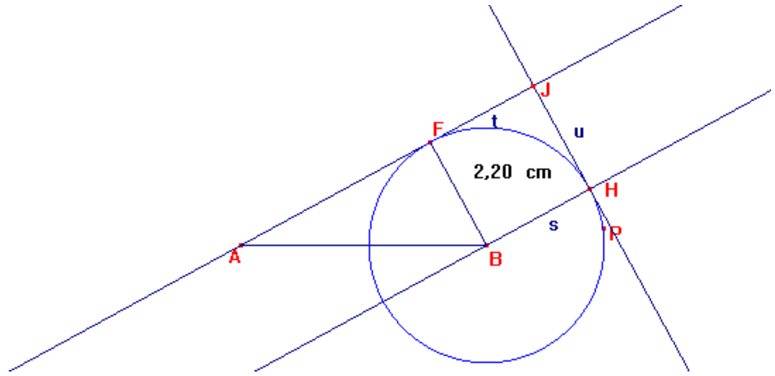


12. Constrói uma circunferência com centro em ***B****, passando por* ***P****. Em seguida, marca o ponto* ***H*** *na intersecção da circunferência com a reta* ***s****.*



13. Constrói uma reta ***u*** *perpendicular à reta* ***s****, passando pelo ponto* ***H****. Marca o ponto* ***J*** *na intersecção das retas* ***u*** *e* ***t****.*

Observa que o quadrado ***BHJF*** *já está determinado na tela.*

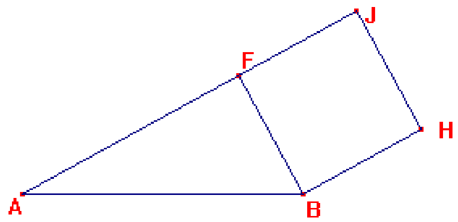


14. Agora tu vais esconder os seguintes objetos construídos:

** retas **s**, **t** e **u**;*

** a circunferência e o ponto **P**.*

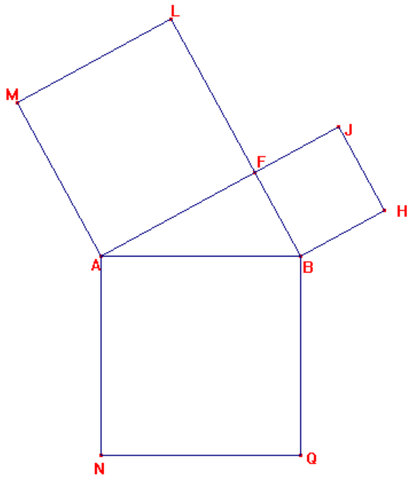
*Para finalizar a construção do quadrado, seleciona no 3º botão a opção **polígono***  *e clica sobre os pontos **B**, **H**, **J**, **F** e **B** nessa ordem.*



*15. Agora tu construirás o quadrado **FLMA** sobre o cateto **FA** do triângulo e o quadrado **BANQ** sobre a hipotenusa **BA** utilizando os mesmos procedimentos realizados para construção do quadrado **BHJF**. Repete os procedimentos a partir do item 9.*

*Para nomear os objetos utilizados na construção desses novos quadrados, no caso, vértices, pontos e retas, tu deverás escolher outras letras que não sejam as mesmas escolhidas para nomeação dos objetos utilizados na construção do quadrado **BHJF**.*

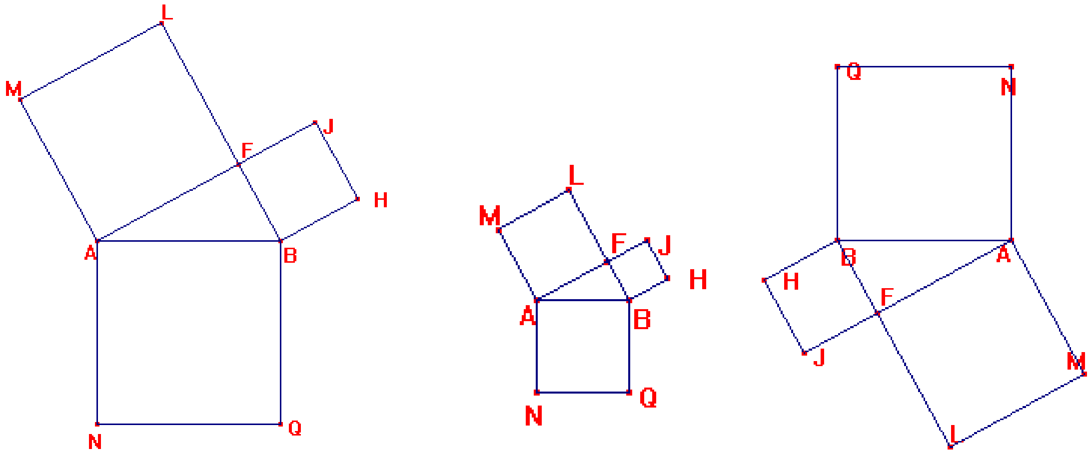
*Ao finalizar as construções, os únicos objetos que deverão continuar aparecendo na tela são o triângulo retângulo **BFA** e os quadrados **BHJF**, **FLMA** e **BANQ**. Todos os demais objetos deverão ser escondidos.*



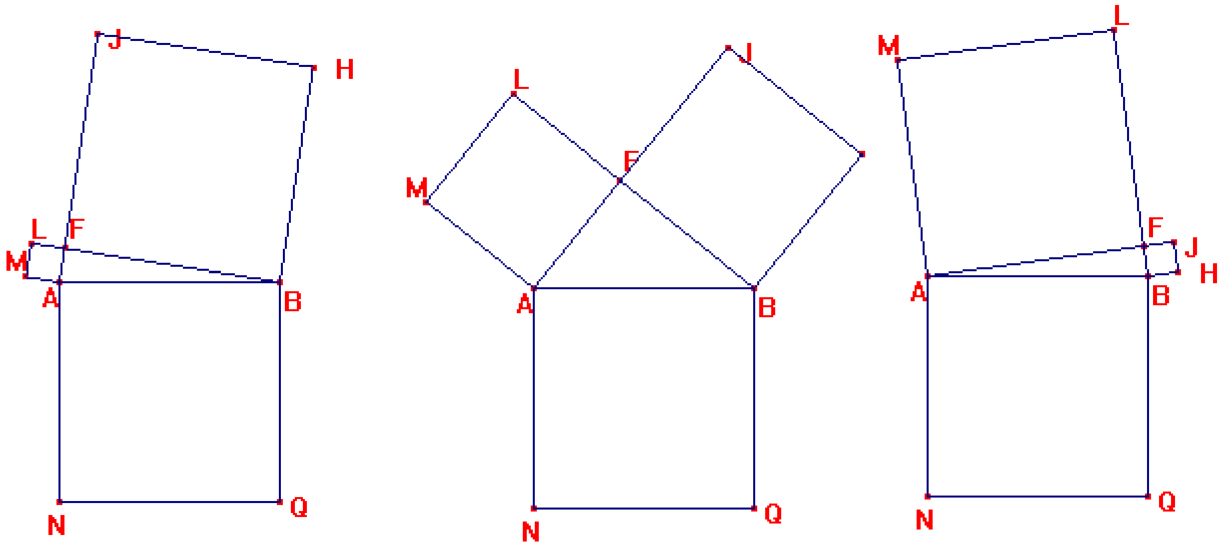
*16. Movimenta os vértices **F** e **A** e escreve o que acontece com a construção quando tu movimentas cada um deles.*

As seqüências de figuras abaixo ilustram o que acontece com a construção durante a movimentação dos vértices A e F.

Vértice A - Toda a construção diminui ou aumenta. Ao diminuir o máximo possível, os objetos mudam de posição.



Vértice F – O vértice F se movimenta ao longo do arco CDE, construído no item 6.



Na análise do item 7, foi comentado que alguns alunos marcaram o vértice F do triângulo AFB sobre a circunferência e não sobre o arco CDE, conforme a orientação do roteiro. Comentou-se também, que este descuido provocou um erro na construção que, embora não tenha impedido os estudantes de validarem o teorema estudado no que diz respeito aos valores numéricos, causou uma alteração na disposição dos objetos construídos.

Esta alteração fez com que, em alguns momentos, não ficasse tão clara a visualização dos quadrados FLMA e BHJF sobre os catetos, bem como do quadrado BANQ sobre a hipotenusa.

A figura 29, a seguir, ilustra a seqüência de alterações provocadas pelo movimento do vértice F, na construção de um destes alunos.

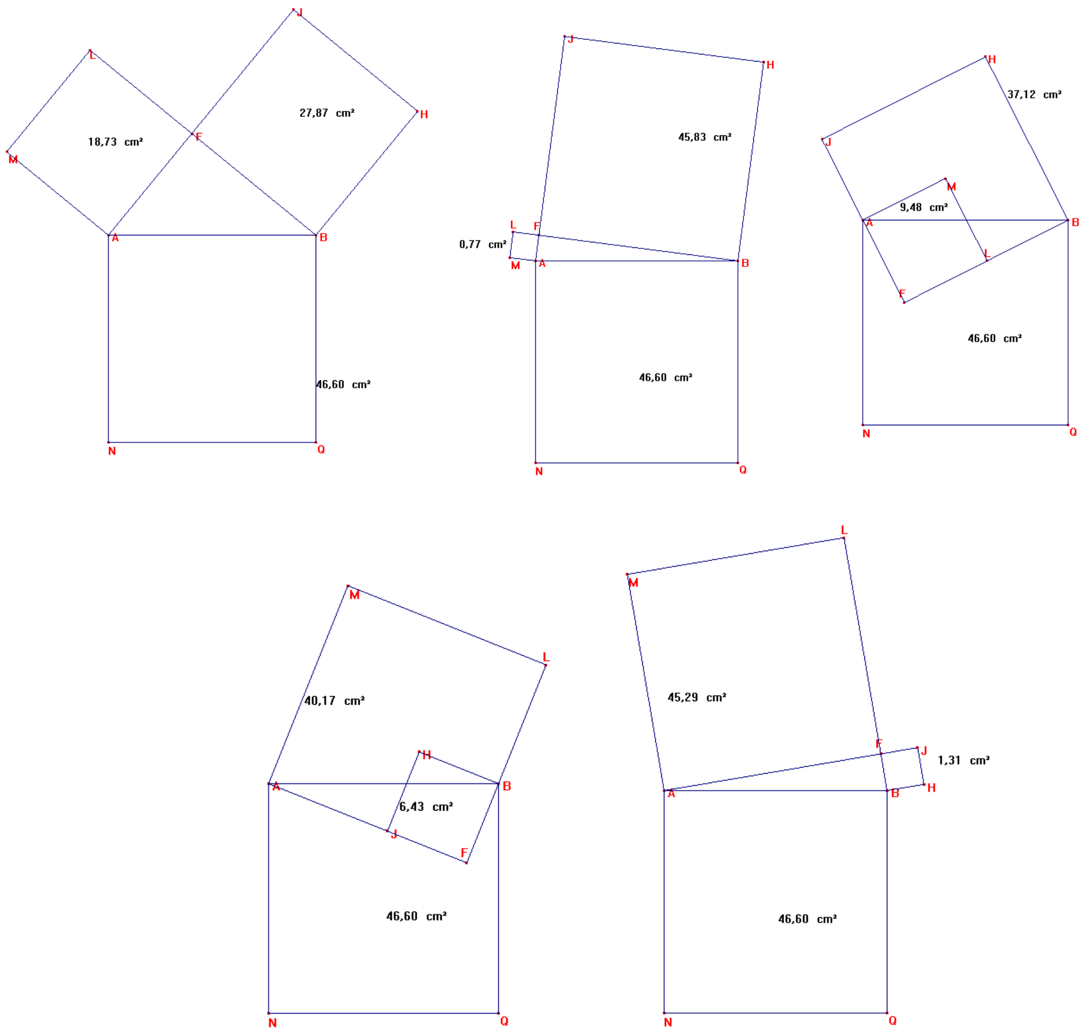


Figura 31 – Construção com seqüência de alterações

Pode-se observar, conforme dito, que apesar desta alteração na construção, a relação estabelecida entre as áreas dos quadrados e que caracteriza o teorema de Pitágoras ainda pôde ser verificada.

Na figura 3 temos:

Área do quadrado FLMA = 9,48 cm^2.

Área do quadrado BHJF = 37,12 cm^2.

Área do FLMA + área do BHJF = 46,60 cm^2.

Área do quadrado BANQ = 46,60 cm^2.

Com estas ilustrações fica claro o motivo pelo qual os alunos foram orientados a construírem o arco CDE. A finalidade deste objeto é, portanto, limitar o movimento do vértice F, garantindo que suas diferentes localizações não provoquem modificações nas posições dos quadrados FLMA e BHJF sobre os catetos do triângulo BAF, nem do quadrado BANQ sobre a hipotenusa.

As respostas apresentadas pelos alunos são analisadas a seguir.

Onze estudantes escreveram sobre o movimento sofrido pela construção, de uma maneira geral, ou seja, não especificaram, conforme solicitado, o que acontecia com os objetos ao se movimentar os vértices A e F. As respostas ressaltam o fato de os quadrados aumentarem ou diminuírem de tamanho conforme a movimentação imposta à construção.

Cinco participantes escreveram sobre as modificações ocorridas com a construção em função da movimentação do vértice A ou do vértice F. São exemplos de respostas para este caso: “Movimentando o ponto A a estrutura diminui/aumenta” e “F= deforma a figura indo de um lado para o outro”. Neste último exemplo, o aluno utilizou a palavra “deforma” para dizer que, ao movimentar o vértice F, a figura não mantinha sua posição inicial.

Outros dez alunos citaram as modificações ocorridas com a construção durante a movimentação de ambos os vértices. Seguem alguns exemplos de resposta: “Quando mexe o F os quadrados JHBF e FLMA se movimentam e quando movimenta a vértice A os quadrados e o triângulo aumentam ou diminuem de tamanho”, “O F mexeu para os lados e o A aumenta e diminui, mas não deixa de ser quadrado” e “Com a F faz um movimento circular mudando a medida dos lados proporcionalmente. A aumenta e diminui a figura”. No último exemplo o aluno utilizou a palavra “proporcionalmente” para justificar o fato de as medidas dos lados de um dos quadrados construídos sobre os catetos aumentarem enquanto as medidas dos lados do quadrado sobre o outro cateto diminuíram.

Dezessete estudantes não especificaram o tipo de movimento sofrido pela construção quando movimentavam um ou outro vértice, mas enfatizaram em suas respostas o fato de os quadrados não perderem suas características geométricas durante o movimento. São exemplos de respostas para este caso: “Ele mexeu, mas sem alterar as propriedades das formas geométricas”, “Os quadrados mantêm suas propriedades, porém mudam de tamanho” e “Quando movimentamos os quadrados continuam iguais, apenas modificam os tamanhos e não se deformam”.

Um dos participantes escreveu que a construção sofria modificações, mudando a forma original dos quadrados, conforme figura 30.

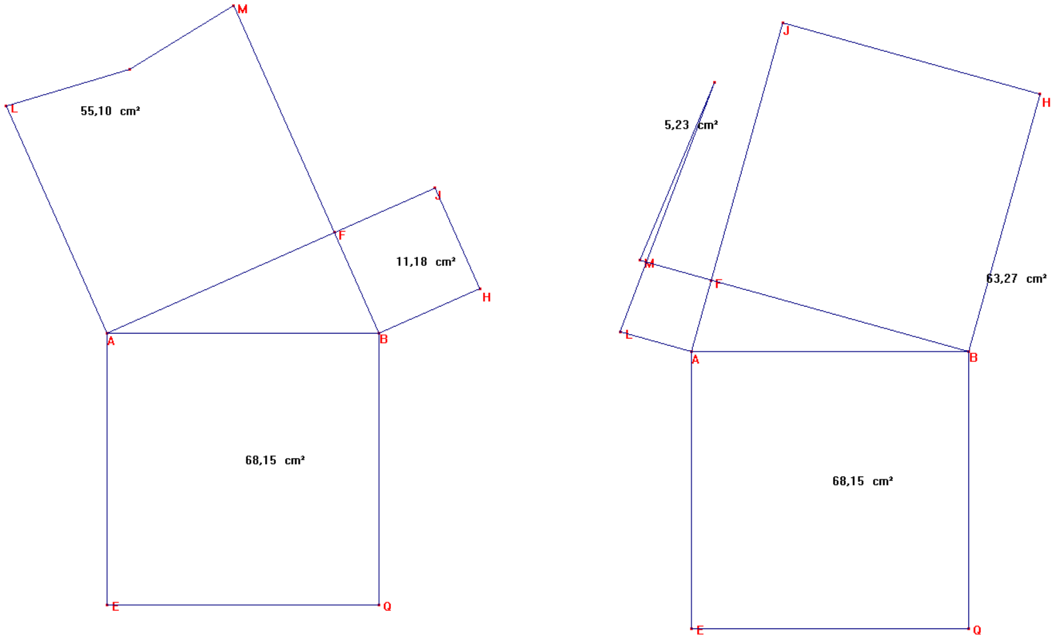


Figura 32 - Efeito do movimento sobre o trabalho do aluno

O problema na construção foi determinado no momento em que o estudante, ao criar o polígono FMLA, além de clicar sobre os vértices F, M, L e A, clicou também sobre um ponto que havia esquecido de esconder e que estava entre L e M. Dessa forma, em vez de construir um quadrilátero, o estudante construiu um "suposto" pentágono. Diz-se aqui, "suposto", porque ao movimentar o vértice F, o ponto que estava entre Le M não se deslocava juntamente com os demais objetos, fazendo com que o polígono deixasse de ser um pentágono. Este fato pode ser observado nos desenhos acima.

Para finalizar os comentários deste item, temos 19 estudantes que não responderam as questões do roteiro por não concluírem a construção no tempo previsto para realização desta atividade.

17. Seleciona no 9º botão a opção ***área***  *e clica sobre um dos lados de cada um dos quadrados para que sejam determinadas as áreas de cada uma dessas figuras.*

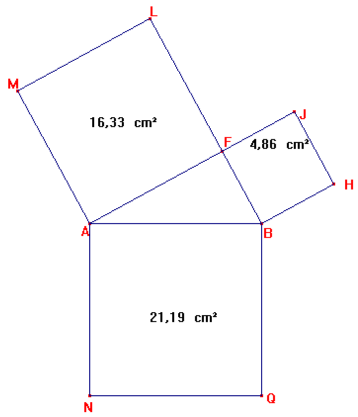


Figura 33 – Ilustração do que deveria surgir na tela após o procedimento

*18. Agora, seleciona também no 9º botão a opção **calculadora*** *. Em seguida, clica com o mouse sobre a medida da área do quadrado **BHJF**. Aparecerá no visor da calculadora a letra “a”, clica sobre o sinal de “+”. Repete o mesmo procedimento para a medida da área do quadrado **FLMA** e a seguir clica no sinal de igual. Que valor tu obtiveste? O que ele representa na construção?*

As respostas dadas para este item foram agrupadas por semelhança e distribuídas nas categorias apresentadas no quadro abaixo.

CATEGORIA	**FREQÜÊNCIA**
A - Apresentou o valor obtido, sem dizer o que ele representava.	6
B - Apresentou o valor obtido como sendo a soma das áreas do FLMA e do BHJF.	4
C – Respondeu que a soma das áreas do FLMA e do BHJF é a área do BANQ.	28
D – Respondeu incorretamente.	2
E - Não respondeu.	4
F – Não concluiu.	19

Quadro 18 – Distribuição das respostas do item 18

Na categoria B estão as respostas dos alunos que, além de apresentarem o valor obtido, expressaram que ele representava a soma das áreas dos quadrados FLMA e BHJF. De certa forma, estas respostas foram redundantes, visto que o procedimento solicitado foi justamente o de somar as áreas dos dois quadrados dos catetos.

Já na categoria C estão 28 respostas que apresentaram um nível de conclusão superior às da categoria B. Estes 28 estudantes expressaram que o valor obtido com a soma das áreas dos quadrados FLMA e BHJF representava a medida da área do quadrado BANQ. Seguem algumas respostas formuladas por estes alunos: “41,00 cm^2. A soma da área dos dois quadrados dá a área do quadrado da hipotenusa (que está ligada a hipotenusa)” e “140,43 cm^2 as duas áreas somadas são iguais a área do quadrado BANQ”.

Dois estudantes responderam de forma incorreta o item, no que diz respeito aos argumentos utilizados para explicar o que a soma das áreas dos quadrados dos catetos representavam. As formulações foram as seguintes: “Obtive 14,92 cm^2 que é a medida do triângulo maior” e “69,00 cm^2 representa a área total de todos os quadrados”.

Quatro alunos não responderam e 19 participantes não concluíram a atividade, conforme já foi dito na análise do item 16.

*19. Movimenta o vértice **F** para outra posição da tela. Limpa a calculadora e repete os procedimentos do item 18. O que aconteceu.*

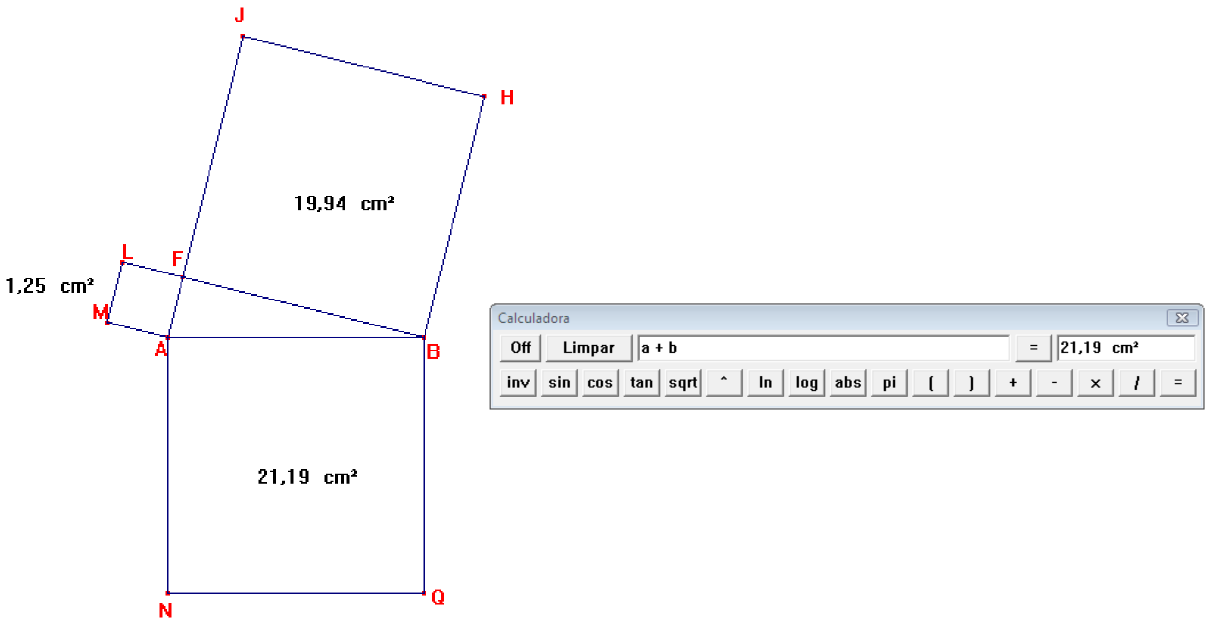


Figura 34 – Ilustração do procedimento a ser realizado no item 19

Trinta e dois alunos afirmaram, não exatamente com estas palavras, que o resultado se mantinha, ou seja, que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos continuava resultando na medida da área do quadrado BANQ. Seguem algumas de suas respostas: “Somando as duas áreas dos quadrados de cima temos a área do quadrado debaixo”, ”O resultado foi o mesmo que o anterior” e “A soma dos dois menores deu a mesma área que o maior”.

