



Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

FACULDADE DE ENGENHARIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS

**SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO DA TOMOGRAFIA POR
IMPEDÂNCIA ELÉTRICA UTILIZANDO O *SIMULATED ANNEALING*:
UMA NOVA ABORDAGEM.**

JEFFERSON SANTANA MARTINS

LICENCIADO EM FÍSICA E BACHAREL EM FÍSICA MÉDICA
MESTRE EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA DOS MATERIAIS

**TESE PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM ENGENHARIA E
TECNOLOGIA DE MATERIAIS**

Porto Alegre

Janeiro, 2016



Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

FACULDADE DE ENGENHARIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS

**SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO DA TOMOGRAFIA POR
IMPEDÂNCIA ELÉTRICA UTILIZANDO O *SIMULATED ANNEALING*:
UMA NOVA ABORDAGEM.**

JEFFERSON SANTANA MARTINS

LICENCIADO EM FÍSICA E BACHAREL EM FÍSICA MÉDICA
MESTRE EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA DOS MATERIAIS

ORIENTADOR: PROF. DR. RUBEM MÁRIO FIGUEIRÓ VARGAS

COORIENTADOR: PROF. DR. CÁSSIO STEIN MOURA

Tese realizada no Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia de Materiais (PGETEMA) da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia e Tecnologia de Materiais.

Porto Alegre

Janeiro, 2016

“Pois a periferia do círculo da ciência tem um número infinito de pontos; e mesmo se não pudermos saber se este círculo pode ser explorado por completo, mesmo após o esforço de homens nobres e bem-dotados, inevitavelmente, essa fronteira aponta para a periferia de onde vislumbramos o que desafia a compreensão”

Friedrich Nietzsche

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível. ”

Charles Chaplin



Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

FACULDADE DE ENGENHARIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO DA TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA UTILIZANDO O SIMULATED ANNEALING: UMA NOVA ABORDAGEM

CANDIDATO: JEFFERSON SANTANA MARTINS

Esta Tese de Doutorado foi julgada para obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia de Materiais da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Rubem Mário F. Vargas

DR. RUBEM MÁRIO FIGUEIRÓ VARGAS - ORIENTADOR

Cássio Stein Moura

DR. CÁSSIO STEIN MOURA - CO-ORIENTADOR

BANCA EXAMINADORA

Cynthia Feijó Segatto

DRA. CYNTHIA FEIJÓ SEGATTO - DO PROMEC - UFRGS

Ana Maria Marques da Silva

DRA. ANA MARIA MARQUES DA SILVA - DO PPGE/FENG - PUCRS

Jorge Hugo Silvestrini

DR. JORGE HUGO SILVESTRINI - DO PGETEMA/FENG - PUCRS

PUCRS

Campus Central

Av. Ipiranga, 6681 - Prédio 30 - Sala 103 - CEP: 90619-900

Telefone: (51) 3353.4059 - Fax: (51) 3320.3625

E-mail: engenharia.pg.materiais@pucrs.br

www.pucrs.br/feng

DEDICATÓRIA

Para Anna Luiza, por alegrar todos os meus dias.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Juliano D'Ornelas Benfica pelo desenvolvimento da placa de aquisição de dados.

Agradeço às alunas Laura Córdova Matte e Aline de Castro Sanchez pela operação do sistema de coleta de dados e por serem queridas amigas.

Agradeço às alunas Michelle Guedes Perez e Ana Cecilia Ferraz de Loreto pela ajuda com as simulações.

Agradeço aos professores Cássio Stein Moura e Rubem Mário Figueiró Vargas pelo apoio e paciência durante a minha orientação.

Agradeço a Luciane Lima da Rosa por ter passado todos esses anos me aguentando e me apoiando.

Agradeço a minha mãe Teresinha Cardoso de Santana por sempre me apoiar.

Agradeço ao apoio financeiro da Petrobras.

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA	4
AGRADECIMENTOS.....	5
SUMÁRIO	6
LISTA DE FIGURAS	8
LISTA DE TABELAS.....	11
LISTA DE SIMBOLOS	12
LISTA DE ABREVIATURAS	13
RESUMO.....	14
ABSTRACT.....	15
1. INTRODUÇÃO	16
2. OBJETIVOS	21
2.1. Objetivos Específicos	21
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	22
3.1. Introdução à TIE	22
3.2. Problema Direto.....	25
3.3. Problema Inverso	26
3.4. <i>Simulated Annealing (SA)</i>	27
3.5. SA aplicado a TIE: a abordagem de Herrera (2007).....	29
4. METODOLOGIA.....	32
4.1. MDF Aplicado ao Problema Direto da TIE	32
4.2. Análise das Reconstruções.....	37
4.3. Ensaios realizados	42
4.3.1. Geração do Modelo Virtual.....	42
4.3.2. Método Proposto.....	45
4.3.3. Método de Herrera	46
4.3.4. Método Híbrido.....	47
4.3.5. Avaliação da Qualidade das Reconstruções	47
4.3.6. Aplicação a Um Sistema Físico	47
5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	52
5.1. Problema Direto.....	52