As respostas de nove estudantes não expressam o que aconteceu ao somarem novamente as áreas dos quadrados FLMA e BHJF, após a movimentação do vértice F. São alguns exemplos: “Se movimenta” e “48,05. Um quadrado aumenta enquanto o outro diminui proporcionalmente”.

Três alunos não responderam o item

*20. Agora, movimenta o vértice **A** e repete, novamente, os procedimentos do item 18. O que aconteceu neste caso?*

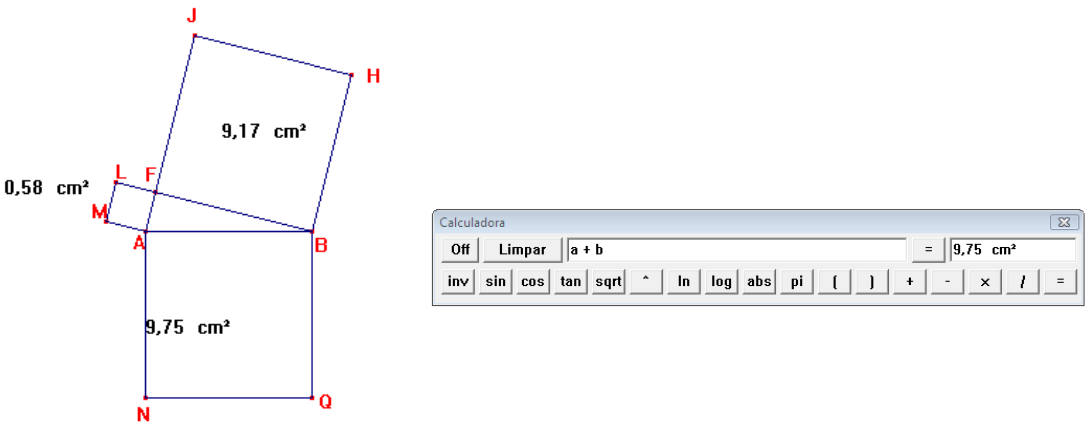


Figura 35 – Ilustração do procedimento a ser realizado no item 20

As respostas dos estudantes foram agrupadas em categorias e são apresentadas a seguir.

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A - As áreas dos quadrados sofreram modificações.	23
B - As áreas dos quadrados sofreram modificações, mas a soma das áreas do FLMA e do BHJF ainda resulta na área do BANQ.	15
C – Há referência apenas ao movimento sofrido pela construção.	1
D – Não responderam.	5
E – Não concluíram.	19

Quadro 19 – Distribuição das respostas do item 20

Na categoria A foram agrupadas as respostas que expressaram que o triângulo ABF e os três quadrados tiveram suas medidas alteradas após a movimentação do vértice A, causando modificações nos valores das áreas das respectivas figuras. Seguem algumas respostas que exemplificam este caso: “A área de todos diminuiu”, “Desta vez os quadrados não iam para o lado eles apenas aumentavam e diminuíam", "Aumenta a medida. 175,45 cm^2" e "O quadrado e os outros quadrados menor e o triângulo mudaram de tamanho".

Já os 15 estudantes cujas respostas fazem parte da categoria B fizeram afirmações que, de alguma forma, expressam que, apesar de o valor da área dos quadrados construídos sobre os catetos sofrer modificações, aumentando ou diminuindo, a sua soma permanece representando o valor da área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Alguns exemplos de resposta são: "Ele diminui o tamanho, mas continua sendo a soma das áreas dos quadrados dos catetos", "O mesmo que aconteceu antes, os quadrados BFJH mais FMLA são sempre iguais à BANQ" e "Toda figura cresce, mas o resultado de a + b continua igual ao quadrado BANQ".

Um dos 63 participantes restringiu-se a comentar sobre o movimento sofrido pela construção, sem fazer referência quanto aos valores das áreas dos quadrados: "Os quadrados apenas modificaram de lugar".

*21. Após realizares sucessivos movimentos e repetir os procedimentos para somar os valores das áreas dos quadrados que estão sobre os catetos do triângulo retângulo **BFA**, o que tu pudeste concluir?*

*Todas essas idéias que estão surgindo durante a realização desta atividade servem para nos ajudar a enunciar o **Teorema de Pitágoras**. Porém, em vez de usarmos uma frase extensa para enunciá-lo, utilizaremos uma fórmula algébrica, ou seja, uma linguagem matemática.*

*Para isso, chamaremos de **a** a medida da hipotenusa do triângulo retângulo. Nesse caso, podemos dizer que a área do quadrado que está sobre a hipotenusa será ______.*

*Sendo assim, se chamarmos de **b** e **c** as medidas dos catetos, quais serão as áreas dos quadrados desses catetos?*

Neste momento da atividade, os alunos já demonstravam terem compreendido as idéias subjacentes ao teorema de Pitágoras, porém muitos não conseguiram responder, por escrito, aos últimos questionamentos do roteiro, em função da falta de tempo.

Pode-se dizer que, dos alunos que conseguiram responder por escrito ao primeiro questionamento deste item, 28 demonstraram claramente terem compreendido a proposta da atividade. São alguns exemplos de respostas destes estudantes: "A área do quadrado BANQ é sempre igual a soma da área dos outros dois", "A soma da área dos quadrados ligados aos catetos é a área do quadrado ligado à hipotenusa", "Pode-se concluir que mesmo alterando o tamanho dos dois quadrados, o resultado sempre é a área do quadrado BANQ" e "Que a área do quadrado FLMA somada com a área do quadrado BHJF é igual a área do quadrado BANQ".

Outros quatro participantes enfatizaram aspectos relativos ao movimento, comprovando que o destaque ao dinamismo oferecido pelo *Cabri* é um fator que está implícito em muitos posicionamentos dos alunos. Isto se pode observar nas respostas de todas as atividades propostas com o software *Cabri*, que estão sendo analisadas nesta dissertação.

Quanto à expressão da área do quadrado construído sobre a hipotenusa, em função de a e das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, em função de b e c, tivemos 32 estudantes que escreveram "a^2" e "b^2 e c^2", respectivamente, como resposta.

Um aluno escreveu apenas as medidas da área de cada um dos três quadrados, enquanto outro estudante apresentou como resposta "a^2" para a área do quadrado construído sobre a hipotenusa e "bc" para a área dos quadrados construídos sobre os catetos.

22. Agora, utilizando essa linguagem algébrica, tenta reescrever as conclusões que fizeste no item 21 por meio de uma fórmula matemática.

Do total de alunos que conseguiu apresentar uma resposta, por escrito, para este item, 31 o fizeram de forma correta, ou seja, expressaram o teorema de Pitágoras, por meio de linguagem algébrica: "$a^2 = b^2 + c^2$".

Outro estudante escreveu a seguinte resposta: "$b^2 = 35{,}47$ cm^2, $c^2 = 20{,}099$ cm^2 e $a^2 = 56{,}46$ cm^2". Ele apresentou de forma correta as áreas de cada quadrado, mas não estabeleceu entre elas a relação que caracteriza o teorema estudado.

5.7 Aplicação do Teorema de Pitágoras

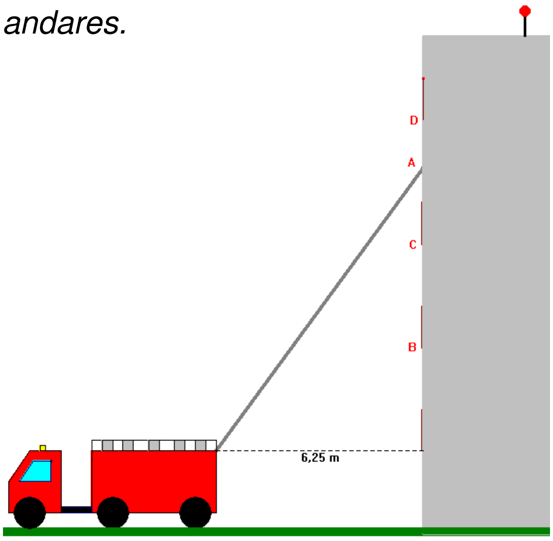
Esta atividade teve como objetivo utilizar as ferramentas do software *Cabri Géomètre II* para aplicar o teorema de Pitágoras na resolução de um problema.

A tarefa foi proposta no último dos quatro períodos, aos alunos que concluíram integralmente a atividade **Descobrindo o Teorema de Pitágoras**, o que justifica o fato de que apenas 26 alunos a realizaram. O problema proposto e as respostas dadas pelos alunos são apresentados a seguir.

APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O desenho abaixo ilustra a seguinte situação:

Um caminhão de bombeiros está estacionado em frente a um prédio de 4 andares a uma distância de 6,25 m dele. Os bombeiros desejam saber quantos metros de escada eles necessitariam "liberar" para que conseguissem alcançar as janelas do 2º, 3º e 4º andares.



Na figura, os pontos B, C e D nos indicam o local em que a escada seria apoiada em cada uma das janelas.

Os bombeiros dispõem de algumas informações. A primeira janela está a uma distância de 2,50 m do chão; a segunda janela a uma distância de 5,60 m; a terceira dista 8,75 m e a quarta está a 12,5 m do chão.

Agora, utiliza teus conhecimentos sobre o Teorema de Pitágoras e a opção ***calculadora***  *que se encontra no 9º botão para calculares quantos metros de escada seriam necessários para que os bombeiros alcançassem as janelas do prédio, com exceção da que está localizada no 1º andar.*

Algumas dicas para usares a calculadora do Cabri.

- *Para calculares qualquer número elevado ao quadrado como, por exemplo, $4{,}50^2$ tu deves digitar, no visor da calculadora, o número **4,50**, em seguida, clicar sobre o botão "**^**", digitar **2** também no visor da calculadora e, por fim, clicar sobre o sinal "**=**".*

- *Para extrair a raiz quadrada de qualquer número como, por exemplo, $\sqrt{6{,}95}$, tu deves clicar sobre o botão "**sqrt**", digitar o número do qual tu desejas extrair a raiz, clicar sobre o botão "**)**" e, finalmente, sobre o sinal "**=**".*

Escreve, no quadro abaixo, os cálculos que tu fizeste para determinar as respostas do problema.

As respostas dadas pelos estudantes foram distribuídas nas categorias apresentadas no quadro abaixo:

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Descreveu corretamente todos os passos para a resolução do problema.	5
B – Omitiu alguns passos da resolução do problema.	10
C – Cometeu algum erro de linguagem matemática.	4
D – Efetuou cálculos incompletos.	7

Quadro 20 – Distribuição das respostas do problema de aplicação

Na categoria A foram agrupadas as respostas dos cinco alunos que descreveram por completo e corretamente, todos os passos da resolução do problema de aplicação. Seguem os cálculos realizados por um destes alunos.

2º andar) $5{,}6 - 2{,}5 = 3{,}10$

$$(3{,}10)^2 + (6{,}25)^2 = 9{,}61 + 39{,}06 = 48{,}67$$

$$\sqrt{48{,}67} = 6{,}98$$

3º andar) $8{,}75 - 2{,}5 = 6{,}25$

$$(6{,}25)^2 + (6{,}25)^2 = 39{,}06 \,.\, 2 = 78{,}12$$

$$\sqrt{78{,}12} = 8{,}84$$

4º andar) $12{,}5 - 2{,}5 = 10{,}00$

$$(10{,}00)^2 + (6{,}25)^2 = 100 + 39{,}06 = 139{,}06$$

$$\sqrt{139{,}06} = 11{,}79$$

Estes estudantes além de descreverem todos os passos da aplicação do teorema de Pitágoras, escreveram a sentença matemática que determinou a medida de um dos catetos do triângulo retângulo considerado em cada um dos três casos.

Na categoria B, foram reunidas 10 respostas que apesar de corretas, não apresentaram todos cálculos envolvidos na resolução do problema. São casos em que os alunos não escreveram, por exemplo, como determinaram as medidas de um dos catetos ou determinaram a resposta final relativa a um determinado andar.

Segue um exemplo de resposta pertencente a esta categoria:

“B) $6,25^2 + 3,10^2 = 48,67$ → *Não escreveu como determinou a medida 3,10.*

$\sqrt{48,67} = 6,98$

C) $6,25^2 + 6,25^2 =$ → *Não escreveu como determinou a medida 6,25.*

$\sqrt{78,12} = 8,84$

D) $6,25^2 + 100 =$ → *Não escreveu como determinou a medida 100.*

$\sqrt{139,06} = 11,79$”

Da categoria C fazem parte quatro respostas que, embora corretas apresentam algum erro de linguagem matemática, na apresentação dos cálculos. Segue abaixo, um exemplo de resposta pertencente a esta categoria.

“B – $6,25^2 + 3,10^2 = 48,67 = 6,98$

C – $6,25^2 + 6,25^2 = 78,13 = 8,84$

A – $6,25^2 + 10^2 = 139,06 = 11,79$”

O erro cometido pelo estudante, nesta resposta, está no fato de ter estabelecido uma igualdade entre os dois últimos valores apresentados nos casos B, C e A. Na verdade, subentende-se que a intenção do aluno foi expressar que $\sqrt{48,67} = 6,98$, $\sqrt{78,12} = 8,84$ e $\sqrt{139,06} = 11,79$, porém não escreveu de forma matematicamente correta.

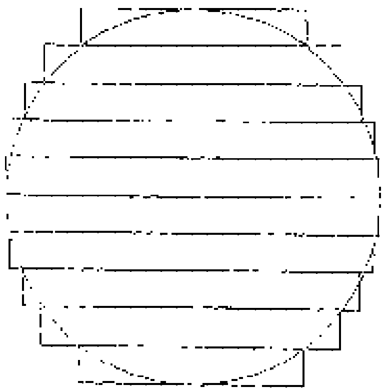
Já na categoria D estão as sete respostas incompletas, ou seja, são os casos em que os estudantes não determinaram as três medidas solicitadas no problema, apresentando, dessa forma, a solução de um ou dois casos.

5.8 Área do círculo

Apresentamos a seguir, os 27 itens que compõem a última atividade realizada com 73 estudantes da 8ª série do Ensino Fundamental, em três períodos, e que teve como objetivo descobrir a fórmula da área do círculo, por meio do software Cabri Géomètre II.

Alguns itens solicitavam apenas a realização de algum procedimento e outros, a apresentação de alguma resposta. As questões constantes no roteiro da atividade e a análise das respostas dadas pelos alunos são apresentadas a seguir.

Desde a antiguidade conheciam-se aproximações (algumas bastante boas) para a área de círculos. Um modo de resolver este problema é aproximando a área do círculo pela soma das áreas de retângulos nele inscritos. Repara como Arquimedes pensou para calcular a área do círculo: imaginou o círculo composto por muitos retângulos, com a mesma altura. Somando a área de todos os retângulos, obtemos a área aproximada do círculo.



Se diminuirmos a altura dos retângulos, aproximamo-nos ou afastamo-nos da área real do círculo? Por quê?

Para esta questão introdutória, seguem os tipos de respostas dos estudantes, distribuídas nas categorias apresentadas no quadro abaixo.

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Respondeu corretamente, mas sem apresentar justificativas.	10
B – Respondeu corretamente, apresentando justificativas.	53
C – Não respondeu.	10

Quadro 21 – Distribuição das respostas à questão introdutória

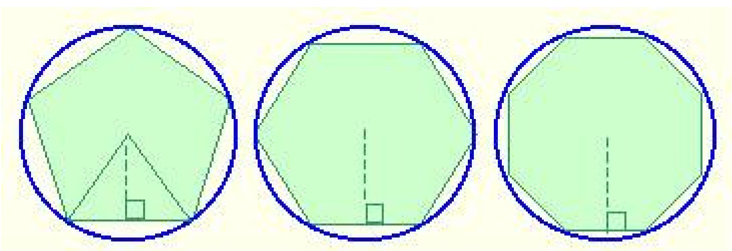
Na categoria A foram reunidas as respostas que afirmavam, corretamente, que, se diminuíssemos a altura dos retângulos, nos aproximaríamos da área real do círculo. No entanto, estes 10 estudantes não apresentaram nenhuma justificativa para a resposta dada.

Já os 53 alunos cujas respostas foram reunidas na categoria B fizeram a mesma afirmação que os participantes que compõem a categoria A, porém apresentaram justificativas às suas respostas. Seguem alguns exemplos: “Eles tendem a se aproximar pelo fato de diminuir a área e caber melhor nos círculos”, “Aproximamos, porque cada vez que diminuímos, menos ficam para fora”, “Aproximamos porque os retângulos vão se encaixar melhor dentro do círculo” e “Aproximamos da área real do círculo, porque irão ficar menos sobras fora do círculo”.

Na categoria C estão nove participantes que não apresentaram resposta alguma e um estudante cuja afirmação não responde ao questionamento: “Sim, porque fica mais preciso”. A expressão “fica mais preciso” parece trazer implicitamente a idéia de que, se diminuirmos a altura dos retângulos, a área real do círculo terá um valor mais preciso. No entanto, a resposta deste estudante ficou inserida na categoria C porque ao escrever “Sim”, ele não deixa claro qual o seu posicionamento quanto às hipóteses presentes na pergunta.

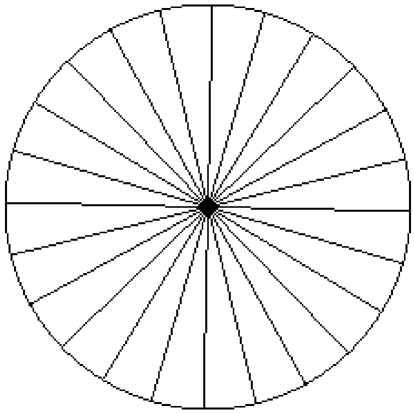
Seguem as demais questões do roteiro.

A maioria dos resultados foi obtida aproximando-se a área do círculo por áreas de polígonos. Por exemplo, o método usado pelos egípcios para resolver este problema foi baseado na observação de que, quanto maior fosse o número de lados do polígono regular inscrito numa circunferência, mais sua área se aproximaria da área do círculo correspondente.



Agora utilizaremos as ferramentas do Cabri para descobrirmos a fórmula da área de um círculo.

Uma idéia intuitiva para se obter a área de um círculo é dividi-lo em partes iguais:



1) Primeiramente, escolhe uma medida entre 1 cm e 3 cm para o raio da circunferência que tu irás construir. Escreve-a na linha ao lado.

No momento da realização da atividade, solicitei aos alunos que escolhessem uma medida entre 2 cm e 4 cm para o raio, pois pensei que seria melhor se não trabalhassem com círculos tão pequenos.

No quadro 22 estão as medidas e as respectivas freqüências com que os estudantes as escolheram.

MEDIDA	FREQÜÊNCIA
2 cm	27
3 cm	29
4 cm	8
Medida não inteira	4
Não indicou medida	5

Quadro 22 – Distribuição das freqüências das medidas escolhidas

2) Seleciona no 10º botão a opção ***edição numérica*** 

e clica em qualquer lugar da tela. Abrirá uma janela onde deves digitar o valor escolhido para o raio.

3) Cria o ponto ***O*** *em qualquer lugar da tela.*

4) O que faremos agora é transferir a medida que tu escolheste para o raio, a partir do ponto ***O****. Em seguida, clica em qualquer lugar da tela para fixar o ponto que está na extremidade livre do segmento pontilhado e chama-o de* ***A****.*

No roteiro das atividades Redescobrindo o *Cabri Géomètre* II - Parte II e Descobrindo o Teorema de Pitágoras, havia as instruções, passo a passo, de como se utilizar o recurso **Transferência de medidas**. Dessa forma, optei por não repetir a descrição da utilização desta ferramenta no roteiro desta atividade, até mesmo para observar se os alunos haviam aprendido como utilizá-la.

Poucos participantes necessitaram de auxílio neste item. Alguns questionaram apenas se o recurso a ser utilizado era mesmo o da ***transferência de medidas*** enquanto que outros precisaram somente de algumas informações para lembrar-se de como fazer uso da ferramenta.

*5) Constrói uma circunferência com centro em **O** e que passe pelo ponto **A**.*

6) Agora tu irás dividir a circunferência, conforme mostra a figura acima, porém em apenas 5 partes. Antes, responde a seguinte questão: Se a circunferência inteira corresponde a um ângulo de 360º, ao dividirmos em 5 partes iguais, cada arco da circunferência corresponderá a um ângulo de quantos graus?

Neste item, 72 estudantes responderam corretamente que o ângulo era de 72°. Um participante escreveu 60° como resposta, porém a construção feita por ele (e conferida por mim) comprova que realizou de forma correta os procedimentos, cometendo apenas um engano no momento de registrar a resposta. A figura 34 ilustra sua construção.

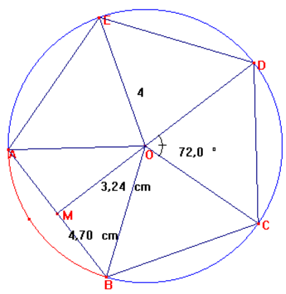
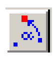


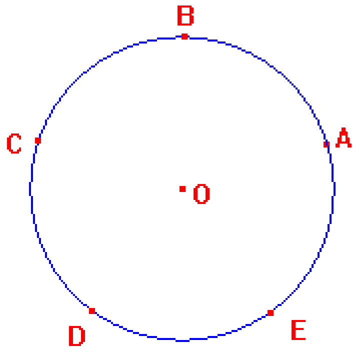
Figura 36 – Construção que comprova a correção do procedimento do aluno

*7) Para fazermos as divisões da circunferência faremos a rotação do ponto **A**, sobre a circunferência, segundo um ângulo cuja medida determinaste no item anterior. Para isso, seleciona no 10º botão a opção **edição numérica*** *, clica em qualquer lugar da tela e digita a medida desse ângulo na janela que está aberta.*

*Para que o ponto **A** faça a primeira rotação, seleciona a opção **rotação***  *que se encontra no 6 º botão, clica sobre o ponto **A** (aparecerá a informação girar* *este ponto), clica sobre a medida do ângulo (aparecerá a informação usando este ângulo) e, por fim, clica sobre o centro **O** (aparecerá a informação ao redor deste ponto).*

*Sobre a circunferência surgiu um novo ponto que tu deverás chamar de **B**. Faz agora a rotação deste ponto da mesma maneira que fizeste a rotação do ponto **A**, ou seja, clica sobre o ponto **B**, sobre a medida do ângulo e sobre o centro **O**.*

*Deves repetir o procedimento acima até a determinação do ponto **E** sobre a circunferência, obtendo a figura abaixo.*



Uma dúvida que os estudantes tiveram durante a realização desta parte foi relativa ao momento em que deveriam digitar, na janela de edição, o ângulo determinado no item anterior. Por ser uma medida expressa em graus, os alunos tentaram digitar, junto ao número, o símbolo que representa a unidade citada, porém não conseguiam fazê-lo.

Ao questionarem sobre como deveriam proceder, eu explicava que, por se tratar de um recurso de ***edição numérica***, a janela só aceitava a inserção de números, não sendo possível nem necessária a digitação do símbolo do grau junto ao número que representava o ângulo de rotação.

*8) Constrói um **polígono** de vértices **ABCDE** inscrito na circunferência. Qual o nome deste polígono?*

Setenta e dois alunos responderam que é um pentágono e apenas um não soube informar.

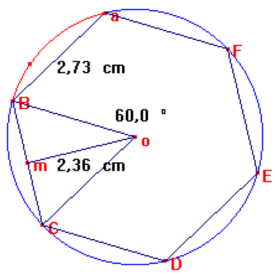
*9) Agora, utiliza a opção **triângulo** e constrói os triângulos **ABO**, **BCO**, **CDO**, **DEO**, e **EAO**. Para isso, basta clicar sucessivamente sobre os vértices de cada triângulo a ser construído.*

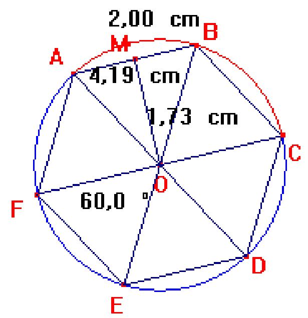
10) Utilizando a mesma medida que escolheste para o raio, repete os procedimentos dos itens 3, 4 e 5 para construíres uma nova circunferência no *mesmo arquivo em que construíste a anterior. Esta nova circunferência deverá ter centro **O’** e passar pelo ponto **A’**.*

11) Novamente dividirás a circunferência, porém não em 5 partes, mas em 6. Antes, responde a seguinte questão: Se a circunferência inteira corresponde a um ângulo de 360º, ao dividirmos em 6 partes iguais, cada arco da circunferência corresponderá a um ângulo de quantos graus?

Novamente, setenta e dois alunos responderam “60°”, dois deles indicaram outra medida e apenas um não respondeu.

Os dois estudantes que indicaram outra medida, escreveram no roteiro “36°” e “72°”. Porém, da mesma forma que o aluno citado no item seis, estes dois também cometeram apenas um engano no momento de registrarem suas respostas, visto que as construções feitas por eles comprovam que utilizaram corretamente o ângulo de 60° para fazer a rotação dos pontos sobre a circunferência, conforme vemos na Figura 35:





Construção do aluno que respondeu 36°. Construção do aluno que respondeu 72°.

Figura 37 – Comprovação da correção das construções

*12) Para fazermos as divisões da circunferência, novamente faremos a rotação do ponto **A’**, sobre a circunferência. Sendo assim, repete os procedimentos do item 7 (considerando a medida do ângulo que determinaste no item 11) até a determinação do ponto **F’** sobre a circunferência.*

*13) Constrói um **polígono** de vértices **A’B’C’D’E’F’** inscrito na circunferência. Qual o nome deste polígono?*

Sessenta e oito alunos consideraram que é um hexágono e cinco não responderam.

*14) Repete os procedimentos do item 9 para construíres o triângulo **A’O’B’** inscrito no polígono **A’B’C’D’E’F’**.*

*15) Agora tu marcarás, na circunferência divida em 5 partes, o ponto médio **M** do segmento $\overline{AB}$ e, na circunferência dividida em 6 partes, tu marcarás o ponto médio **M’** do segmento $\overline{A'B'}$.*

*Constrói os segmentos $\overline{O'M}$ e $\overline{OM'}$. Em seguida, seleciona a opção **distância e comprimento**, mede-os e escreve abaixo os valores encontrados.*

O primeiro procedimento que os estudantes deveriam realizar nesta questão era marcar os pontos médios M e M’ dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$.

Praticamente todos os alunos ao lerem o enunciado, me faziam as seguintes perguntas: “O que é ponto médio?” e “Como eu faço para marcar o ponto médio?”.

A partir destes questionamentos, eu conduzia a conversa por meio de perguntas que fizessem com que eles próprios descobrissem as respostas. Transcrevo, a seguir, o diálogo que tive com um dos alunos.

Aluno: “Professora eu não entendi. Como é que eu faço para marcar este ponto médio?”

Professora: “Bom, em primeiro lugar me responde o que é ponto médio?”

Aluno: “Não me lembro.”

Professora: “Tudo bem, mas pensa um pouquinho sobre o que ele deve representar. O que será que é um ponto que é médio?”

Aluno: “Humm... um ponto que está na média? Que está no meio?”

Professora: “Ok, um ponto que está no meio. E tu queres marcar um ponto médio de qual segmento?”

Aluno: “Do $\overline{AB}$.”

Professora: “Certo. Bom, se tu queres marcar o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e tu me disseste que um ponto que é médio deve estar no meio, então ele deve estar no meio do quê?”

Aluno: “No meio do A e do B.”

Professora: “Exatamente!”

Aluno: “Ah, tá! Então é só eu pegar a opção ponto e clicar entre o A e o B?”

Professora: “Mas se tu fizeres isto, como vais garantir que o ponto M está realmente na metade da distância entre A e B?”

Aluno: “Ah, mas não dá pra ser assim, mais ou menos? (risos) Olhando assim parece que está no meio.” (risos)

Professora: "É, mas em Geometria não podemos fazer as construções assim "a olho". Nem tudo aquilo que parece realmente é. Temos que garantir que, de fato, é o ponto médio de A e B.".

Aluno: "Mas como é que eu faço isso aqui no Cabri?"

Professora: "Então, o programa oferece um recurso que marca ponto médio."

Aluno: "Onde fica?"

Professora: "Procura um pouco nos menus."

Em seguida o aluno encontrou a ferramenta e selecionou-a.

Aluno: "E agora, o que eu faço? Clico no A e no B?"

Professora: "Clica e vamos ver o que acontece."

O programa marcou o ponto médio de $\overline{AB}$.

Aluno: "Ah...esse é o M!"

O aluno digitou M para nomear o ponto.

Aluno: "Agora eu faço a mesma coisa para fazer o outro ponto médio, do $\overline{A'B'}$ *."*

Professora: "Isso mesmo.".

Os diálogos estabelecidos com os demais estudantes seguiram a mesma linha de raciocínio da conversa narrada acima. Porém, alguns alunos, no momento de marcar o ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ escolhiam outra estratégia que não a de clicar sobre os pontos A e B, mas sim de clicarem diretamente sobre os segmentos.

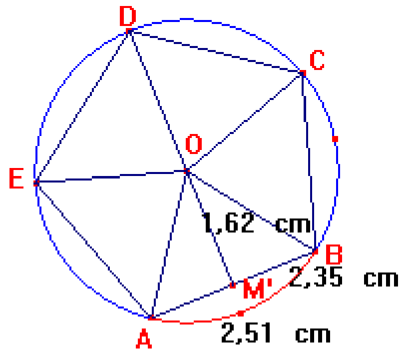
O segundo procedimento solicitado na questão foi medir os segmentos $\overline{OM}$ *e* $\overline{O'M'}$.

As respostas dadas pelos alunos foram agrupadas e distribuídas nas categorias apresentadas no quadro a seguir.

CATEGORIA	**FREQÜÊNCIA**
A – Respondeu corretamente.	60
B – Respondeu incorretamente em função de problemas na construção.	7
C - Respondeu incorretamente, mas a construção não apresentou problemas.	4
D – Não respondeu.	2

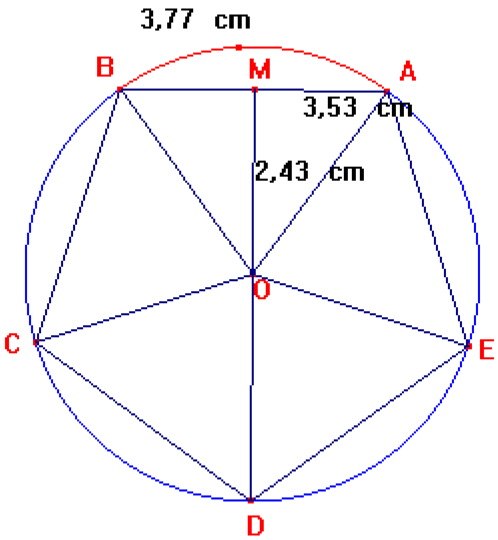
Quadro 23 – Distribuição das respostas do item 15

Na categoria A foram reunidos os 60 alunos que escreveram as medidas de $\overline{OM}$ e $\overline{O'M'}$ condizentes com as construções que fizeram. Seguem alguns exemplos, na figura 36:



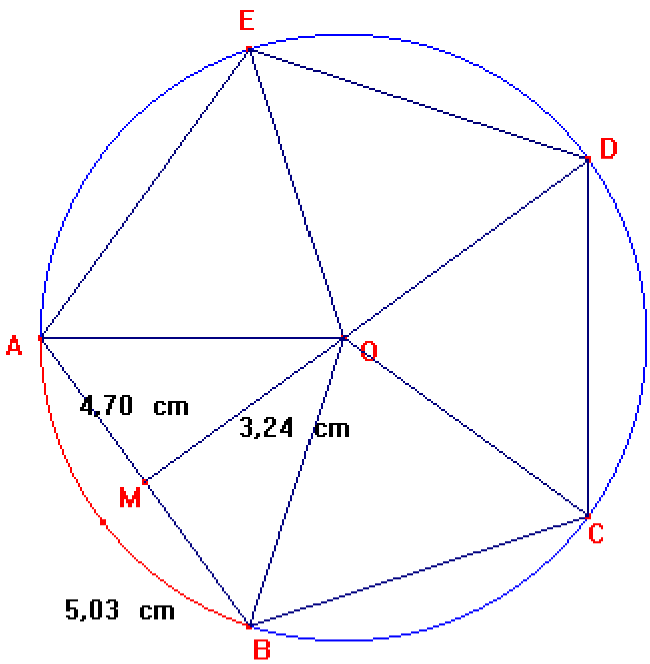
Circunferência de raio 2 cm.

Segmento $\overline{OM}$ = 1,62 cm.



Circunferência de raio 3 cm.

Segmento $\overline{OM}$ = 2,43 cm.



Circunferência de raio 4 cm.

Segmento $\overline{OM}$ = 3,24 cm.

Figura 38 – Exemplos de medidas condizentes com as construções

Na categoria B temos sete estudantes que cometeram algum erro durante a construção dos objetos geométricos, o que acarretou na determinação de uma resposta incorreta. A seguir, apresentamos dois exemplos.

Aluno A – Para fazer a construção da primeira circunferência este aluno não utilizou o recurso **Transferência de medidas** para determinar o raio de medida 3 cm. O estudante marcou o centro O, um ponto A qualquer, aproximadamente 3 cm distante de O e construiu a circunferência com centro em O passando por A.

Construindo a circunferência desta forma, o aluno permitiu que a medida do raio pudesse ser alterada, fazendo com que conseqüentemente todas as medidas dos objetos inscritos na circunferência também fossem modificadas.

Isto justifica o fato de o aluno ter encontrado 2,39 cm para $\overline{OM}$ quando deveria ter encontrado 2,43 cm. A medida do segmento $\overline{O'M'}$ estava correta porque a segunda circunferência foi feita de forma correta.

A figura 37, a seguir, mostra a ação do movimento sobre a construção deste participante.

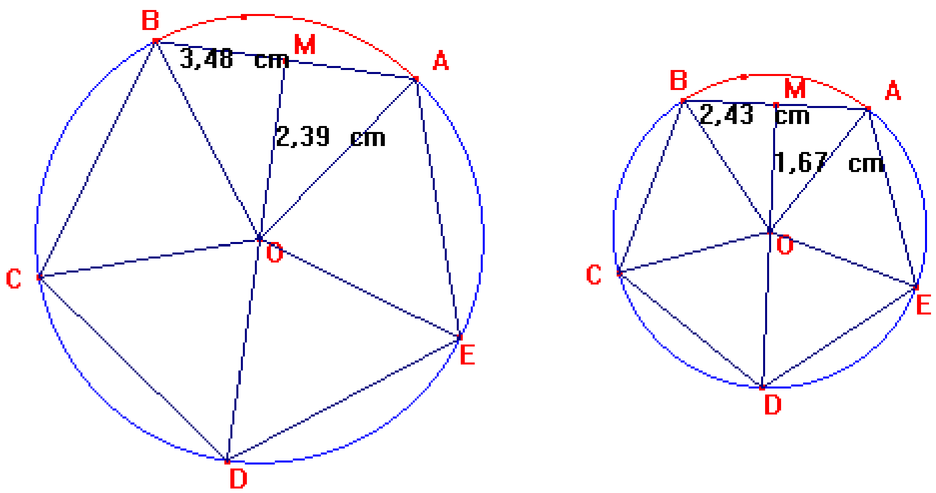


Figura 39 – Construção do aluno A antes e depois da ação do movimento

Aluno B – Este aluno optou por não construir o polígono ABCDE e simplesmente determinar os triângulos ABO, BOC, COD, DOE e EOA.

O erro cometido por este estudante consistiu em que os triângulos construídos não tinham como vértice comum o ponto O, centro da circunferência, mas sim outro ponto criado próximo ao centro O. Isto fez com que a medida do segmento $\overline{OM}$ não fosse determinada corretamente.

A figura 38 mostra a construção do estudante e o centro O foi por mim destacado para que pudesse ser melhor visualizado.

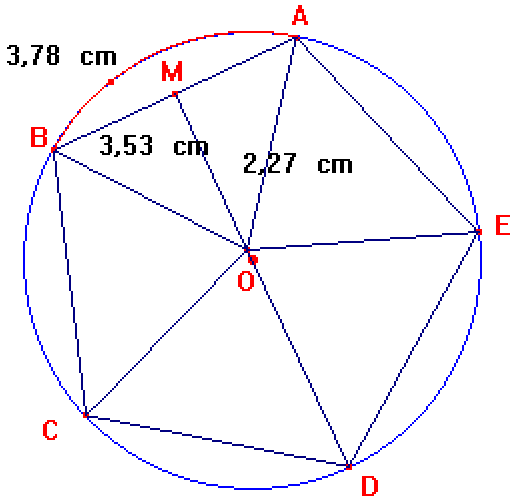


Figura 40 – Construção do aluno B

Na categoria C estão quatro alunos que escreveram medidas erradas no roteiro, mas suas construções foram feitas corretamente. Estes estudantes apenas cometeram um engano no momento do registro.

*16) Observa os triângulos **AOB e A'O'B'** em cada uma das circunferências e responde: Os segmentos* $\overline{OM}$ *e* $\overline{O'M'}$ *representam que elementos desses triângulos?*

No quadro abaixo são apresentadas as respostas dadas pelos estudantes para este questionamento.

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Altura do triângulo.	62
B – Metade	5
C – O tamanho do triângulo	2
D – Outras respostas.	3
E – Não respondeu.	1

Quadro 24 – Distribuição das respostas do item 16

Os 62 alunos cujas respostas fazem parte da categoria A responderam de forma matematicamente correta, ou seja, disseram que os segmentos $\overline{OM}$ e $\overline{O'M'}$ representavam a altura dos triângulos AOB e A'O'B'. Neste grupo, dois participantes complementaram suas respostas escrevendo ainda que os segmentos $\overline{OM}$ e $\overline{O'M'}$ seriam também bissetrizes, neste caso dos ângulos AÔB e A'Ô'B'. Considerando o fato que AOB é um triângulo isósceles e que A'O'B' é um triângulo eqüilátero estes dois estudantes fizeram afirmações corretas.

Na categoria B, foram reunidos os estudantes que utilizaram a expressão "metade" para responderem ao questionamento. São alunos que não conseguiram encontrar o termo matemático que definisse adequadamente o que seriam os segmentos $\overline{OM}$ e $\overline{O'M'}$. A estratégia utilizada por estes participantes foi encontrar uma palavra que expressasse o que os segmentos supracitados assinalavam nos dois triângulos.

Analisando desta forma, a resposta deste grupo de alunos é bastante lógica, visto que, de fato, os segmentos $\overline{OM}$ e $\overline{O'M'}$ parecem estar situados "na metade" de cada um dos referidos triângulos.

Já a resposta dos dois alunos inseridos na categoria C também faz bastante sentido se estabelecermos uma analogia com situações em que fazemos referência à altura, por exemplo, de um ser humano ou de um objeto. É comum vermos alguém questionar "Qual o tamanho daquela porta?" ou exclamar "Olha o tamanho daquele homem!" quando na verdade estão se referindo à altura, neste caso da porta e do homem.

Sendo assim, parece natural a estes alunos escreverem que os segmentos $\overline{OM}$ e $\overline{O'M'}$ representam o tamanho dos dois triângulos, como uma forma de expressar que estão pensando na altura destes objetos.

Na categoria D temos os três estudantes que apresentaram as seguintes respostas: "O lado do triângulo", "O comprimento" e "O cateto".

17) Se o número de lados do polígono inscrito nas circunferências aumentou, de forma que a medida do segmento $\overline{O'M'}$ também ficou maior que a medida $\overline{OM}$, essas medidas estão se aproximando de qual medida da circunferência?

Sessenta e dois alunos responderam corretamente, seis, incorretamente e cinco não responderam.

Os estudantes cujas respostas estavam corretas escreveram que as medidas de $\overline{OM}$ e $\overline{O'M'}$ estavam se aproximando da medida do raio da circunferência.

Seis participantes apresentaram respostas não condizentes com o questionamento feito, como, por exemplo: "Da medida do triângulo".

18) Mede os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ e registra abaixo os valores encontrados.

As respostas dadas para esta questão foram agrupadas e distribuídas nas categorias apresentadas no quadro a seguir.

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Respondeu corretamente.	59
B – Respondeu incorretamente em função de problemas na construção.	6
C – Respondeu incorretamente, mas a construção não apresentou problemas.	5
D – Respondeu incorretamente porque mediu outro objeto.	2
E – Não respondeu.	1

Quadro 25 – Distribuição das respostas do item 18

Na categoria A foram reunidos os 59 estudantes que indicaram medidas que estavam de acordo com as construções que fizeram.

O quadro 26 apresenta as medidas corretas de $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ de acordo com o valor escolhido para raio do círculo.

RAIO	MEDIDA DE $\overline{AB}$	MEDIDA DE $\overline{A'B'}$
1,56 cm	1,83 cm	1,56 cm
2 cm	2,35 cm	2 cm
2,57 cm	3,02 cm	2,57 cm
2,73 cm	3,21 cm	2,73 cm
3 cm	3,53 cm	3 cm
4 cm	4,70 cm	4 cm

Quadro 26 – Medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ conforme medida do raio

Da categoria B fazem parte os alunos que realizaram corretamente os procedimentos para medir os segmentos em questão, porém, encontraram outras medidas que não as do quadro acima, em função de suas construções apresentarem erros.

Os cinco participantes que compõem a categoria C mediram corretamente $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, mas escreveram outros valores no momento de registrarem suas respostas na folha.

Já na categoria D temos dois participantes que não apresentaram a resposta correta, porque mediram outros objetos. Um deles, por exemplo, respondeu “17,63 cm e 9 cm" que correspondem, respectivamente, ao perímetro do polígono ABCDE e ao perímetro do triângulo A'O'B'.

19) Constrói os arcos AB e A'B' sobre cada uma das duas circunferências. Em seguida, mede-os e escreve ao lado os valores encontrados.

Quando o número de lados do polígono aumenta, o que ocorre com a medida da base do triângulo desenhado no seu interior?

Compara a medida da base do triângulo AOB ($\overline{AB}$) com a medida do arco AB e a medida da base do triângulo A'O'B' ($\overline{A'B'}$) com a medida do arco A'B'. Escreve o que notas:

Neste item, embora não tenham sido discriminadas, havia três perguntas a serem respondidas. A primeira delas era quanto às medidas dos arcos AB e A'B'. As respostas dadas pelos estudantes foram agrupadas em categorias e estão distribuídas no quadro 27.

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Respondeu corretamente.	42
B – Respondeu incorretamente em função de problemas na construção.	14
C – Respondeu incorretamente, mas a construção não apresentou problemas.	11
D – Respondeu incorretamente porque mediu outro objeto.	1
E – Não respondeu.	5

Quadro 27 – Distribuição das respostas do item 19

Na categoria A foram reunidos os 42 alunos que fizeram as construções de forma correta e que, portanto encontraram os valores exatos das medidas dos arcos AB e A'B'.

Na categoria B temos 14 estudantes que cometeram algum erro durante a construção e que, em função disso, não determinaram a medida correta dos arcos. Dois erros foram cometidos com maior freqüência por estes alunos. O primeiro foi não terem utilizado a ferramenta **Transferência de medidas** para determinar o raio escolhido para a circunferência. Isto fez com que, ao movimentar a circunferência, a medida do raio variasse, fazendo com que, conseqüentemente a medida do arco também variasse.

O segundo erro, cometido pela maior parte destes 14 participantes, foi que, após utilizarem a **Transferência de medidas** para determinar o ponto A ou o ponto A', por exemplo, os alunos construíram a circunferência com centro em O, mas não tiveram o cuidado de garantir que ela passasse efetivamente por A ou A', ou seja, não aproximaram o mouse dos pontos em questão até que aparecesse a informação "passando por este ponto".

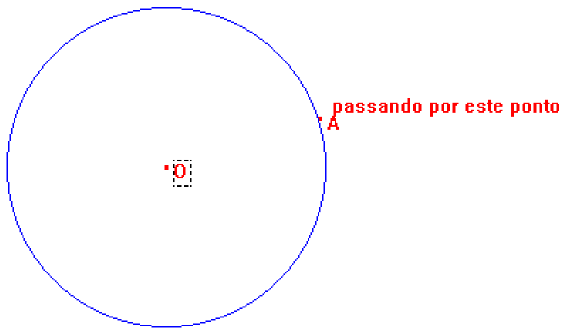
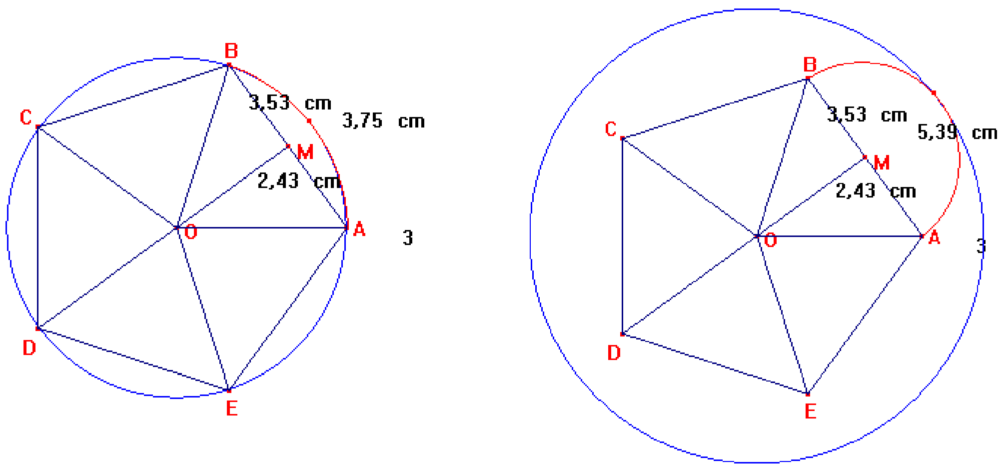


Figura 41 – Procedimento correto para construção da circunferência

Desta forma, as circunferências construídas passaram aparentemente pelos pontos A ou A', o que fez com seus raios não tivessem a medida determinada pela transferência, podendo, portanto ser alterados em função do movimento conferido à construção.



Construção original Construção após a movimentação da circunferência.

Figura 42 – Representação de construção da categoria B

Já na categoria C estão aqueles alunos que fizeram as construções corretamente, mediram os arcos também de maneira correta, mas no momento de registrarem as respostas na folha do roteiro, se enganaram e copiaram as medidas referentes a outros objetos.

Em alguns casos, as medidas ficavam muito próximas umas das outras, dificultando, num primeiro momento, o reconhecimento dos objetos a que cada uma se referia.

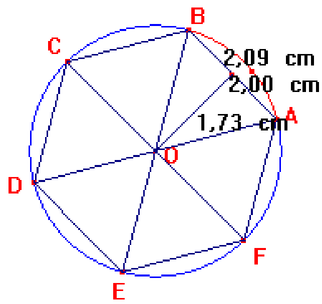


Figura 43 – Construção correta, com indicação muito próxima das medidas

Na categoria D temos o estudante que determinou uma resposta incorreta porque, em vez de medir o arco todo, mediu a distância do ponto A ao ponto marcado entre A e B no momento da construção do arco AB.

Os cinco participantes que integram a categoria E não responderam, ou porque se esqueceram de registrar a resposta, ou porque não concluíram a atividade.

A segunda pergunta constante neste item 19 relacionava-se ao que acontecia com a medida da base do triângulo desenhado no interior do polígono quando o número de lados deste objeto aumentava. Ao final de todas as questões do roteiro havia uma linha para que os alunos registrassem suas respostas, mas esta foi a única que não dispunha desse espaço; dessa forma, vários estudantes, ou não a identificaram como uma pergunta, ou pensaram não haver necessidade de registrar suas respostas.

As respostas dadas pelos estudantes são apresentadas no quadro 28.

RESPOSTA	FREQÜÊNCIA
A – Diminui.	38
B – Aproxima-se da circunferência.	3
C – Aumenta.	2
D – Não respondeu.	30

Quadro 28 – Distribuição das respostas à segunda pergunta do item 19

Pode-se observar pelo quadro acima que, conforme já dito, praticamente metade dos participantes não responderam à pergunta. Em contrapartida, dentre os alunos que responderam, a maioria escreveu corretamente que a medida da base dos triângulos diminui quando o número de lados do polígono aumenta.

A resposta que representa a categoria B de certa forma está correta. Ao lermos a frase escrita pelos três estudantes é possível subentender que a base do triângulo se aproxima da circunferência quando a sua medida diminui, o que é correto. O único senão é que a pergunta foi feita em relação à medida da base do triângulo e não exatamente à base do triângulo.

As respostas dadas para a terceira pergunta feita neste item foram agrupadas nas categorias apresentadas no quadro 29.

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Fez referência ao número de lados do polígono ou ao número de triângulos.	17
B – Respondeu que a medida de cada base está se aproximando da medida dos arcos.	25
C – Usou argumentos não adequados ao contexto da pergunta.	17
D – Usou argumentos incorretos.	6
E – Não respondeu.	8

Quadro 29 – Distribuição das respostas à terceira pergunta do item 19

Na categoria A, foram reunidas as respostas que fazem referência ao fato de que, quanto maior o número de lados do polígono, mais as medidas da base do triângulo e do arco se aproximam. Seguem alguns exemplos de resposta: “As medidas estão se aproximando. Quanto mais lados o polígono tiver, mais os lados se aproximarão do arco” e “Quando temos mais triângulos na circunferência a medida do arco vai se aproximando da medida da base do triângulo”.

A categoria B é composta de respostas que expressam o fato de que a medida de cada base está se aproximando da medida dos arcos, mas sem fazer relação alguma com o número de lados do polígono inscrito na circunferência. São alguns exemplos para este caso: “As medidas estão se aproximando” e “Que a medida diminui pelo fato delas estarem se aproximando”

Já na categoria C, estão as respostas que apresentam argumentos não condizentes ao contexto da pergunta como, por exemplo:” As medidas são por volta de 2 e 2,30”.

Na categoria D temos seis respostas que apresentam argumentos incorretos, em que são feitas afirmações como, por exemplo: “As medidas aumentam”.

*20) Repete os procedimentos do item 3 ao item 9 para construíres uma nova circunferência, cujo raio será o mesmo das duas construídas anteriormente, e divide-a em **12 partes**. Neste caso, cada arco da circunferência corresponderá a quantos graus?*

Utiliza outras letras para nomear os pontos criados nessa construção.

Sessenta e seis alunos responderam que a medida é de 30°, dois consideraram que é de 25° e cinco não responderam.

Os dois estudantes que responderam que os arcos corresponderiam a ângulos de 25°, utilizaram corretamente um ângulo de 30° para fazer a rotação dos pontos sobre a circunferência. Como estes alunos não registraram nas folhas do roteiro os cálculos que realizaram para determinarem a medida do ângulo, não houve como analisar o porquê de terem respondido “25°”.

21) Constrói o polígono inscrito na circunferência cujos vértices são os 12 pontos marcados sobre ela. Em seguida constrói, novamente, um triângulo unindo o centro da circunferência e dois vértices consecutivos do polígono.

*22) Marca o ponto médio da base desse triângulo e utilizando a opção **segmento** constrói a altura que liga o centro da circunferência ao ponto médio.*

Constrói também, sobre a circunferência, o arco que une os vértices desse triângulo.

23) Mede o arco, a base e a altura do triângulo.

24) Agora que a circunferência foi dividida em 12 partes, compara a medida da altura do triângulo com a medida do raio da circunferência. Escreve o que notaste.

As respostas dadas para esta questão foram agrupadas em categorias e são apresentadas no quadro 30.

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Fez referência ao número de lados do polígono ou às divisões da circunferência.	5
B – Respondeu que as medidas da altura e do raio são próximas.	40
C – Respondeu que as medidas são iguais.	12
D – Escreveu as medidas do raio e da altura.	6
E - Não estabeleceu uma relação entre as duas medidas.	2
F - Respondeu de forma incorreta.	4
G – Não respondeu.	4

Quadro 30 – Distribuição das respostas do item 24

Na categoria A, foram reunidas as respostas dos cinco alunos que afirmaram que, quanto maior o número de lados do polígono ou quanto maior o número de divisões da circunferência, maior é a medida da altura e mais ela se aproxima da medida do raio. Seguem alguns exemplos de resposta: “Quanto mais lados o polígono, maior é a altura” e “Quanto mais divisões tem a circunferência, mais se aproxima um do outro”.

Da categoria B, fazem parte as 40 respostas que expressam que as medidas da altura e do raio são bastante próximas, ou seja, que a diferença entre estas medidas diminuiu. Este resultado é bastante expressivo, visto que mais da metade dos estudantes conseguiu estabelecer uma comparação entre as medidas, conforme solicitado. São alguns exemplos desta categoria: “Eu notei que as duas medidas ficaram muito próximas”, “A altura se aproxima da medida do raio” e “A diferença entre a altura e a medida do raio diminui”.

A categoria C é composta por 12 respostas que revelam serem iguais as medidas do raio e da altura. Na verdade, mesmo no caso em que as circunferências foram construídas com o raio medindo 1,56 cm, as duas medidas em questão ficaram muito próximas, mas não iguais. Desta forma, é possível que estes estudantes tenham considerado que, por serem valores bastante próximos, poderiam considerá-los iguais.

Da categoria D fazem parte os alunos cujas respostas informaram apenas os valores encontrados para a medida do raio e da altura, sem que fosse estabelecido qualquer tipo de relação entre elas.

As informações contidas nas respostas da categoria E fazem referência apenas à altura do triângulo, sem a apresentação completa da relação entre as medidas, como, por exemplo: “A medida da altura é maior”.

Na categoria F, foram reunidas as respostas que apresentam afirmações incorretas como, por exemplo, “As medidas diminuíram bastante”. Na verdade a medida da altura aumentou, tendo diminuído a diferença entre a medida desta e do raio.

Quatro estudantes não responderam a questão.

25) Compara a medida da base do triângulo com a medida do arco: o que podes observar?

Seguem agrupadas em categorias as respostas dadas pelos estudantes para esta questão.

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Fez referência ao número de lados do polígono ou às divisões da circunferência.	2
B – Respondeu que as medidas da base do triângulo e do arco são próximas.	59
C – Respondeu que as medidas são iguais.	3
D – Não estabeleceu uma relação entre as duas medidas.	3
E - Não respondeu.	6

Quadro 31 – Distribuição das respostas do item 25

As categorias estabelecidas para a análise das respostas desta questão são semelhantes às utilizadas no item anterior. Considerando, então, que na questão 24 já foi feito um detalhamento do que cada uma delas expressa, restrinjo-me a apresentar algumas respostas como exemplo para cada uma das categorias de A a D.

Categoria A: “Quanto mais é dividido, mais eles se aproximam”.

Categoria B: “A medida da base e do arco estão cada vez mais próximas” e “Cada vez mais as medidas se aproximam”.

Categoria C: “São iguais”.

Categoria D: “A medida do arco é maior”.

26) Imagina agora que a circunferência fosse dividida em um número muito grande de partes, de modo que o polígono inscrito nela tivesse muitos lados.

Considera também um triângulo construído no interior desse polígono da mesma forma que os anteriores, bem como um arco que unisse os vértices da base desse triângulo, também como nos casos anteriores.

O que tu poderias dizer sobre a medida da base desse triângulo em comparação com a medida do arco?

E sobre a medida da altura desse triângulo em comparação com o raio da circunferência, o que poderias concluir?

Podemos afirmar que a soma das áreas dos triângulos construídos no interior desse polígono de muitos lados é a medida da área desse polígono?

E se aumentássemos infinitamente o número de lados do polígono, a sua área seria igual à área de qual figura? Por quê?

Este item do roteiro é composto por quatro perguntas, cujas respostas dadas pelos alunos são apresentadas abaixo.

Para análise da primeira questão também foram utilizadas algumas das categorias apresentadas nos itens 24 e 25.

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Respondeu que as medidas da base do triângulo e do arco são próximas.	39
B – Respondeu que as medidas são iguais.	19
C – Os argumentos não estão claros.	7
D - Não respondeu.	8

Quadro 32 – Distribuição das respostas da primeira pergunta do item 26

Seguem algumas respostas que exemplificam as categorias destacadas no quadro acima:

Categoria A: “Elas seriam muito próximas e quase iguais” e “Continuariam sendo quase iguais”.

Categoria B: “Seria a mesma medida” e “Elas seriam iguais”.

A categoria C não foi citada nas duas questões anteriores e se caracteriza por reunir as respostas que apresentam argumentos inadequados. Segue um exemplo de resposta desta categoria: “Vai ficar unidade da circunferência”.

Oito estudantes não responderam a questão.

Na análise da segunda pergunta foram utilizadas as seguintes categorias apresentadas no quadro 33.

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Fez referência ao número de lados do polígono ou às divisões da circunferência.	4
B – Respondeu que as medidas da altura e do raio são próximas.	29
C – Respondeu que as medidas são iguais.	21
D – Usou argumentos não adequados ao contexto da pergunta.	7
E - Não respondeu.	11

Quadro 33 – Distribuição das respostas da segunda pergunta do item 26

Seguem alguns exemplos de respostas:

Categoria A: “Que quanto mais lados, mais próxima fica a medida de uma para a outra”.

Categoria B: “Cada vez mais a altura se aproxima do raio” e “Praticamente iguais”.

Categoria C: “Irão ser iguais”.

Categoria D: “Que o raio só vai até a circunferência”.

Onze participantes não responderam esta pergunta.

O terceiro questionamento feito nesta questão foi o seguinte: *Podemos afirmar que a soma das áreas dos triângulos construídos no interior desse polígono de muitos lados é a medida da área desse polígono?*

Novamente as respostas foram agrupadas por semelhança e distribuídas em categorias apresentadas no quadro 34.

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Sim.	59
B – Aproximadamente.	5
C – Não respondeu.	9

Quadro 34 – Distribuição das respostas da terceira pergunta do item 26

O número elevado de alunos que respondeu “Sim”, revela que a maioria desses estudantes assimilou bem a idéia de composição de áreas nessa atividade, ou seja, a idéia de que é possível determinar a área de uma figura por meio da composição de outros objetos geométricos.

Para a última questão proposta neste item, houve 49 respostas corretas, 14 incoerentes e 10 alunos não responderam.

As respostas corretas expressavam que, se aumentássemos infinitamente o número de lados do polígono, a sua área seria igual à área do círculo. Seguem alguns exemplos: “Do círculo, os triângulos extremamente finos seriam como vários raios que preenchem o círculo”, “Do círculo, porque a base do triângulo vai ficando cada vez mais perto do círculo” e “Círculo, pois com tantos lados se tornaria redondo”.

Das respostas que não apresentam coerência com a pergunta feita, são exemplos: “Sim, porque a medida da circunferência seria a mesma, e assim seria sempre igual o polígono”, “Não, porque quanto menor o polígono, mais parece com a base, por isso quanto maior o polígono, menor será aproximado da área” e “Sim, porque as medidas mudariam proporcionalmente”.

27) A partir de todas essas idéias apresentadas acima, vamos deduzir então a fórmula da área de um círculo.

Qual é a fórmula da área de um triângulo?

Qual é a fórmula do comprimento de uma circunferência?

*Se aumentássemos infinitamente o número de lados do polígono inscrito na circunferência (vamos chamar o número de lados de **n**), qual seria a medida da base de cada triângulo construído no seu interior, em relação ao comprimento da circunferência?*

E qual seria a medida da altura de cada triângulo?

Como poderíamos, então, expressar a área de cada triângulo?

Utilizando a fórmula da área do triângulo determinada acima, calcula a área do polígono inscrito na circunferência.

Faz os cálculos abaixo.

Sendo assim, qual seria a fórmula da área do círculo?

Esta questão é composta de seis perguntas, cujas respostas dadas pelos estudantes são apresentadas, separadamente, a seguir.

O primeiro questionamento feito foi: *Qual é a fórmula da área de um triângulo?* Sessenta e três estudantes expressaram a fórmula correta, três expressaram incorretamente e sete não responderam.

Os 63 estudantes que expressaram corretamente a fórmula da área de um triângulo, na maioria dos casos, escreveram a fórmula das seguintes maneiras: $\frac{b \text{ x } a}{2}$ e $\frac{b \text{ x } h}{2}$.

No primeiro caso, a letra “a” representa altura do triângulo e, no segundo caso, esse elemento é representado pela letra h. Este segundo tipo de apresentação da fórmula é o mais freqüentemente encontrado nos livros didáticos.

Dos três alunos que não apresentaram a fórmula correta, um deles escreveu “B.A+2” e os outros dois escreveram “C:d = π”.

A segunda pergunta feita na questão foi: *Qual é a fórmula do comprimento de uma circunferência?*

Sessenta e três alunos apresentaram a fórmula correta, ou seja, escreveram que o comprimento de uma circunferência é determinado por C = 2.π. r.

Um destes alunos escreveu “d = c/π” e sua resposta foi considerada correta, embora ele não tenha isolado o termo *c*, comprimento da circunferência.

Apenas um estudante respondeu incorretamente, escrevendo que o comprimento de uma circunferência é “a soma de todos os lados”.

Nove alunos não responderam à questão.

O terceiro questionamento feito neste item 27 foi: *Se aumentássemos infinitamente o número de lados do polígono inscrito na circunferência (vamos chamar o número de lados de* ***n****), qual seria a medida da base de cada triângulo construído no seu interior, em relação ao comprimento da circunferência?*

Cinqüenta e sete estudantes responderam corretamente, seis responderam de forma incorreta e dez não responderam. Os 57 alunos cujas respostas estão corretas expressaram que a medida da base de cada um dos triângulos em questão pode ser expressa em função do comprimento da circunferência por $\frac{2\pi r}{n}$.

Já os seis participantes que responderam incorretamente apresentaram expressões tais como $2\pi r$ e $\frac{2\pi r}{2}$ ou a afirmativa “Seriam iguais”.

O quarto questionamento feito foi: *E qual seria a medida da altura de cada triângulo?*

Cinqüenta e nove participantes responderam corretamente que a medida da altura de cada triângulo, no contexto da questão, seria representada pela medida do raio. Cinco estudantes apresentaram respostas incorretas, escrevendo valores numéricos ou então “Seriam iguais”. Nove participantes não responderam o questionamento.

A penúltima pergunta feita neste item foi: *Como poderíamos, então, expressar a área de cada triângulo?*

Segue, no quadro 35, a distribuição das respostas segundo as categorias.

CATEGORIA	FREQÜÊNCIA
A – Expressou a área do triângulo em função dos elementos da circunferência.	46
B – Expressou a área do triângulo em função dos elementos da circunferência, mas de forma incompleta.	5
C – Expressou a área do triângulo em função dos elementos da circunferência, de forma incorreta.	4
D - Não expressou a área do triângulo em função dos elementos da circunferência.	7
E - Não respondeu.	11

Quadro 35 – Distribuição das respostas da quinta pergunta do item 27

Os 46 estudantes que representam a categoria A conseguiram expressar a área do triângulo em função dos elementos da circunferência de forma correta. Seguem dois exemplos dos cálculos realizados por estes alunos até a determinação da resposta final.

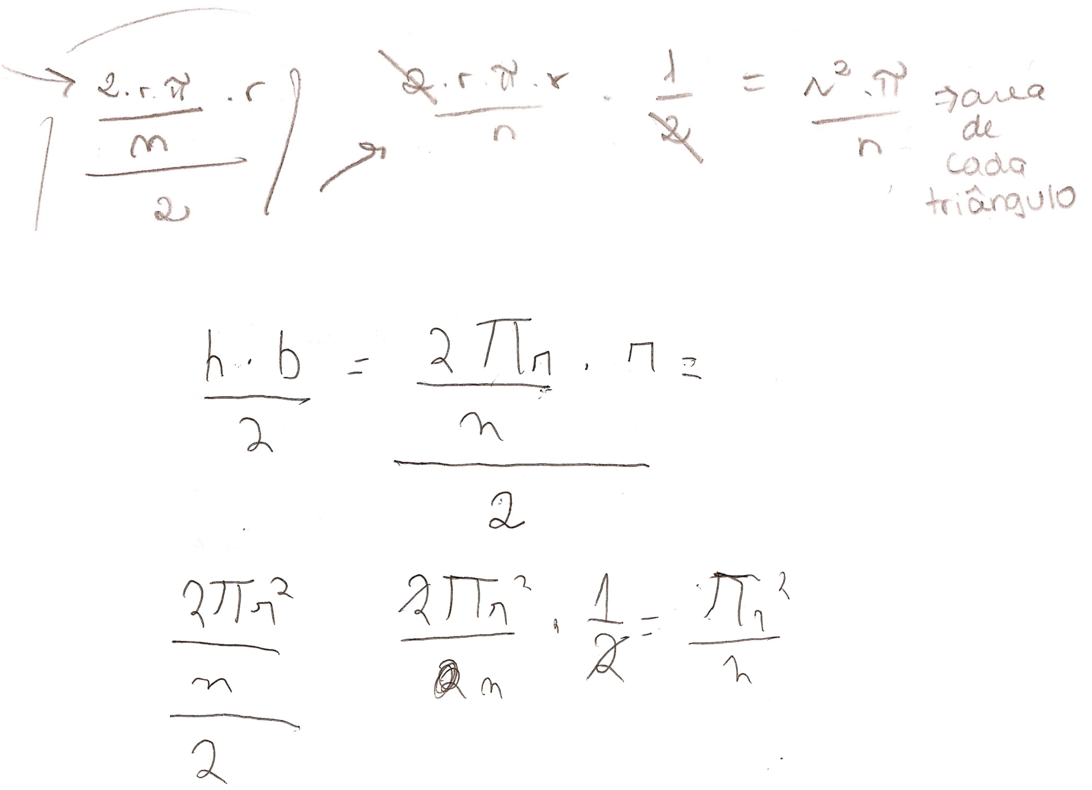


Figura 44 – Cálculos para determinação da resposta da quarta pergunta do item 27

Na categoria B, temos 5 participantes que utilizaram os elementos da circunferência para determinar a área do triângulo, porém o fizeram de forma incompleta como, por exemplo, o estudante que escreveu $\frac{2\pi r}{n} \times r$ como sendo a resposta final. Neste caso, faltou dividir este resultado por dois.

Já na categoria C, foram agrupados os casos em que os alunos não utilizaram os elementos da circunferência de forma correta para determinação da área do triângulo. São alguns exemplos de resposta: $\frac{r \times r}{2}$ e $\frac{r\pi}{2}$.

Na categoria D, foram agrupadas as respostas dos alunos que não determinaram a fórmula da área de cada um dos triângulos em função dos elementos da circunferência. Estes participantes escreveram a fórmula usual para determinação da área do triângulo, ou seja, $\frac{b \times h}{2}$.

A última solicitação e pergunta feitas neste item 27 foram: *Utilizando a fórmula da área do triângulo determinada acima, calcula a área do polígono inscrito na circunferência.*

Faz os cálculos abaixo.

Sendo assim, qual seria a fórmula da área do círculo?

Cinqüenta e quatro alunos realizaram os cálculos corretamente, até a determinação da fórmula. Cinco não determinaram a fórmula e 14 não responderam.

Os 54 estudantes que realizaram cálculos corretos, utilizaram a expressão que representava a área de cada um dos n triângulos, determinada anteriormente, e multiplicaram-na pelos *n* triângulos que comporiam o polígono de *n* lados.

Como os alunos já haviam concluído que, se aumentássemos infinitamente o número de lados do polígono, a sua área seria igual à área do círculo, bastou uma simplificação nos cálculos para que eles determinassem, por fim, a fórmula da área de um círculo.

A figura a seguir ilustra a simplificação feita por um dos participantes.

Figura 45 – Simplificação feita para determinação da fórmula da área do círculo

Os estudantes que não conseguiram determinar a fórmula da área do círculo trabalharam com valores numéricos, ao invés de fazê-lo em linguagem algébrica.

6 ENTREVISTAS

Apresento, a seguir, entrevistas realizadas com as professoras de Matemática das 7ª e 8ª séries do colégio no qual esta pesquisa foi realizada, respectivamente denominadas “Professora A” e “Professora B”.

A professora A trabalha no colégio há seis anos, já tendo lecionado para todas as séries do Ensino Fundamental II. Trabalha com a 7ª desde 2005, sendo atualmente a única série da qual é docente.

Já a professora B atua no colégio há 13 anos e já lecionou para a 5ª, 6ª e 8ª do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio. É docente da 8ª série desde 2002, sendo esta a única série com a qual trabalha atualmente.

Seguem abaixo as perguntas feitas às professoras e os diálogos estabelecidos entre nós, intercalados com comentários sobre cada pergunta.

1) Qual a tua opinião sobre o trabalho realizado no laboratório de Matemática usando computadores, de maneira geral?

Professora A: *Eu acho fundamental para a aprendizagem do aluno, porque o aluno sai daquele espaço formal de sala de aula e pode ver a Matemática sob um outro aspecto, com uma outra visão, uma Matemática mais aplicada. Então eu acho que o laboratório nas atividades de Matemática é importantíssimo.*

Professora B*: Eu acho que é bem interessante o trabalho, porque eu tenho o retorno dos alunos por mais que eles não gostem num primeiro momento...*

Pesquisadora*: É, eles têm uma certa resistência...*

Professora B*: É, eles têm uma certa resistência porque as coisas não são prontas, eles estão muito acostumados com os softwares em que as coisas são imediatas, dão o comando e aparece a resposta, mas no Cabri não, porque às vezes dá tudo errado, ele construiu errado e aí depende da Matemática para fazer a construção. E eu acho que aí é que está o ganho, justamente porque ele precisa ter conceitos matemáticos para construir o que se pede, na figura ou o que for. Então, ele precisa desses conceitos para construir e aí é que está o ganho, independente do fato deles gostarem ou não. Porque isso aí demanda trabalho e eles têm que pensar muito e nesse momento eles estão trabalhando...*

Pesquisadora*: É...tem que parar pra pensar muito...*

Professora B: *Exatamente... "Como é que vou fazer?". Mas depois assim, até em relação à última atividade quando eles construíram o primeiro polígono foi difícil, mas já no segundo, já no último eles não dependiam mais da gente. E aquela preguiça de ler o roteiro, de começar e depois eles pegam o jeito, se tu for ver é exatamente o que fez no outro, só que com mais lados. Aí a coisa flui...*

Ambas as professoras consideram que o trabalho realizado no laboratório de Matemática é válido e permite que o aluno construa as figuras com base nos conceitos matemáticos. Zulatto (2002), ao investigar as características de professores que utilizam softwares de Geometria Dinâmica, entrevistou 15 docentes e relatou opiniões semelhantes às das participantes desta pesquisa. Uma das entrevistadas de Zulatto (2002) considera que a maior vantagem dos softwares de Geometria Dinâmica é "a possibilidade que os alunos têm de criar, de fazer deduções, de chegar aos conceitos, de visualizar as propriedades, o que só é possível porque este tipo de software não ´está pronto`, não é ´fechado`." (p. 57).

2) Para a realização, por completo, de algumas atividades que propus com o Cabri, foi necessário mais de um período de aula. O fato de ter que disponibilizar mais de um período para as atividades de Laboratório alterou o teu planejamento? Em quê?

Professora A: *Não, não atrapalhou. Eu acho que a maior dificuldade que eles têm é com as ferramentas do Cabri, não é...? No momento em que eles conhecem as ferramentas,...daí fica mais fácil. Eu acho que a dificuldade maior está, justamente, no aluno conhecer as ferramentas. Depois que ele conhece, daí é tranqüilo.*
Pesquisadora: *Sim, e para eles foi um primeiro contato, eles nunca tinham visto...*
Professora A: *Foi um primeiro contato, eles nunca tinham trabalhado com o Cabri. Então naquele primeiro roteiro de atividades que tu fizeste para o conhecimento das ferramentas, foi bom, demorou um pouquinho mais, mas sem aquilo também dificultaria a realização da tarefa.*
Pesquisadora: *Sim, eles não iriam conseguir fazer a atividade...*
Professora A: *Não iriam conseguir....*
Pesquisadora: *Mas em termos de andamento do conteúdo, das tuas aulas, nisso não interferiu?*

Professora A*: Não, não, isso não interfere. Não interferiu em nada, muito pelo contrário, pois era um conteúdo que já estava trabalhando, então a aula prática no laboratório só contribuiu para que eles percebessem as coisas que a gente tinha visto em sala de aula.*

Professora B*: Não, por que na realidade os que foram para a informática foram grupos...não foi toda a turma. Então eu mantive e eles não tiveram o menor problema de descer [para o laboratório]. E eles tinham uma atividade para fazer comigo, então alguns tiveram que fazer em casa isso, precisaram de mais tempo, mas para mim não teve problema.Quem dera eu tivesse essa possibilidade enquanto professora, de ter dois grupos fazendo coisas diferentes.*
Pesquisadora*: É isso demanda tempo...*
Professora B*: É, e demanda ter outras pessoas para ajudar, mas para mim, quanto ao planejamento, não teve problema nenhum.*

Vê-se, então, que as professoras não consideram uma “intromissão” nas suas aulas a realização das atividades no Laboratório. Efetivamente, tendo sido planejados de acordo com os conteúdos que estavam sendo explorados em aula, o trabalho no Laboratório contribuiu para uma melhor aprendizagem.

3) Qual a diferença que tu observas entre os laboratórios com o Cabri realizados em anos anteriores e os que eu propus neste ano?

Professora A*: Eu acho que os roteiros de agora têm um cuidado maior em função da apresentação, para o aluno, das ferramentas do Cabri e as atividades mais trabalhadas, mais cuidadosas vamos dizer assim. Então eu acho que é importante, houve um aperfeiçoamento nas atividades.*
Pesquisadora*: O que seria esse “cuidadoso” para ti?*
Professora A*: Seria assim, situar o aluno, o que é que o aluno vai trabalhar. Bom, vai trabalhar triângulos e quadriláteros, então fazer aquela introdução de triângulos e quadriláteros para que o aluno consiga se situar no assunto e então depois desenvolver a atividade no laboratório. Eu acho importante isso. Não é chegar lá e: “Tá aqui a atividade! É isso aqui!” Tipo assim, cai de pára-quedas a atividade. Não!*

Tem que ter uma introdução para o aluno retomar aquele conteúdo e depois partir para a prática.

Professora B*: Eu acho assim, que foi mais detalhado e se preocupou mais com o rigor da Matemática... Preocupou-se mais com uma construção e mais rigorosa. Não sei se porque em outros anos nós estávamos começando com o Cabri, então não se construía, não se detinha tanto no rigor matemático, na construção de um método. E não era tão detalhado, eu acho que o roteiro agora está bem detalhado, todos os passos estão ali. Nas outras vezes a gente tinha que explicar oralmente e agora não, se eles realmente se dispusessem a ler tudo, eles não precisariam de auxílio.*
Pesquisadora: *Sim, e como tu vês essa diferença?*
Professora B*: Positiva!*
Pesquisadora*: E essa questão do rigor? De dar mais ênfase para essa questão?*
Professora B*: Eu acho que sim, eu acho que sim. Tem aluno que entende, que compreende esse mecanismo, essa necessidade desse rigor, de chegar a uma demonstração, ele consegue entender que a Matemática é isso, que faz parte, que ele precisa passar por isso para chegar numa fórmula e não ter que "engolir". Tem outros que não tem essa maturidade, para eles isso não registrou. "Pra quê todo esse trabalho pra só me dizer, por que tu não me disseste que era só* πr^2*". Mas enfim, como eu acho que a gente tem que privilegiar a todos, tem que passar por todos, todos os tipos de alunos, e a gente tem que procurar ajudar, que é principalmente para esses que gostam e que tendem a acionar a maturidade de um rigor matemático. Na realidade, a gente fez uma pequena demonstração.*
Pesquisadora*: Sim.*
Professora B*: Ele não se dá conta disso, da necessidade de chegar a isso. E quando eu comentava depois... eu estou muito presente com a última... "tá mas como é que vocês chegaram?". Claro que eles não sabem passo por passo como é que eles chegaram, mas eles têm a noção que eles foram construindo polígonos e cada vez ficou mais próxima a área do polígono da área do círculo. Isso ficou registrado.*
Pesquisadora*: Legal!*
Professora B*: Agora o resto, claro que isso aí...*
Pesquisadora*: ...os detalhes.*
Professora B*: É, todos os detalhes, daí não...*

Pesquisadora*: Que eram muitos...*

Professora B*: Foi difícil para eles aquela última parte de deduzir a área do triângulozinho de cada polígono.*

Pesquisadora*: Sim, tinha que trabalhar com a parte da álgebra.*

Professora B*: A álgebra, ali foi difícil, ainda mais que tinha divisão sobre divisão. Ali todos, pelo menos no grupo em que eu fiquei, todos precisaram de auxílio. Auxiliando...eles conseguiam, mas eles se atrapalharam muito nessa coisa, porque eles não estão acostumados com as divisões com divisões de frações e com todo esse algebrismo, eles não estão acostumados, então, auxiliando naquilo... Mas o mais importante é ter essa idéia: Como é que cheguei na área do círculo? Ah, eu cheguei a partir da área do polígono. Que quanto mais lados, quanto maior o número de lados do meu polígono mais perto da área. Isso é que ficou*

As professoras entrevistadas aceitaram a mudança nos roteiros, especialmente porque o detalhamento permitiu que os estudantes se dessem conta da necessidade de “chegar a uma demonstração”. Rolkouski (2002), ao trabalhar demonstrações de Geometria com o uso do Cabri, comenta que, “para o aluno, o ensino das demonstrações deve trazer mais do que a prova, deverá trazer fundamentalmente o convencimento pelo entendimento”. (p. 20). Também um dos entrevistados de Zulatto (2002) considerou que, com o uso do Cabri, “não gosta de falar ´demonstre`, prefere que os alunos criem conjecturas, testem-nas”. (p. 74),

4) Na sala de aula, como tu vês a compreensão dos conceitos geométricos? Os alunos compreendem as definições? Como eles se expressam ao responder ou perguntar questões relacionadas à Geometria?

Professora A*: É, em sala de aula quando a gente não faz um trabalho prático, eles têm um pouco de dificuldade ...*

Pesquisadora*: Porque é muito abstrato...*

Professora A*: É muito abstrato! Então, com as atividades do laboratório, eles conseguem até depois retomar e fazer uma construção mais abrangente do que eles trabalharam. Isso eu noto, quando é só em sala de aula, fica uma coisa muito abstrata e alguns têm até bastante dificuldade. No momento que eles têm em sala de aula o conteúdo desenvolvido e depois eles vão para o laboratório ter a parte* *prática, é claro que isso ajuda muito, porque aí eles conseguem olhar, visualizar. Eles estão construindo, eles estão fazendo. Então é muito mais fácil.*

Pesquisadora*: Então tu sentes que em sala de aula, esses conceitos geométricos assim "puros"...*

Professora A*: Trabalhados puramente...é difícil...*

Pesquisadora: *... até para eles se expressarem, porque eles não conseguem compreender direito...*

Professora A*: Exatamente!*

Professora B*: É, eles têm dificuldade, eles são muitos imediatistas: "Eu quero a fórmula!". Às vezes eles chegam num determinado exercício e dizem: "Qual é a fórmula que eu uso?". Agora eu estou retomando perímetro e área e tinha um exercício em que havia uma pista de corrida e eles deveriam dar a extensão da pista e vários estavam dividindo a pista e calculando a área. Então eu disse: "Mas escuta, tu estás calculando aonde? O que eu estou te pedindo?". Então eles ainda estão muito com a imagem da fórmula. Qual é a fórmula e daí eles saem aplicando. Então aí entra essa questão de nós resgatarmos o conceito.*

Pesquisadora*: É, então aí já fica clara a dificuldade que eles têm de compreender a definição.*

Professora B*: Exatamente. As definições... E nem só as definições, mas de aplicar, de ver um problema prático, quando tu não diz se é área ou perímetro, mas a partir do problema ele saber distinguir qual é o conceito que ele tem que usar. O que está sendo pedido aqui? É perímetro ou é área? Então, para cada assunto, para cada problema eles têm essa dificuldade, quando o problema está contextualizado. Mas o que eu estou pedindo? Eles já saem calculando alguma coisa...*

Pesquisadora*: Bom, tu disseste que eles são bem imediatistas, então como é que eles se expressam quando eles estão se referindo a esses conceitos de geometria? Pois esse imediatismo de certa forma se reflete.*

Professora B*: Sim, com certeza. Na realidade eu acho que eles não têm essa noção de que isso é um conceito que eles estão trabalhando, assim, toda essa questão...*

Pesquisadora*: Ainda está muito ligada à fórmula.*

Professora B*: Muito ligada à fórmula. E mesmo assim, tu procuras ir com problemas que eles tenham uma aplicação, porque eles sempre questionam: "Tá, mas aonde é* *que eu vou usar isso?". Mas aí eles dizem: "Eu não vou precisar calcular a extensão de uma pista de corrida". Então para eles, a prática, eu digo, começa a se reduzir à quatro operações, na realidade.*

Nas respostas das entrevistadas, nota-se um problema que tem sido apontado por vários professores e pesquisadores, a saber, o "imediatismo" demonstrado pelos estudantes, que preferem uma fórmula pronta para ser usada do que pensar nos diferentes caminhos para a solução. Soares e Sauer (2004) consideram que,

> No caso da aprendizagem de Matemática, uma fórmula ou algoritmo memorizado pode levar à obtenção de um resultado correto, ou até a um procedimento correto, na resolução de um problema. Mas nada revela em relação ao que o aluno desenvolveu, em termos de estruturas cognitivas ou de aquisição de novos saberes. (p. 260).

Efetivamente, tanto as professoras entrevistadas nesta pesquisa quanto eu, no trabalho com os alunos no Laboratório de Informática, vemos que a possibilidade de descobrir os conceitos por meio das construções os ajuda a superar a idéia de que em Matemática só se aplica fórmulas, de uma maneira descontextualizada.

5) Nas avaliações, tenho visto que, em geral, são propostas questões que envolvem os conceitos a partir de problemas. Com esse tipo de questão, consegues avaliar se eles compreenderam os conceitos? Tu achas válido avaliar a aprendizagem dos conceitos por meio de questões que envolvam a definição? Por quê?

Professora A: *Não, eu acho que não tem sentido nenhum.*
Pesquisadora: *Por quê?*
Professora A: *Por que tu tens que contextualizar. Então se tu vais trabalhar, por exemplo, com ângulos de um triângulo, então coloca lá que é um triângulo, por exemplo, isósceles, daí ele já tem que saber... Porque se é só pura e simplesmente ver os ângulos... não, eu acho que tem que ter um envolvimento com outras coisas para realmente saber se o aluno entendeu ou não.*
Pesquisadora: *E então tu achas que com esse tipo de avaliação que envolve os conceitos por meio de problemas, tu consegues perceber se o aluno compreendeu ou não os conceitos?*

Professora A: *Claro!*

Professora B: *Eu acho que sim, mais do que nunca, por que daí ele tem que aplicar, pois eu não estou pedindo nada de imediato. Não vai aparecer uma questão na folha, calcule área, calcule perímetro de alguma coisa. Não. Ou então, aplique Pitágoras. Ele vai ter que relacionar as coisas e agora, por exemplo, com a área e perímetro do círculo, que é o enfoque, em muitos estão aparecendo triângulos em círculos, em meia circunferência, em semi-círculos, construídos com catetos, com a hipotenusa, então eles têm que calcular..., eles têm que resgatar os conteúdos constantemente. E aí se resgatam os conceitos. E eu acho que assim, justamente a Matemática é isso, tu não podes sair pedindo calcule tal coisa, e aquele imediatismo... Fica sem sentido. Daí não tem construção, não se cria, ele não constrói conceito nenhum...*

Pesquisadora: *Sim, e aí faz sentido ele querer só a fórmula.*

Professora B: *Só a fórmula. Então ele precisa ler, entender o que está sendo pedido, saber o que ele precisa. Como eu comento com eles: "Vocês não saiam aplicando fórmula. Primeiro tem que entender. Entendam o problema.". Às vezes aquelas situações propostas, em que tem que tirar a área de um da área do outro, então o que tem que fazer primeiro? Ah, vou fazer a área dessa, depois a área dessa, depois eu vou diminuir, depois eu vou somar. Então cria a estratégia primeiro, depois começa a resolver.*

Pesquisadora: *Bem, tu já me disseste e eu vejo também nas avaliações que, em geral, não aparece esse tipo de questão mais direta ...*

Professora B: *Raramente.*

Pesquisadora: *... do tipo calcule, efetue ou descubra o valor, pois em geral, os exercícios vêm envolvidos numa situação-problema. Então, o que tu pensas sobre a validade de exercícios que expressam diretamente a definição, focados na definição como, por exemplo: "defina o que é uma reta"? Consideras válido o trabalho de geometria com esse tipo de enfoque? Por quê?*

Professora B: *Não, por que eu acho que se eu pedir, eles vão decorar. Eles vão me responder tal e qual, decorado. Eu não vejo sentido, para mim tudo tem que ser aplicado.*

Pesquisadora: *Porque é muito freqüente nós vermos o trabalho de geometria sempre desvinculado do restante da Matemática.*

Professora B*: Quando vemos... e o trabalho de geometria fica para o final, é bem desvinculado e fica uma coisa assim, o que é reta, o que é ponto, não é? Sempre aquela decoreba.*

Pesquisadora*: É, parece que Matemática é uma coisa e geometria é outra.*

Professora B*: É, e eles não vêm relação entre as coisas. Ou então, eles precisam para calcular, em determinado ponto, eles estão precisando de equação do 2° grau e eles não vêm essa ligação. E é isso que a oitava [série] mais sente, por que tem essas questões. Tudo está relacionado, tudo está relacionado.*

Pesquisadora*: Tudo está relacionado, eles vêem a geometria envolvida no restante.*

Professora B*: Exato. E eu estou aqui no final, no início do terceiro trimestre e eu estou precisando de coisas do primeiro. Eles não podem esquecer. E eles também, querem tudo como em "gavetinhas" e isso não é Matemática para mim. Agora terminou um assunto, fecha uma gaveta e puxa outra. As coisas estão ligadas.*

Coerentemente com suas observações anteriores, as professoras entrevistadas não concordam com a proposição de questões em que só é solicitada a aplicação de uma fórmula, o que a professora B chamou de "decoreba". Parece importante, então, apresentar os conteúdos por meio de aplicações, de problemas e, além disso, relacionados uns com os outros. Como apontam Cury e Sampaio (2006),

> Nossa dificuldade, como professores de Matemática, é encontrar o meio-termo entre uma atividade que desperte a curiosidade, desafie o estudante e, ao mesmo tempo, lhe permita construir um conhecimento novo ou desenvolver estratégias de resolução de problemas. Na busca de soluções, não necessariamente são exigidas fórmulas ou equações [...] (p. 3).

6) Tu levas os alunos para trabalhar com o Cabri no turno em que eles têm aula? Por quê?

Professora A*: Dificilmente.*

Pesquisadora*: Por quê?*

Professora A*: Primeiro, o conteúdo da 7ª série é super extenso, então isso já é um problema, já é um fator que diminui as minhas chances, segundo que eu tenho que ter mais uma pessoa, eu preciso de dois laboratórios pra que eu consiga dividir a turma e aí também dificulta, porque a escola inteira trabalha com os laboratórios.*

Pesquisadora*: Espaço físico é um grande problema...*

Professora A*: Espaço físico...embora a nossa escola seja privilegiada...porque não tem uma escola, em Porto Alegre, que tenha um espaço que nós temos, mas mesmo assim, eu gostaria muito de poder trabalhar muito mais no laboratório, do que eu trabalho. Mas também diminui um pouco a minha ida ao laboratório porque nós temos à tarde o Laboratório de Matemática, então a gente trabalha as atividades diferenciadas mais na parte da tarde.*

Pesquisadora: *É, a gente viu ali que, por exemplo, dificilmente uma atividade proposta no laboratório de informática consegue ser concluída em um período.*

Professora A*: Claro!*

Pesquisadora*: Por que até eles descerem, até eles se acomodarem, até a gente explicar o que é ...*

Professora A*: É a gente perde mais tempo...*

Pesquisadora*: E aí tem todo o conteúdo pra trabalhar em aula...*

Professora A*: O ideal seria o professor ter a informática dentro da sua sala, daí tu explica no quadro e o aluno já vai para o computador e faz. Isso seria maravilhoso, mas é isso que a gente tem que tentar...o tempo é um fator muito limitante nas atividades.*

Professora B*: Não.*

Pesquisadora*: O que é que te impede de levá-los para trabalhar com o Cabri no turno de aula?*

Professora B*: No turno de aula nós temos um número maior de alunos. É o número de alunos. Se tiver alguém para dividir, aí sim, em dois. Em dupla, eu não vejo sentido...*

As professoras, ao responderem que dificilmente levam seus alunos ao laboratório de Informática, apontam a falta de tempo e o grande número de alunos como fatores que dificultam o trabalho com os computadores, comentando que, se fosse possível ter outra pessoa para ajudar, talvez fosse exeqüível a tarefa. Mas a professora A faz a observação de que a escola em que atuam é privilegiada, pois tem laboratórios de informática e, como esta pesquisa atesta, tem apoio da direção para usá-los.

Isso nem sempre acontece. Oliveira (2002) acompanhou professores em formação continuada, em um projeto desenvolvido na Universidade Federal de São

Carlos, e relata as dificuldades sofridas por alguns docentes, que aprenderam a trabalhar com ferramentas computacionais no curso e não podiam usá-las em suas escolas. Uma das professoras contou que a sala de informática da escola estava fechada há dois anos e a direção não permitia o uso para não estragar os equipamentos.

7) Tu achas que o trabalho em ambientes de geometria dinâmica contribui para a aprendizagem de conceitos de geometria?
Em caso afirmativo: Como tu avalias essas contribuições?
Em caso negativo: Por quê?

Professora A*: Contribui muito! Quando eles mexem, que eles alteram, que o ângulo aumenta e diminui, aquilo ali dá um impacto pra eles! "Mas como? Ah, Claro..." Entendes... Porque eles também fazem as conclusões...Se tu falas, em sala de aula, parece que não é a mesma coisa do que eles estarem eles,... no quadro-negro...*
Pesquisadora*: Tem aquele caráter estático...*
Professora A*: É, exatamente...*
Pesquisadora*: Essa é uma das vantagens, eles poderem validar?*
Professora A*: Eles interagem! Na verdade eles interagem com o conteúdo quando eles estão trabalhando no Cabri.*

Professora B*: Com certeza, porque para ele, construir tudo com régua, compasso... até a questão do tempo, vamos começar por aí, nem dá tempo...E ali eles vêem o resultado..." construí errado, humm, meu quadrado não era quadrado. Mas por que ele não ficou?" É muito imediato, então o feedback é rápido, não é? "tá eu não construí. Por que eu não construí? Será que tem que ser retas paralelas? Eu não fiz reta perpendicular, eu não fiz 90°?". Então ali já se trabalham os conceitos e eles nem estão se dando conta. Por que no papel até ele vai olhar e vai dizer: "Mas isso aqui é um quadrado", mesmo a mão livre ele vai achar que é. Mas ali, no Cabri, não. Eu ainda brinco com eles: "se eu "bagunçar"? Eu posso bagunçar?*
Pesquisadora*: O movimento, não?A questão do movimento favorece.*
Professora B*: Favorece, e é isso, com o Cabri eles já têm a resposta na hora.*

As observações feitas pelas entrevistadas privilegiam o caráter dinâmico do trabalho com o *Cabri*, a possibilidade de tecer hipóteses sobre o que é obtido e de validar as construções. O dinamismo possibilitado pelo uso do *Cabri* é apontado também por um dos entrevistados de Zulatto (2002), que valoriza a investigação, a conclusão e o apelo ao visual. O elemento mais fascinante do software, em sua opinião, é a possibilidade do movimento, pois antes “a Geometria era estática, a aula era estática”. (p. 73).

De uma maneira geral, pelas respostas dadas pelas professoras, a experiência realizada com as turmas de 7ª e 8ª série, no laboratório de Informática, foi válida e veio ao encontro das necessidades da turma, pois facilitou a aprendizagem dos conteúdos estudados durante o período em que as atividades foram desenvolvidas. Visto que a escola na qual atuamos oferece essa possibilidade de uso do Laboratório, sob orientação de uma professora especializada (no caso, essa é minha função, atualmente), acredito que novas experiências poderão ser feitas, com outros roteiros, mas nessa sistemática que foi aprovada, de levar os alunos a descobrirem os conceitos e justificarem suas construções. Dessa forma, são desenvolvidas as capacidades de justificar logicamente as soluções, de tecer hipóteses e testá-las, de chegar às fórmulas sem recebê-las prontas.

7 ANÁLISES E CONCLUSÕES

O objetivo deste capítulo é apresentar uma reflexão sobre diversos aspectos presentes na dissertação e nas atividades realizadas, bem como sobre algumas situações vivenciadas durante o desenvolvimento desta pesquisa de mestrado.

Gostaria de começar chamando a atenção para o fato de que ensinar Matemática, segundo a opinião de muitos docentes, "[...] tem significado lidar com a fobia, ojeriza e fraco desempenho dos alunos com relação à disciplina." (BARROSO, 2001, p. 1). Não são raras as vezes que nos deparamos com alunos fazendo afirmações sobre a Matemática, no sentido de respeitá-la e, ao mesmo tempo, temê-la, de tal forma que essa disciplina se configura, na maioria das vezes, como a menos apreciada pelos estudantes. Entre vários motivos, um deles é o fato de ser seu conteúdo programático considerado muito complexo.

Fica fácil de entendermos o desenvolvimento de ansiedade, de atitudes negativas dos alunos em relação a essa matéria, se considerarmos que, muitas vezes, a Matemática é apresentada a eles segundo uma abordagem que valoriza apenas a memorização de um grande amontoado de números e letras sem significado algum.

Acredito que seria interessante que nós, professores, utilizássemos diferentes estratégias metodológicas ao longo do processo de ensino-aprendizagem, na intenção de possibilitar que um número maior de alunos fosse privilegiado quanto ao desenvolvimento de habilidades matemáticas.

Devemos considerar que os educandos são diferentes, com ritmos pessoais e formas particulares de apropriação do conhecimento e que, portanto, explorar a Matemática por meio de outras mídias que não sejam "lápis e papel" ou "quadro e giz", é mais uma possibilidade de tornar o conhecimento matemático acessível a uma quantidade maior de estudantes.

Nesta perspectiva, o computador coloca-se como um recurso à disposição do professor que, se utilizado com objetivos educacionais bem definidos, configura-se como uma ferramenta com potencial de modificar o contexto educacional. Carneiro e Passos (2007, p. 5), ao citarem Caetano e Marques (2002), afirmam que

> O contato dos alunos com o computador em situações de ensino-aprendizagem promove o desenvolvimento cognitivo e intelectual, principalmente o raciocínio lógico formal, a capacidade de pensar

> com rigor e sistematicidade, a criatividade e solução para problemas.

É por acreditar que, em particular, "A utilização do software possibilita ao aluno uma ampliação de suas possibilidades para adentrar no processo de descoberta da matemática, gerando autonomia além de maior significatividade." (ROLKOUSKI, 2002, p.146) que decidi aprimorar meus conhecimentos sobre o ensino de Matemática associado ao uso do computador.

Definida a temática desta pesquisa, realizou-se um estudo-piloto com duas turmas de 8ª série, no final do ano letivo de 2006, por considerarmos conveniente a validação dos instrumentos de coleta de dados a serem utilizados no ano seguinte.

A atividade que teve como objetivo apreender o conceito do teorema de Tales utilizando o software Cabri Géomètre II, também foi realizada por Haruna (2001) durante a coleta de dados para sua dissertação de mestrado. Quando realizou a pesquisa, este autor comentou: "[...] os estudos preliminares mostraram que os problemas relativos ao ensino-aprendizagem desse teorema estão relacionados com sua forma de expressão envolvendo os aspectos da percepção, das significações e do contexto.". (HARUNA, 2001, p. 1)

A experiência-piloto, por mim realizada, foi muito importante, pois apontou caminhos a serem seguidos na busca pelo aprimoramento dos procedimentos metodológicos.

Desde que iniciei minha prática profissional no colégio em que trabalho atualmente, sempre desenvolvi atividades em que os alunos utilizam como ferramenta o computador. Sendo assim, ao realizar essa experiência-piloto, alguns fatos ocorridos não me surpreenderam.

Primeiramente, destaco a questão do tempo. Por menor que seja a atividade, é praticamente inviável pensar na sua realização, por completo, em um único período. Quando soa o sinal para a troca de período, os alunos não se dirigem diretamente para o Laboratório de Informática, esperam pela chegada da professora na sala de aula para, acompanhados por ela, se encaminharem para o Laboratório. Com isso, já há uma demora de pelo menos 5 min no período que dura 50 min.

Além disso, os alunos levam mais de cinco minutos para se organizarem e se conscientizarem das instruções para o trabalho. Isso significa que, efetivamente, disponho de aproximadamente 40 min para apresentar a atividade, para que esta seja realizada e para fazer uma reflexão conjunta sobre as conclusões.

Dessa forma, foi necessário marcar um segundo encontro para que os participantes pudessem concluir a tarefa e, ainda assim, muitos não conseguiram finalizar.

Outro fato que sempre ocorre quando realizo atividades no Laboratório de Informática é o acesso à Internet ou ao Messenger, por parte de alguns alunos, durante a realização da tarefa proposta. Não me recordo de nenhuma aula em que isso não tenha acontecido. Minha postura diante dessas situações é de conversar com os alunos e de algumas vezes estabelecer um acordo em que, nos minutos finais da aula, se tiverem trabalhado com afinco, respeitando as regras do Laboratório e colaborando com os colegas, será permitido o acesso à Internet. Salvo algumas exceções, o acordo tem dado bons resultados.

Minha postura não é de cortar o acesso, não é proibindo que vamos educá-los. Eles têm que entender que há momentos para tudo. No começo foi difícil, mas depois raramente algum estudante acessava a Internet, visto que já sabiam das regras. E quando isto acontecia, eu me dirigia a eles com a seguinte pergunta: “Bom, eu não preciso nem falar, não é?” E prontamente eles fechavam os aplicativos e respondiam: “Eu sei ‘sora’, eu sei, já tô fechando. Era só até tu entregar o material da aula.”.

Além destas questões gerais, observei também alguns aspectos, especificamente relacionados com as atividades.

Embora a grande maioria dos alunos já tenha conhecimento sobre o funcionamento do software *Cabri Géomètre II*, muitos não se lembravam da existência de alguns recursos básicos do programa. Um exemplo disso foi o episódio que envolveu o uso do comando **Reta Paralela**, quando nenhum aluno o utilizou para construção do feixe de retas.

Confesso que num primeiro momento o fato de os alunos não se lembrarem da existência de ferramentas que já haviam explorado em atividades no ano anterior me causou certo desconforto. No entanto, as palavras de Bittencourt (1998) me permitiram outra visão sobre o que estava acontecendo:

> Da mesma forma que as máquinas de calcular em relação à aprendizagem da aritmética, o computador tem trazido um certo alívio para a memória, tornando evidente que aprender não significa dispor de uma grande quantidade de informação, mas principalmente saber o que fazer com ela. (p.6)

Ao refletir sobre as observações da autora percebi que realmente o mais importante não é que os estudantes memorizem a existência e a localização de todas as ferramentas disponíveis no programa, mas sim saber o momento em que podem explorar as propriedades de uma determinada figura geométrica em suas construções.

O professor e os próprios colegas podem auxiliá-los a lembrar dos recursos oferecidos pelo software, pois o principal é que eles consigam utilizá-los adequadamente em seu trabalho.

Outro exemplo desta situação ocorreu durante a atividade sobre a área do círculo quando alguns alunos não se lembravam da ferramenta que deveriam utilizar para transferir a medida escolhida para o raio no momento da construção da circunferência. Porém, ao me referir ao recurso, eles sabiam o que fazer ao acioná-lo.

Ao formular a primeira questão da experiência piloto, não havia pensado na possibilidade de nenhum aluno utilizar o comando **Reta Paralela** para construir o feixe de retas. Isso não causou grandes problemas no momento da realização da atividade, porém, para responderem à questão nº 5, foi necessário que todos reconstruíssem as figuras, visto que não havia nenhuma construção em que as razões variassem de forma proporcional, sob ação do movimento, para que pudéssemos, então, realizar a comparação solicitada.

Nesse instante, alguns alunos mostraram-se desmotivados por terem que repetir a construção, mas assim mesmo fizeram o solicitado. O acontecimento deste fato mostra que

> É gradativamente que os alunos vão percebendo que o “software” não faz simplesmente “desenhos”, mas faz “figuras geométricas”: são desenhos que estão na tela do computador, mas que são produzidos através da explicitação de relações geométricas. (HOFFMANN, 2000, p.2).

É aos poucos, com a realização das atividades, que os estudantes passam a perceber a importância e a necessidade de pensarem matematicamente antes e durante o processo de construção dos objetos geométricos feitos com o auxílio do programa.

Antes de responderem por escrito a última questão, fizemos uma discussão no grande grupo e, pelas respostas dos alunos, pude perceber que haviam compreendido as principais idéias envolvidas no Teorema de Tales.

Dessa forma, esse resultado inicial vai ao encontro da afirmação feita por Leyser e Brunet (2006, p.2) de que

> [...] os ambientes de geometria dinâmica, aliados a um trabalho de discussão e reflexão sobre os elementos envolvidos na construção geométrica, podem contribuir para uma melhor representação do conhecimento geométrico e para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo.

A possibilidade de dar movimento às construções permitiu aos alunos observarem as relações entre as medidas, quando sofriam alterações ou não, e, a partir disso, conseguiram fazer as generalizações que estão subjacentes ao teorema estudado.

Após a discussão, eles deveriam registrar na folha do roteiro as suas conclusões; no entanto, embora oralmente tenham expressado de forma clara suas idéias, o mesmo não foi observado diante das respostas por escrito. As conclusões foram apresentadas de forma confusa ou incompleta, de maneira que poucos alunos conseguiram escrever clara e objetivamente sobre o que aprenderam com a atividade. Tal fato pôde ser observado não apenas em relação à conclusão desta atividade.

É difícil dizer se os alunos apresentaram dificuldade ou se na verdade há uma certa resistência para expressar, por meio da escrita, os passos e estratégias utilizadas por eles, por exemplo, durante a construção de uma das três representações que possibilitavam a exploração do teorema de Tales.

Foram poucos os registros que explicitavam de forma clara como o aluno fez para reproduzir o desenho escolhido. Isso pode ser justificado pelo fato de que, quando realizam alguma atividade em que a ferramenta principal é o computador, em geral, refletem uma postura de que o registro escrito é desnecessário. Realizam a tarefa no computador, mas não se preocupam com a forma como irão registrar suas respostas no papel.

Da mesma forma, quando os alunos escrevem, parece não se preocuparem se suas palavras serão compreendidas pela outra pessoa que lerá o registro. Escrevem, muitas vezes, de forma confusa e incompleta, utilizam símbolos, códigos e abreviações e justificam que não há problema em escrever dessa forma, visto que “eles compreendem a própria escrita”.

Este foi um aspecto observado ao longo da realização de todas atividades propostas. Os estudantes sempre se mostravam muito ansiosos nos momentos em que deveriam expressar por meio da escrita uma resposta ou opinião. Eles verbalizavam que compreendiam as idéias, mas que não conseguiam escrever uma frase para explicá-las.

Diante disto, penso ser interessante que estimulemos os alunos a expressarem as fórmulas, os conceitos, as idéias matemáticas, por meio da língua materna, como uma forma de se habituarem a escrever com coerência. Com a realização da atividade *Descobrindo o Teorema de Pitágoras*, pude avaliar esta estratégia.

Baseados em toda a dinâmica da tarefa os alunos foram solicitados a escrever, primeiramente com palavras o que haviam compreendido após a manipulação das construções e observação da variação das medidas; somente depois disso é que traduziram para a linguagem algébrica a frase que expressa as idéias do teorema estudado.

Todo o processo desenvolvido fez com que os estudantes atribuíssem, de fato, um significado à expressão $a^2 = b^2 + c^2$, de tal forma que se mostraram capazes de explicá-lo por meio da escrita utilizando-se de argumentos coerentes.

A respeito do teorema de Pitágoras, Pereira (2000) comenta que

> **Naturalmente hoje tem a lembrança de Pitágoras pelo seu famoso teorema na geometria, e que leva o seu nome: Teorema de Pitágoras** (embora o referido teorema já era conhecido pelos babilônios a pelo menos 1000 anos antes) onde para um triângulo direito (reto) o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados nos outros dois lados. Deve-se notar aqui que para Pitágoras o quadrado da hipotenusa certamente não seria como um número multiplicado por si mesmo, mas como um quadrado geométrico construído no lado. Dizer que a soma de dois quadrados é igual a um terceiro quadrado queria dizer que os dois de secção retangular para cima formam um quadrado idêntico ao terceiro quadrado. (p.3. Grifo do autor).

Assim como para Pitágoras o quadrado da hipotenusa não se traduzia simplesmente como um número multiplicado por si mesmo, para os alunos também não foi essa a leitura feita do teorema. A atividade realizada permitiu aos estudantes visualizarem e compreenderem que “a” representava a medida do lado de um quadrado construído geometricamente sobre a hipotenusa do triângulo retângulo AFB e que, portanto “a^2” representava mais do que um número multiplicado por si mesmo, ou seja, representava a área deste quadrado.

Bastian e Ag Almouloud (2003) também aplicaram seqüências de atividades a alunos de 8ª série, com uso de materiais manipulativos, para descobrir o teorema de Pitágoras. Mesmo não empregando recursos computacionais, os autores concluíram que os alunos conseguiram entender o teorema, não apenas “como uma simples fórmula a memorizar, mas sim como ferramenta utilizável na resolução de inúmeros problemas de Geometria.” (p. 45); ou seja, a estes alunos também foi dada a possibilidade de atribuir um significado ao teorema durante sua aprendizagem.

Durante a realização da atividade proposta por mim, foi possível observar ainda que as inúmeras representações possibilitadas por este caderno de rascunho interativo fizeram com que o erro se configurasse como algo produtivo, capaz de revelar as estratégias dos alunos e, dessa forma, permitir a discussão de pontos e ações a serem melhoradas. Com este outro enfoque dado ao erro, é possível trabalhar com a geometria dando espaço privilegiado ao ensaio, à percepção e à intuição. (NEVES, 2005).

Os alunos visualizavam as construções dos colegas e, discutindo com estes, tentavam entender porque as suas estavam erradas ou, como eles mesmos diziam, “com algum defeito”.

A construção feita por uma aluna durante esta atividade provocou este momento de discussão entre eles. Ao conferir movimento aos objetos construídos, o seu trabalho apresentava uma configuração diferente da dos demais colegas ao seu redor. E o que mais os intrigava era o fato de que com as medidas determinadas no trabalho desta colega, era possível estabelecer corretamente a mesma relação entre as medidas encontradas nos outros trabalhos.

E assim começou a investigação. Sob o olhar dos colegas ela mediu os quatro ângulos e os quatro lados dos quadrados e tentou movimentar cada um dos vértices dos objetos para ter certeza de que não havia nenhum problema com a construção dos quadrados ou do triângulo. Naquele momento, os alunos estavam aprimorando vários conceitos geométricos sem que este fosse o objetivo principal.

Ao verificarem que os quadrados e o triângulo haviam sido construídos corretamente, compreenderam que era possível que as medidas determinadas na construção da colega pudessem, portanto, validar as idéias subjacentes ao teorema em questão. No entanto ainda não haviam entendido porque o trabalho dela se apresentava sob uma configuração muito diferente durante o movimento.

Não encontrando uma justificativa para o que estava acontecendo, os alunos me pediram uma explicação para o fato. Analisei a construção da aluna por alguns instantes e não consegui identificar o “problema” naquele momento.

Em seguida a aula terminou e solicitei aos alunos que refletissem sobre aquela situação em casa, enquanto eu também buscaria uma explicação para ela.

Ao refletir sobre o episódio descrito acima compartilho as idéias de Carneiro e Passos (2007, p.5) que, ao corroborarem com Ponte (2000), afirmam que “[...] a relação aluno-professor é profundamente alterada pelo uso das TIC, porque o professor tem que compreender profundamente o trabalho do aluno para responder as suas dúvidas e questões.”

Trabalhando com os alunos neste outro ambiente, foi possível confirmar que o professor, ao entrar numa zona de risco, irá se deparar com inúmeras situações imprevistas e, portanto, não comuns a sua prática em sala de aula (BORBA; PENTEADO, 2001). É necessário que esteja disposto a encarar o fato de que muitas perguntas não serão passíveis de serem respondidas no exato momento em que serão feitas. É neste sentido que compartilho com Ponte (2000) a idéia que o professor,

> Tal como o aluno, acaba por ter de estar sempre a aprender. Desse modo, aproxima-se dos seus alunos. Deixa de ser a autoridade incontestada do saber para passar a ser, muitas vezes, aquele que menos sabe (o que está longe de constituir uma modificação menor do seu papel profissional). [...] Professor e aluno passam a ser parceiros de um mesmo processo de construção do conhecimento (p. 76-77).

Outro aspecto observado durante as seções de trabalho é que muito da dificuldade dos educandos de se expressarem de forma matematicamente correta está no fato de que não se preocupam em compreender a linguagem matemática quando lêem um exercício, ou seja, eles não lêem em Matemática. Quando o estudante faz a leitura oral do enunciado de uma questão, é possível observar que, quando se depara com um símbolo ou um termo matemático desconhecido, ele simplesmente o despreza e continua a leitura como se não existisse ou não tivesse importância no contexto da atividade.

Esta situação pode ser comparada a de um aluno que escreve uma redação com muitos erros e pobre de vocabulário, fato que pode estar associado, dentre outras coisas, à falta do hábito de leitura. Desta forma, é importante que valorizemos a leitura e a compreensão do significado dos termos e definições matemáticas.

Paralelo a isso, também está a importância de trabalharmos com a compreensão das representações das figuras geométricas, pois como já afirmado anteriormente, é na confusão dos conceitos que está em grande parte a dificuldade de expressão.

A análise de alguns itens nos permitiu verificar que os estudantes têm dificuldade em compreender o significado de entes geométricos, bem como de estabelecer relações entre eles. Os alunos encontraram mais problemas para responder perguntas que envolviam a comparação de resultados, visto que elas exigiam um nível mais elevado de organização do pensamento, se comparadas a outros itens constantes nos roteiros. São exemplos de questões que exigiam esta habilidade de comparação a que deveria expressar a(s) diferença(s) entre os quadriláteros côncavos e os convexos (*Soma dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros*) e a terceira questão do item 19, na atividade sobre o teorema de Pitágoras.

No entanto, o uso do software *Cabri Géomètre II* os desafiou a revisarem suas idéias acerca das representações desses entes. Por exemplo, quando um aluno se surpreende com o "tamanho" da reta na tela, esperando que fosse menor, ele está mostrando que confunde reta com segmento. Além disso, ficou bastante claro que, para muitos alunos, qualquer linha que não seja curva é uma reta. Como o aluno que escreveu que "as retas não têm o mesmo comprimento", ao fazer referência aos lados de um triângulo.

Foi interessante observar que, para diversos estudantes, os objetos r e s se caracterizavam como configurações erradas de uma reta, apenas a construção t estava correta. E sendo assim, quando solicitados a traçarem uma reta e a movimentarem, repetiam os procedimentos até fazerem com que a construção tivesse a configuração da reta t.

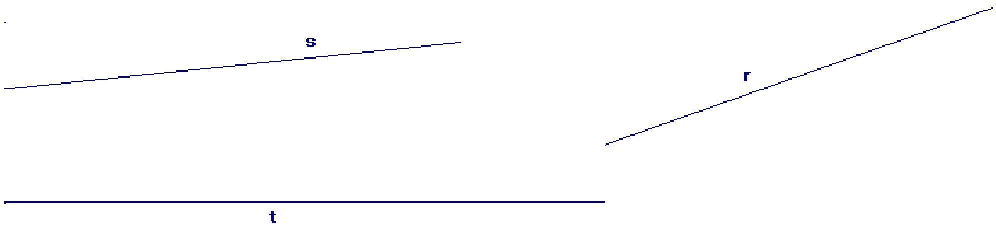


Figura 46 – Representações das retas **r**, **s** e **t**.

Sobre este assunto, Hoffmann (2000) comenta que

> [...] se, sob ação de movimento, o desenho não corresponde ao desejado duas são as possibilidades: ou o objeto foi mal construído (o que significa que propriedades que caracterizam o objeto não foram bem utilizadas) ou é a imagem visual do objeto que não é adequada (isto é, a construção foi feita corretamente, mas é a imagem mental que não está adequada ao objeto geométrico em questão). (p.2)

A possibilidade de explorar a reta, deslocando-a pela tela, pôde permitir uma reconstrução do conceito, de forma que, ao longo das aulas, já não se preocupavam mais com a posição da reta ao traçá-la. As aulas em que fizeram as construções necessárias para exploração do teorema de Pitágoras são um exemplo desta situação, visto que os estudantes, ao traçarem as retas perpendiculares, não estavam com a atenção focada na posição destes objetos individualmente, mas sim na posição relativa entre eles. O que realmente interessava, ao traçarem as duas retas, era garantir que o ângulo entre elas fosse de 90º.

Ao externar minha reflexão sobre o fato supracitado, faço minhas as palavras de Brousseau ao dizer que

> [...] o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de contradições, dificuldades, desequilíbrios [...]. Este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de novas respostas, que são a prova da aprendizagem.” (1986, p.48-49.)

Sendo assim, o dinamismo e o “feedback” oferecidos pelo software parecem propiciar aos alunos “[...] o ajuste das propriedades dos objetos com as imagens mentais que são construídas ao longo do processo de exploração.” (HOFFMANN, 2000, p.2), levando-os a validar suas construções e reorganizar o pensamento e os conceitos pré-existentes.

Com a realização das atividades propostas para coleta de dados desta pesquisa pude constatar o quão importante é possibilitarmos ao estudante o contato com diversas representações dos objetos geométricos, principalmente quando estes estão aprendendo novos conceitos.

Conforme Brandão (2002, p. 28),

> [...] um programa de GD possibilita ao aprendiz, a partir de uma única construção, efetuar um número arbitrário de testes (para procurar ou verificar uma conjectura), o que seria praticamente impossível com régua e compasso. Por isso, podemos dizer que a GD é do tipo **1 – construção, n – testes**, enquanto a geometria de "régua e compasso" é do tipo 1 – construção, 1 – teste. (Grifo do autor).

Sob este aspecto o *Cabri Géomètre II*, conforme já constatado em outras pesquisas, mostrou-se uma excelente ferramenta, possibilitando ao estudante formular conjeturas baseado na exploração e observação das características de várias representações de um mesmo ente geométrico. Dessa forma, é possível auxiliar o aluno a superar a dificuldade de reconhecer e compreender os objetos geométricos.

Segundo Gravina (2001)

> A origem dessas dificuldades reside nos desenhos prototípicos, inadequadamente tomados como a expressão do componente figural (outras possíveis expressões normalmente não consideradas) e nos quais, de fato, são procedentes as propriedades depreendidas. A dificuldade está em entender que um dado desenho nada mais é do que uma instância particular do componente figural, guardando, portanto, uma generalidade no seu aspecto figural, controlada pelo componente conceitual[3]. (p. 61)

Trabalhando no ambiente de Geometria Dinâmica, o aluno pode perceber que cada desenho é apenas um exemplar de uma classe de figuras e que, ao se incorporar a esta classe, amplia as imagens mentais associadas a uma mesma configuração. Este fato auxilia o estudante, portanto, a identificar mais facilmente

---

[3] Gravina (2001, p.60) baseia-se em Fischbein (1993) para expressar a idéia de que "O conceito tem dois componentes: *um conceitual* e outro *figural.* O componente *conceitual*, com maior ou menor grau de formalismo vazado em linguagem natural e/ou simbólica, caracteriza uma certa classe de idealizações. Já o componente *figural* é de natureza visual (forma, posição, tamanho) e se expressa através de um desenho."

uma representação geométrica em situações diferentes daquelas prototípicas apresentadas nos livros didáticos (HOFFMANN, 2000).

O caráter dinâmico do *Cabri*, que permite ao usuário conferir movimento às descrições geométricas, é um fator que provoca reações muito interessantes naqueles que exploram o programa. Os alunos da 7ª série, iniciantes no trabalho com o software *Cabri*, quando movimentaram os vértices do triângulo MEU, construído na atividade de familiarização com o ambiente, mostraram-se muito surpresos com o que viam, ou seja, o triângulo inicialmente desenhado sendo transformado em muitos outros triângulos com formatos e medidas de lados e ângulos variados, numa pequena fração de segundos. Antes de iniciarem a resolução da próxima questão ficaram por mais alguns segundos "testando" outras configurações que suas construções podiam assumir.

No entanto, este dinamismo oferecido pelo *Cabri* provocou outro tipo de reação nos alunos da 8ª série. A primeira atividade proposta para estes alunos foi fazer a reprodução de um desenho durante um período de aula, tendo como objetivo relembrar a ferramentas oferecidas pelo programa. No final da aula, mesmo não tendo concluído o desenho, os estudantes foram solicitados a movimentar as construções que haviam feito e a reação diante da ação do movimento sobre os objetos foi diferente da esboçada pelos alunos da 7ª série, ou seja, a surpresa não foi agradável.

Enquanto moviam as construções, ficando cada vez mais perplexos diante das deformações provocadas nos desenhos, verbalizavam a sensação de que todo o trabalho que haviam feito com tanto "cuidado" durante aquele período havia sido literalmente "destruído" em poucos segundos.

Questionados sobre o motivo pelo qual as deformações estavam acontecendo, muitos alunos responderam que era porque objetos geométricos estavam interligados na construção. Embora essa não fosse exatamente a razão pela qual as construções tivessem se deformado, estes participantes conseguiram perceber uma característica importante do software, ou seja, que podemos manipular elementos básicos como retas, pontos e segmentos fazendo com que ao se deslocarem na tela do computador, mantenham ligados a si os elementos construídos a partir deles (BRAVIANO; RODRIGUES, 2002), característica esta que deve ser considerada durante o trabalho se quisermos que as figuras não percam as propriedades iniciais sob ação do movimento.

Desta forma, consegui chamar atenção dos estudantes para outro aspecto muito importante também destacado por Bittencourt, ao citar Bellemain:

> [...] é possível ver os teoremas e é necessário utilizar as propriedades geométricas para que uma figura seja construída, e não somente desenhada. De fato, para que seja possível mover uma figura sem alterar as relações entre os elementos, é necessário **validá-la**, ou seja, construir todas as figuras a partir de suas propriedades geométricas, assim como definir explicitamente os objetos em uso. (1998, p.4).

Os estudantes perceberam que, por utilizarem figuras geométricas em seus desenhos, é necessário que se preocupem com as propriedades que as definem no momento em que fazem as construções, para que, ao movimentá-las, o vínculo entre os objetos seja mantido sem que as propriedades geométricas impostas à construção sejam perdidas. “Isto exige dos alunos, e de forma natural, um pensar sobre objetos geométricos no contexto de definições e teoremas.” (HOFFMANN, 2000, p.3).

No encontro seguinte, escolhi o desenho reproduzido por um dos estudantes e, utilizando uma televisão conectada ao computador, mostrei-lhes como o desenho havia ficado após a movimentação dos objetos construídos, ou seja, completamente deformado.

Em seguida, apresentei-lhes o desenho, feito por mim, que tiveram que reproduzir na aula anterior. Ao conferir-lhe movimento, os alunos ficaram muito surpresos com a possibilidade de movimentar as construções sem que estas deformassem, sem que quadrados e retângulos deixassem de sê-los.

Os estudantes mostraram-se curiosíssimos para saber de que forma as construções deveriam ser feitas no *Cabri* para que a ação do movimento não fizesse com que as propriedades das figuras fossem modificadas.

Segundo Hoffmann (2000), o movimento conferido aos desenhos propicia naturalmente um ambiente de investigação, onde as propriedades invariantes das figuras se destacam, tornando-se uma fonte de conjeturas. Foi possível ver nos alunos o desejo pela busca de uma explicação, de um entendimento da situação em questão.

Ao realizar as atividades utilizando um ambiente de Geometria Dinâmica pude explorar também o caráter experimental da Geometria que "[...] pressupõe o exercício de observar, pesquisar, testar, conjecturar." (BONGIOVANNI; JAHN, 2006, p.2). Neste sentido, o ambiente *Cabri Géomètre II* pode ser considerado um laboratório de experimentos, onde a validade, precisão, sucesso ou insucesso de uma construção é determinado por quem experimenta. (DORINI; LIOTTO, 2003)

Segundo Baldin (2006, p.2), o conceito de "Matemática Experimental[4]"

> [...] introduz um entendimento adicional ao ambiente de ensino/aprendizagem de matemática por meio de atividades experimentais, em que as características próprias dos programas computacionais educativos permitem efetuar simulações, conjeturas, comprovações, etc.

Valorizando então o trabalho com as aplicações dos teoremas estudados em situações-problema, uma das atividades propostas consistiu de uma simulação[5].

Utilizando os conhecimentos adquiridos sobre o teorema de Pitágoras, os alunos observaram, mediram e exploraram as propriedades geométricas dos objetos construídos, por meio da experimentação do modelo, para que dessa forma pudessem entender e explicar o fenômeno apresentado via simulação.

Com a realização da proposta, os estudantes conferiram uma aplicação da Matemática, por meio de uma simulação virtual. Além disso, foi possibilitada a percepção de que, com as simulações computacionais, não temos mais que enfrentar as dificuldades impostas pelas experiências reais, visto que, com este recurso, "[...] podemos multiplicar as experiências com condições iniciais diferentes, medir múltiplos dados e simular em alguns minutos fenômenos que exigiriam muito mais tempo nas condições reais." (BELLEMAIN; BELLEMAIN; GITIRANA, 2006, p.4).

---

[4] Baldin toma como referência o conceito de Matemática Experimental segundo Borwein-Bailey (2003, p.2): "o termo ' matemática experimental' significa uma metodologia de fazer matemática que inclui o uso de tecnologia para: 1) ganhar intuição e inspiração; 2) descobrir novos padrões e relações; 3) usar dispositivos gráficos para intuir propriedades matemáticas subjacentes; 4) testar conjeturas e, especialmente, invalidar as falsas; 5) explorar um resultado possível para estabelecer a necessidade de uma prova formal; 6) sugerir caminhos para uma prova formal; 7) substituir manipulações longas e complicadas por atividades baseadas em computadores; 8) confirmar analiticamente os resultados."

[5] No contexto desta dissertação, consideramos que "[...] uma simulação com o computador caracteriza-se como a criação de sistemas de representação dinâmicos de um modelo atuando como propriedades de objetos concretos ou fenômenos." (BELLEMAIN; BELLEMAIN; GITIRANA, 2006, p.4).

Carneiro e Passos (2007) afirmam que estudos realizados por Canavarro (1993) relatam que a única forma de utilizar o computador de maneira realmente inovadora é apresentá-lo como elemento de possibilidade, ou seja, para execução de tarefas que seriam difíceis de serem feitas de outra forma.

Considerando este contexto, podemos dizer que o trabalho com as simulações apresenta este caráter de possibilidade, pois com o auxílio destas é possível resolver um problema real com um ganho extraordinário de tempo. Resolver o problema do alcance da escada dos bombeiros em cada um dos andares do prédio foi muito mais fácil com o recurso da simulação do que seria se as medições tivessem que ser feitas na realidade.

Para finalizar a discussão sobre a realização destas atividades experimentais em ambientes laboratoriais de ensino-aprendizagem mediadas pelo computador, nos referimos a Baldin (2006,p. 3) que, ao citar Laborde (2003), destaca "[...] a importância das experiências que correspondem às mentais executadas com objetos abstratos, argumentando com a teoria de Vygotsky de mediação de ferramentas no processo de construção de conceitos."

A aprendizagem dos conceitos, ao longo das atividades, valorizou a percepção, a exploração e validação das representações e o desenvolvimento do raciocínio lógico, para que os estudantes atingissem o processo de generalização.

Na atividade de soma dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros, partindo de uma primeira configuração os estudantes estabeleceram a hipótese de que a soma dos ângulos internos do triângulo era 180° enquanto que nos quadriláteros esse valor correspondia a 360°. Ao movimentarem os vértices diversas vezes puderam validar as construções e visualizar diferentes representações para as figuras geométricas em questão. E, ao estabelecerem novamente a relação entre as medidas dos ângulos internos dos polígonos, confirmaram as conjeturas, determinando a propriedade a partir da generalização dos resultados.

O mesmo aconteceu nas atividades do teorema de Tales, do teorema de Pitágoras e da área do círculo, ou seja, os alunos primeiramente fizeram as construções explorando os recursos do software, depois partiram para a validação conferindo movimento aos objetos, mediram, comparam, fizeram conjeturas e verificaram as hipóteses frente às classes de figuras, para no final das atividades fazerem as abstrações e deduções necessárias à determinação das fórmulas e teoremas.

Outro aspecto importante a ser destacado é que a atividade de soma dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros permitiu aos alunos a percepção do conceito de ângulo em uma situação diferente.

Segundo Neves (2005, p. 3)

> Aprender um conceito geométrico é percebê-lo em diferentes situações e colocá-lo em ação numa situação em que se apresente, relacionando-o àqueles já internalizados pelo indivíduo. É percebê-lo em constante transformação, sendo modificado, melhorado à medida que o indivíduo de posse de suas propriedades lança-se na descoberta de outros conceitos.

No ano em que comecei a trabalhar como auxiliar de ensino no colégio onde a pesquisa foi realizada, os alunos que hoje estão na 7ª série, naquela ocasião cursavam a 4ª série do ensino Fundamental. Naquele ano, estes alunos trabalharam pela primeira vez com o conceito de ângulos, nas aulas ministradas por mim no Laboratório de Matemática. O conteúdo foi abordado utilizando-se de diversos recursos como, por exemplo, dobraduras, dinâmicas corporais explorando as coordenadas e o software Logo. No ano seguinte, o conteúdo foi novamente abordado pela professora de Matemática e os estudantes aprenderam a reconhecer e trabalhar com os ângulos, por meio de esquadros. Já na 6ª série a abordagem do assunto foi mais uma vez ampliada e os estudantes aprenderam, dentre outros aspectos, a manipular o transferidor.

Atualmente na 7ª série estes alunos novamente trabalhavam com os conteúdos relacionados ao conceito de ângulos, em sala de aula, quando então a atividade proposta no ambiente do laboratório de informática, por meio do software *Cabri* configurou-se como uma nova situação didática em que puderam explorar de forma mais dinâmica o conceito geométrico em questão.

Frente a isso, se tornam pertinentes as palavras de Neves (2005) ao afirmar que

> Cada situação, com seus instrumentos específicos, implicará uma atividade mental diferenciada e uma exigência visual e manual diferentes que juntas fornecerão os vários registros de representação do conceito “ângulo” que [...] está em constante “mutação”. (p. 4)

Outro aspecto que gostaria de destacar é que o trabalho em um ambiente de Geometria Dinâmica oportuniza ao estudante, de certa forma, a vivência de situações muito semelhantes às enfrentadas pelo matemático profissional durante o processo de descoberta e criação (Hoffmann, 2000).

A seguir, referimo-nos a tal processo por meio das palavras de Halmos (1984, apud Gravina, 2001, p. 13-14)

> O matemático em seu trabalho faz conjeturas vagas, visualiza amplas generalizações e salta para conclusões inesperadas. Ele arranja e rearranja suas idéias e se convence da sua verdade muito antes que possa escrever uma demonstração. A convicção não é imediata – e normalmente surge após muitas tentativas, muitos fracassos e muitos equívocos [...] trabalho experimental é necessário [...] experimentos de pensamento [...]

Com a realização, por exemplo, da atividade sobre a área do círculo, os estudantes aprimoraram o pensamento geométrico por meio da percepção, observação, exploração e comparação dos resultados obtidos durante a tarefa e, num processo gradativo de aprendizagem do conceito, tiveram a oportunidade de compreender o significado de deduzir uma propriedade geométrica, teorema ou fórmula matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os 3° e 4° ciclos do Ensino Fundamental também reforçam a importância de trabalharmos as deduções matemáticas com os alunos do 4º ciclo

> Apesar da forca de convencimento para os alunos que possam ter esses experimentos com material concreto ou com a mediação de um desenho, eles não se constituem provas matemáticas. Ainda que essas experiências possam ser aceitas como “provas” no terceiro ciclo, é necessário, no quarto ciclo, que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais. (BRASIL, 1998, p.127)

A dinâmica estabelecida durante a realização da atividade da área do círculo oportunizou aos alunos o aprimoramento de várias habilidades que caracterizam o pensar matemático, dentre elas a de deduzir logicamente uma fórmula.

Para chegarem ao momento de dedução da fórmula que permite o cálculo da área do círculo, os alunos visualizaram e exploraram as relações existentes entre a área de polígonos inscritos em um círculo e a área do próprio círculo, tal como fizeram os gregos, segundo as palavras de Baldin (2006, p. 5):

> A idéia de que as áreas de polígonos inscritos (ou circunscritos) a um círculo, com número suficientemente grande de lados, aproximam o cálculo da área do círculo levou os gregos a um dos problemas clássicos, chamados “grandes problemas de geometria”: a quadratura do círculo, que consiste precisamente em construir com régua-compasso um quadrado com mesma área de um círculo.

Diante de minha reflexão sobre a proposta desta atividade penso que a abordagem utilizada vai ao encontro da idéia defendida por Borba (2000, p1) e que está expressa nas palavras a seguir:

> Entendo que a as mídias informáticas possibilitam que a experimentação e a visualização atinjam um outro status na sala de aula, e dessa forma é necessário que tais modos de pensar se aliem a outros já utilizados como a dedução lógica.

Outros autores como Laborde e Mariotti (apud Baldin, 2006) destacam em suas pesquisas a utilização de recursos tecnológicos no ensino de Geometria para alunos do Ensino Fundamental como elemento estimulador da sua capacidade dedutiva.

Refletindo um pouco mais sobre os resultados obtidos com a realização das atividades *Redescobrindo o Cabri Géomètre II – Parte I*, *Redescobrindo o Cabri Géomètre II – Parte II* e *Descobrindo o Teorema de Pitágoras*, pude constatar que os conceitos geométricos abordados nestas três propostas foram aprimorados de forma gradativa, à medida que os alunos passavam a refletir mais sobre os aspectos geométricos envolvidos no processo das construções, em detrimento dos aspectos meramente visuais.

Ao construírem quadrados na primeira atividade citada, preocuparam-se apenas com que a figura tivesse, visualmente e aproximadamente, os quatro lados iguais. Na proposta seguinte, aprenderam a construir geometricamente um quadrado, ou seja, com garantia de quatro lados de fato congruentes e perpendiculares entre si. E valendo-se desses conceitos aprimorados, construíram novos quadrados na atividade do teorema de Pitágoras.

As palavras de Neves (2005) ilustram a evolução do nível de conhecimento dos alunos ao fazer referência à relação conceitos espontâneo- científicos

> Nas ações, elaboraram estratégias iniciais considerando os conceitos espontâneos dos objetos em questão, formulados em outras experiências. Durante as diversas tentativas, acompanhadas das mediações, esses conceitos foram sendo elaborados, passando

> a ocupar status de científico. Ou seja, à medida que a construção geométrica caminhava das ações espontâneas para as mais elaboradas, os conceitos em questão percorriam o mesmo caminho, indo em direção aos conceitos científicos. (p.11)

Essa mudança de postura dos alunos frente às questões geométricas pôde ser observada até mesmo em detalhes como a nomeação dos objetos.

Inicialmente os estudantes mostravam despreocupação com este formalismo, talvez por não terem maturidade suficiente para compreender que certos aspectos que para eles são desnecessários, na verdade são importantes e auxiliam na realização da tarefa.

No entanto, à medida que trabalhavam com as construções e após enfrentarem muita dificuldade, os alunos perceberam que o fato de não nomearem, por exemplo, as retas e os pontos causava-lhes grande confusão ao retornarem às orientações dos roteiros, visto que eles mesmos se atrapalhavam com os passos da construção.

Encaminhando-me para o final deste capítulo, destaco novamente a validade de se trabalhar os conteúdos de Geometria explorando as potencialidades de um software de Geometria Dinâmica, em particular do *Cabri Géomètre II*. Além de os alunos se apropriarem de novos conceitos, propriedades, teoremas e fórmulas, puderam, ao longo da realização das atividades propostas, revisar e trabalhar com vários conceitos e entes geométricos como, por exemplo, paralelismo, perpendicularismo, ponto de intersecção, ponto médio, rotação, raio de um círculo, ângulos e polígonos.

Diversas pesquisas estão sendo realizadas e tantas outras já foram concluídas com o propósito de investigarem a respeito da utilização do *Cabri* como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem de conceitos geométricos. No entanto, em muitos casos, os sujeitos envolvidos na pesquisa são ou eram docentes ou discentes de Matemática.

Posto isso, faço minhas as palavras de Neves (2005)

> Nossa pesquisa vem preencher essa lacuna, desenvolvendo pesquisa no âmbito da sala de aula, com alunos do ensino fundamental, focando a questão da aprendizagem geométrica. Pois, somente, analisando o aluno em ação, construindo e reconstruindo conceitos é que teremos condições de analisar esse software e suas

> possibilidades quanto à conjectura e à validação de conceitos geométricos. Ou seja, verificar sua função de instrumento mediador entre os alunos e o conhecimento geométrico. (p.6)

E para que eu pudesse alcançar o objetivo proposto nesta investigação, ou seja, avaliar a aprendizagem de conceitos geométricos de alunos das séries finais do Ensino Fundamental em ambiente de Geometria Dinâmica, foi necessário uma análise detalhada das produções destes estudantes.

Ao realizar um trabalho minucioso de observação, interpretação e reflexão sobre estas produções, utilizando inclusive recursos[6] do próprio *Cabri,* é que pude identificar as estratégias empregadas pelos alunos durante a realização das atividades e analisar as respostas aos questionamentos propostos.

Sintetizando, finalmente, as opiniões manifestadas pelas professoras entrevistadas, pode-se dizer que elas consideram importante o trabalho realizado pelo Laboratório de Matemática utilizando com recurso didático o computador. Além disso, mostram-se dispostas a encarar os desafios inerentes ao uso da tecnologia informática na escola.

O posicionamento das professoras corrobora a idéia defendida por (FARIAS; FARIAS, 2007) de que

> É fundamental que os professores compreendam que a utilização dos recursos tecnológicos é necessária e irreversível, no atual contexto em que seu aluno está inserido [...]. Portanto, é necessário que o aluno [...] esteja preparado para utilizar as novas informações tecnológicas de uma forma crítica para melhor compreender, interpretar e transformar a realidade. (p.8)

Segundo as entrevistadas, os alunos têm dificuldade para compreender os conceitos e definições geométricas, o que, conseqüentemente, causa dificuldade também para expressar e aplicar o que aprendem ao estudar Geometria.

---

[6] Um dos recursos utilizados para análise da produção dos alunos foi a opção "Revisar Construção", localizada no menu **Editar** da barra de ferramentas do software *Cabri Géomètre II*. Utilizo aqui as palavras de Baldin e Villagra (2002) para explicar o que ocorre ao se selecionar esta opção no programa: "Aparece um quadro no qual é possível acompanhar a construção feita, *passo a passo*, de todos os desenhos existentes na folha de trabalho e saber se um usuário (aluno ou professor) está construindo corretamente ou não. Este recurso não só repete os passos, mas também descreve a cada passo o que foi feito na construção, de forma semelhante a um roteiro que se escreve nas construções de desenho geométrico." (p. 22).

Sendo assim, elas acreditam na validade do trabalho com o *Cabri*, visto que, à medida que os estudantes constroem os objetos, eles exploram os conceitos e propriedades geométricas. Por não ser um software em que as construções já estão prontas, o aluno tem que pensar e refletir constantemente sobre suas ações, fator que as professoras consideram fundamental para a aprendizagem.

Para Hendres e Kaiber (2005) só o fato de os professores considerarem

> [...] que a utilização de tecnologias não se constitui em atividades que tornem um aluno um robô que tem apenas o ato de apertar botões já significa um avanço em relação à questão. Até bem pouco tempo, a grande maioria dos professores considerava o uso da tecnologia, especialmente calculadoras e computadores, como instrumento de alienação, que possibilitava ao aluno resolver situações sem ter que pensar. (p. 8-9)

Abordando outro aspecto da entrevista, destaco a crença de que os alunos não alcançam facilmente a idéia de que por trás da fórmula há um conceito e que, nesse sentido, as professoras consideram como positiva a mudança de alguns aspectos dos roteiros, em particular, a questão de os alunos terem que trabalhar com as deduções, fazendo com que percebam a necessidade de se demonstrar os resultados matemáticos e não aceitá-los simplesmente como fatos dados.

As professoras não consideram que o trabalho realizado com o *Cabri* tenha atrapalhado o seu planejamento, visto que as aulas realizadas no laboratório de informática foram baseadas nos conteúdos a serem abordados, em sala de aula. Profissionais como estas demonstram "[...] ousadia e flexibilidade para reorganizar as atividades na medida do necessário. Mudam as rotinas e, antes de tudo, abrem-se para um processo de negociação com [...] outros que atuam no cenário escolar." (BORBA; PENTEADO, 2002, p. 248), ou seja, não se mostram contrárias à idéia de terem inserido em seus planejamentos, atividades propostas por outros colegas. Aceitam trabalhar conjuntamente.

Na opinião de ambas, propostas em que os alunos têm que fazer uso do *Cabri* enriquecem a aprendizagem e os ajudam a superar a idéia de que a Matemática significa apenas aplicar fórmulas.

Desta forma, não consideram válido o ensino da Geometria por meio da valorização das definições e fórmulas, pois acreditam que os estudantes apenas as memorizam por um curto espaço de tempo, sem ao menos compreendê-las. Acreditam numa forma de trabalho que relacione os conteúdos entre si, por meio de aplicações e resolução de situações-problema.

Hendres e Kaiber (2005) buscaram investigar junto aos professores das escolas municipais, estaduais e particulares de Canoas as condições de utilização da informática como recurso metodológico nas aulas de Matemática, bem como os efeitos dessa utilização sobre os alunos e suas aprendizagens.

A pesquisa apontou como uma das principais dificuldades enfrentadas pelas professoras o fato de as turmas serem numerosas, ou seja, o mesmo problema apontado pelas professoras entrevistadas por mim.

Finalizando as conclusões sobre as entrevistas realizadas com as professoras de Matemática da 7ª e 8ª séries, acredito que a possibilidade de formular conjeturas e validar as construções frente ao dinamismo oferecido pelo *Cabri* foi o aspecto destacado por elas como a forte contribuição do trabalho em ambientes de Geometria Dinâmica para aprendizagem dos conceitos geométricos.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao tecer as considerações finais sobre o trabalho realizado nesta pesquisa, proponho-me a analisar e refletir sobre os obstáculos com que me deparei e as aprendizagens que enriqueceram minha experiência profissional.

Diversos questionamentos e inquietações decorrentes de minha prática docente despertaram em mim o desejo de mergulhar a fundo no processo de pesquisa, na intenção de criar novos argumentos que me conduzissem a transformar significados já conhecidos, para que assim pudesse encontrar algumas respostas.

Ao refletir sobre o "final" desta trajetória, percebo que a pesquisa é um processo em constante movimento, em constante transformação, que inicia a partir de um ou mais questionamentos, mas que em si não tem um final.

Percebo, portanto, que cada ponto de chegada é, na verdade, um ponto de partida para novas buscas, novas investigações, novas transformações, de tal forma que posso dizer que, ao trilhar o caminho da pesquisa, na verdade, não chegarei, literalmente, ao ponto final de minha caminhada, visto que esse final sempre será provisório.

O ato de pesquisar permitiu-me dialogar, fazer leituras, trocas e reflexões, possibilitando repensar criticamente minhas práticas, incentivando minhas intervenções e provocando, desta forma, transformações em meu "ser", seja no sentido psicológico, do conhecimento ou das ações.

Trabalhar com as turmas de 7ª e 8ª séries foi um grande desafio. Os alunos estão com idades entre 12 e 14 anos e vivem uma fase de mudanças significativas em suas vidas. A cada dia que passa, corpo e mente sofrem alterações, sem que eles mesmos se dêem conta.

Além disso, fazem parte de uma geração que tem pressa, que deseja que as coisas aconteçam instantaneamente. Essa característica talvez seja justificada pelo fato de viverem a adolescência, essa fase conturbada da vida, em plena era da Internet e da velocidade nas comunicações.

Dessa forma, propor aos adolescentes atividades em que tinham que se concentrar para ler, compreender o que estavam lendo, pensar e buscar respostas que não eram "instantâneas", por meio do computador, uma mídia que para eles está mais diretamente relacionada ao lazer que ao estudo, foi realmente desafiador.

Quanto aos roteiros das atividades, em muitos momentos eu detalhei bastante as orientações, os procedimentos a serem executados. Ao refletir sobre essa atitude, penso em um fator do processo de ensino- aprendizagem que acredito estar fortemente ligado a essa postura assumida muitas vezes por nós, professores: a falta de tempo.

O tempo é curto para darmos conta do extenso conteúdo dos currículos, para trabalharmos todos os assuntos que gostaríamos da forma como planejamos. E assim, em função disso, nós acabamos, muitas vezes, por apresentar aos alunos propostas mais prontas, mais esmiuçadas.

No entanto, uma de minhas aprendizagens com a realização desta pesquisa foi que, de fato, auxiliar nossos alunos a pensarem por conta própria, a serem mais autônomos cognitivamente, certamente exigirá um tempo maior de nossa dedicação, mas com certeza será um tempo muito menor do que o necessário para auxiliarmos individualmente cada aluno a pensar junto conosco.

Considerando que, no colégio em que leciono, as professoras de Matemática acreditam na importância e validade da aprendizagem de conceitos geométricos em ambientes de Geometria Dinâmica, eu continuarei a realizar atividades em que os alunos farão uso do software *Cabri Géomètre II*.

Como planos futuros, proponho-me a elaborar tarefas que, sucessivamente, contenham menos passos a serem seguidos na construção, visando mais desafia-los do que conduzi-los.

Tenho a intenção de realizar, em paralelo a atividades como as propostas nesta investigação, projetos em que os alunos possam explorar mais livremente as ferramentas e potencialidades do *Cabri*, por meio da construção de mecanismos idealizados por eles mesmos e regidos por relações geométricas estáveis sob ação do movimento.

No dia-a-dia, nos deparamos freqüentemente com mecanismos e, portanto, reproduzi-los com o programa explorando o dinamismo, a validade e estabilidade das propriedades, torna-se um desafio para os alunos. Além disso, o fato de poderem se dedicar a um projeto de interesse próprio, a uma construção escolhida por eles, é mais uma garantia de que o processo de aprendizagem da Geometria será rico em significados.

Penso também em alternar propostas individuais com propostas em duplas, para avaliar se a convivência entre os pares auxiliará no desenvolvimento da capacidade de exploração, discussão, argumentação, refutação e validação de idéias. Acredito que o diálogo e as trocas possibilitadas durante o trabalho em duplas pode favorecer a aprendizagem dos alunos.

Nas atividades em que se faz o uso repetido de uma mesma construção, proporei a utilização da ferramenta **Definir Macro**, não só como uma forma de administrar melhor o tempo, mas também de valorizar as construções feitas pelos estudantes. Ao refletir sobre as atividades propostas percebi posteriormente, por exemplo, que na aula sobre o teorema de Pitágoras, os estudantes poderiam ter utilizado o primeiro quadrado construído para definir uma macro, não havendo, com isso, a necessidade de reproduzirem novamente todos os passos da construção para construírem os outros dois quadrados.

Durante estes dois anos de investigação, enquanto buscava respostas aos questionamentos iniciais, já pude vislumbrar novos caminhos e novos planos como pesquisadora na área de Educação Matemática, associados ao uso de tecnologia informática. Esta é, assim, a expectativa para o futuro, em novos trabalhos de investigação das potencialidades dos softwares como ferramenta de auxílio à aprendizagem de conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

AMORIM, Joni de Almeida. A educação matemática, a internet e a exclusão digital no Brasil. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 10, n. 14, p. 58-65, ago. 2003.

BALDIN, Y. Y.; VILLAGRA, G. A L. **Atividades com Cabri – Géomètre II para Cursos de Licenciatura em Matemática e Professores do Ensino Fundamental e Médio**. São Carlos: EdUFSCar, 2002. 240 p.

BALDIN, Y. Y. Uma abordagem de ensino de problemas de geometria em nível básico com história e tecnologia. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 3., 2006, São Paulo. **Anais...** São Paulo: PUCSP, 2006. 1 CD-ROM.

BARROSO, Isabel Campos. Geometria dinâmica: novas perspectivas para o aprendizado da geometria. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2001, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: SBEM, 2001. 1 CD- ROM.

BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. **Espaços de Aprendizagem em Rede: novas orientações na formação de Professores de Matemática**. 2003. 406 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

BASTIAN, I. V.; AG ALMOULOUD, S. O teorema de Pitágoras: uma abordagem enfatizando o caráter necessário/suficiente. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 10, n. 14, p. 45-53, ago. 2003.

BELLEMAIN, F.; BELLEMAIN, P. M. B.; GITIRANA, V. Simulação no ensino da matemática: um exemplo com Cabri-Géomètre para abordar os conceitos de área e perímetro. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** Recife: SBEM, 2006. 1 CD-ROM.

BITTENCOURT, Jane. Informática na educação? Algumas considerações a partir de um exemplo. **Revista da Faculdade de Educação**, São Paulo, v. 24, n. 1, p. 23-26, 1998. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-25551998000100003&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 25 Ago. 2007.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BONGIOVANNI, V.; JAHN, A. P. A geometria hiperbólica na formação inicial de professores de Matemática: perspectiva histórica em um ambiente de geometria dinâmica. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 3., 2006, São Paulo. **Anais...** São Paulo: PUCSP, 2006. 1 CD-ROM.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Modelagem e informática: caminhos para a interdisciplinaridade. In: CONGRESSO SUL- BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO ÁREAS EXATAS: MATEMÁTICA - FÍSICA - QUÍMICA, 1., 2000, Florianópolis. **Anais...** Palhoça: UNISUL, 2000. 1. CD-ROM.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 104 p.

______. Pesquisas em Informática e Educação Matemática. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, p. 239-253, 2002.

BRANDÃO, Leônidas de Oliveira. Algoritmos e fractais com programas de GD. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 49, p. 27-34. 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** - 3º e 4º Ciclos. Brasília, 1998.

______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 15 out. 2007.

BRAVIANO, G.; RODRIGUES, M. H. W. L. Geometria dinâmica: uma nova geometria? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 49, p. 22-26. 2002.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthode de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BRUM, Antônio Gil Vicente de. CabriJava: Aplicação de Uma Tecnologia Promissora como Ferramenta Auxiliar no Ensino de Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2001, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: SBEM, 2001. 1 CD-ROM.

CÂMARA dos SANTOS, Marcelo. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2001, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: SBEM, 2001. 1 CD-ROM.

CARNEIRO, R. F.; PASSOS, C. L. B. Contribuições da formação inicial para a utilização das tecnologias da informação e comunicação nas aulas de Matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2007, Curitiba. **Anais...** Curitiba: UFPR, 2007. 1 CD-ROM.

CURY, H. N.; SAMPAIO, M. L. F. B. O desafio de substituir letras por números: que conteúdos e estratégias podem ser desenvolvidos? **Bolema**, v. 19, n. 26, p. 1-18, 2006.

D´AMBRÓSIO, U. Considerações sobre o ensino atual da Matemática. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 2., 1959, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: UFRGS, 1959. p. 373-378

DEMO, Pedro. **Leitores para Sempre**. Porto Alegre: Mediação, 2006. 144 p.

FARIAS, Luiz Márcio Santos; FARIAS, Virginia Lúcia Nogueira. Construção de situações de aprendizagem em Geometria plana utilizando o software Cabri-Géomètre: o deslocamento no ambiente computacional Cabri-Géomètre. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007. 1 CD-ROM.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

DORINI, F. A.; LIOTTO, S. M. O software Cabri – Géomètre II como ferramenta auxiliar para o ensino da Matemática. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 26., 2003. São José do Rio Preto. **Anais...** São José do Rio Preto: SBMAC, 2003. 1 CD-ROM.

GONÇALVES, Hortência de Abreu. **Manual de Metodologia da Pesquisa Científica**. São Paulo: AVERCAMP, 2005.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: SBC, 1996. 1 CD-ROM.

______. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 260 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, porto Alegre, 2001.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 4., 1998, Brasília. Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/artigos/artigos_index.php>. Acesso em: 15 Set. 2007.

GUIMARÃES, L. C.; BELFORT, E.; BELLEMAIN, F. Geometria: uma volta ao futuro via tecnologia? In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2003. 1 CD-ROM.

HARUNA, Nancy Cury Andraus. **Teorema de Thales:** Uma Abordagem do Processo Ensino-Aprendizagem. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

______. Rede semântica articulando os conceitos de semelhança e teorema de Thales utilizando o software Cabri Géomètre. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2001, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: SBEM, 2001. 1 CD-ROM.

HENDRES, Cláudia Assis; Kaiber, Carmen Teresa. A informática como recurso didático nas aulas de Matemática: uma visão docente. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 3., Canoas. **Anais...** Canoas: ULBRA, 2005. 1 CD-ROM.

HOFFMANN, Daniela Stevanin. Relato de experiência: a geometria e o Cabri Géomètre na licenciatura em Matemática da UFRGS. In: CONGRESSO SUL-BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO ÁREAS EXATAS: MATEMÁTICA - FÍSICA - QUÍMICA, 1., 2000, Florianópolis. **Anais...** Palhoça: UNISUL, 2000. 1. CD-ROM.

KAHANE, J. P. et al. **Rapport d´étape sur la gémométrie et son enseignement**. 2000. Disponível em : <http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane>. Acesso em: 05 nov. 2007.

LEYSER, M.; BRUNET, A. R. G.; TAVARES, R. S. O ensino de geometria frente aos recursos de geometria dinâmica. In: ENCONTRO SOBRE INVESTIGAÇÃO NA ESCOLA, 6., Rio Grande. **Anais...** Rio Grande: FURG, 2006. 1. CD-ROM.

LÜDKE, Menga; ÁNDRE, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MIGUEL, Antonio ; MIORIM, Maria Ângela. **O Ensino de Matemática no 1º Grau**. São Paulo: Atual, 1986. 179 p.

MISKULIN, R. G. S. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino-aprendizagem da Geometria**. 1999. 577 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1999.

MORAES, Roque. **Da noite ao dia**: tomada de consciência de pressupostos assumidos dentro das pesquisas sociais. Disponível em: <http://br.groups.yahoo.com> Acesso em: 29 abr. 2006. (a)

______. **Teoria e pesquisa**. Disponível em: <http://br.groups.yahoo.com> Acesso em: 20 maio 2006. (b)

NEVES, Regina da Silva Pina. A formação de conceitos geométricos no contexto dos projetos de trabalho mediada pelo Cabri Géomètre. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., Porto. **Anais...** Porto, Portugal: Faculdade de Ciências, 2005. 1. CD-ROM.

NUNES, Marcus Alexandre; GRAVINA, Maria Alice. Geometria Dinâmica e a lei dos cossenos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 52, p. 33-39, 2003.

OLIVEIRA, Andréia M. P. de. **A percepção dos professores de matemática acerca da contribuição das atividades de formação continuada para sua prática**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

PAPERT, Seymour. **Logo**: Computadores e educação. São Paulo: Brasiliense, 1988.

______. **A Máquina das Crianças**: repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PAPY, G. **Mathématique moderne**: voici Euclide. Bruxelles: Didier, 1976 (a). v. 3.

PAPY, G. **Mathématique moderne**: geometrie plane. Bruxelles: Didier, 1976 (b). v. 6.

PATTON, Michael Q. **Qualitative evaluation methods**. 7. ed. Beverly Hills: Sage, 1986.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causa e conseqüências. **Zetetiké**, v. 1, n.1, p. 7-17, 1993.

PENTEADO, M. G. Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 297-313.

PEREIRA, Luiz Henrique Ferraz. História da Matemática em CD-ROM: a escola pitagórica e o teorema de Pitágoras. In: CONGRESSO SUL- BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO ÁREAS EXATAS: MATEMÁTICA - FÍSICA - QUÍMICA, 1., 2000, Florianópolis. **Anais...** Palhoça: UNISUL, 2000. 1. CD-ROM.

PONTE, J. P. Tecnologias de informação e comunicação na educação e na formação de professores: Que desafios? **Revista Ibero-Americana de Educação**, n. 24, p. 63-90, set./ dez. 2000. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/00-Ponte-TIC%20(rie24a03).pdf>. Acesso em: 20 nov. 2007.

PORTAL, L. L. F.; SOUZA, V. B. de A. Recursos tecnológicos como intervenção estratégica: busca de caminhos alternativos. In: PORTAL, L. L. F.; SOUZA, V. B. de A.; CARRAVETTA, L. (Org.). **Multimeios e Interdisciplinaridade**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 1994. p. 7-18.

PUTNOKI, José Carlos. Que se devolvam a Euclides a régua e o compasso. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 13, p. 13-17, 1988.

ROULKOSKI, E. **Demonstrações em Geometria**: uma descrição de processos de construção, utilizados por alunos de licenciatura em Matemática, em ambiente informatizado. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2002.

SALOMÃO, Luiz Alberto. Investigando resultados da geometria inversiva através do Cabri. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2001, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: SBEM, 2001. 1 CD-ROM.

SAUER, Laurete Zanol. **O diálogo matemático e o processo de tomada de consciência da aprendizagem em ambientes telemáticos**. 2004. 196 f. Tese (Doutorado em informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

SOARES, E. M. S. S.; SAUER, L. Z. Um novo olhar para a aprendizagem de matemática para a engenharia. In: CURY, H. N. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 245-270.

THOM, R. Modern mathematics: does it exist? In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 2., 1973, Cambridge. **Proceedings...** Cambridge: Cambridge University Press, 1973. p. 194-209.

VALENTE, José Armando. **Por Que o Computador na Educação?**. 1995. Disponível em: <http://www.nied.unicamp.br/publicacoes/separatas/Sep2.pdf>. Acesso em: 20 set. 2006.

WALUSINSKI, G. L´instructive histoire d´un échec: les mathématiques modernes (1955-1972). **Bulletin de l´APMEP**, n. 353, 1986. Disponível em: <http://www.apmep.asso.fr/spip.php?article1590>. Acesso em: 04 nov. 2007.

ZULATTO, Rúbia B. A. **Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica**: suas características e perspectivas. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

R788 Rosa, Renata Urruth
Aprendizagem de conceitos geométricos em ambiente de geometria dinâmica : uma análise da produção de alunos de 7ª. e 8ª séries do ensino fundamental / Renata Urruth Rosa ; orientadora Helena Noronha Cury. – Porto Alegre, 2008.
184 f. ; il.

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Faculdade de Física. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática.

1. Geometria - Aprendizagem. 2. Geometria dinâmica. 3. Ensino fundamental. I. Cury, Helena Noronha II . Título

CDU - 514:371.3

Bibliotecária Responsável
Karin Zanona Caselli
CRB 10/1106