5.2. Problema Inverso - SA aplicado a TIE: a abordagem proposta	54
5.3. Problema Inverso - Testes com modelos virtuais	58
5.4. Problema Inverso - Testes com modelos físicos	76
6. CONCLUSÃO	80
7. PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS	82
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	83
APÊNDICE I	88
APÊNDICE II	103

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Padrão adjacente de injeção de corrente elétrica no domínio. Modificado de: TRIGO, 2006.	23
Figura 2: Padrão diametral de injeção de corrente elétrica no domínio. Modificado de: TRIGO, 2006.	23
Figura 3: Malha utilizada para a solução do problema direto.	33
Figura 4: Rede resistiva para a discretização da equação (1).....	33
Figura 5: Rótulos atribuídos a cada um dos lados da região avaliada.	36
Figura 6: a) Domínio C1; b) domínio C2; c) domínio C3.	39
Figura 7: Disposição dos eletrodos no contorno da região avaliada.	42
Figura 8: Distribuições de condutividade utilizadas para solução do problema inverso. A região em branco possui condutividade igual a 5,0 unidades de medida de condutividade (u.m.c.) e a região de cor preta possui condutividade igual a 2,0 u.m.c.. a) Domínio D1, b) domínio D2 e c) domínio D3.	43
Figura 9: Padrão de injeção de corrente adjacente. Cada número representa um arranjo de injeção de corrente. As chaves representam quais são os pares de eletrodos onde são realizadas as injeções. Como é representado pela figura, para o padrão adjacente, são obtidos doze conjuntos de medidas.	44
Figura 10: Placa de aquisição de dados e tanque utilizados para o ensaio.	48
Figura 11: Domínio computacional empregado para representar o plano transversal do aquário, onde estão organizados os eletrodos de injeção de corrente.	48
Figura 12: Representação da dimensão e posição dos eletrodos no plano avaliado do aquário (regiões de coloração violeta na figura).....	49
Figura 13: Primeira montagem para testar o método proposto com dados reais.	50
Figura 14: Segunda montagem para testar o método proposto.	50
Figura 15: Terceira montagem para testar o método proposto.	51

- Figura 16: Solução do problema direto utilizando: a) o SOR, com 300 iterações e $\omega=1,8$; a) o método de Gauss-Seidel, com 1200 iterações, para um dos padrões de injeção de corrente no domínio.53
- Figura 17: Reconstruções para o domínio D1 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 1. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.59
- Figura 18: Reconstruções para o domínio D1 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 3. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.60
- Figura 19: Reconstruções para o domínio D1 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 5. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.61
- Figura 20: Reconstruções para o domínio D2 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 1. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.64
- Figura 21: Reconstruções para o domínio D2 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 3. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.65
- Figura 22: Reconstruções para o domínio D2 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 5. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.66
- Figura 23: Reconstruções para o domínio D3 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 1. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.68
- Figura 24: Reconstruções para o domínio D3 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 3. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.69
- Figura 25: Reconstruções para o domínio D3 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 5. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.70

- Figura 26: Reconstruções para os domínios da Figura 8, utilizando o método de Herrera com diferentes valores para N_i e M . a) Reconstrução de D1 para $N_i=500$ e $M=20$; b) Reconstrução de D1 para $N_i=1000$ e $M=10$; c) Reconstrução de D1 para $N_i=2000$ e $M=5$; d) Reconstrução de D2 para $N_i=500$ e $M=20$; e) Reconstrução de D2 para $N_i=1000$ e $M=10$; f) Reconstrução de D2 para $N_i=2000$ e $M=5$; g) Reconstrução de D3 para $N_i=500$ e $M=20$; Reconstrução de D3 para $N_i=1000$ e $M=10$ e i) Reconstrução de D3 para $N_i=2000$ e $M=5$ 72
- Figura 27: Reconstruções para os domínios da Figura 8 realizada por meio do método híbrido. As reconstruções foram realizadas com 10.000 iterações para a etapa com o método proposto, $N_i=50$ e $M=3$ para a etapa com o método de Herrera. a) Reconstrução do domínio D1; b) Reconstrução do domínio D2; c) Reconstrução do domínio de D3..... 75
- Figura 28: Imagem reconstruída da primeira montagem..... 77
- Figura 29: Inversão obtida para a segunda montagem. 77
- Figura 30: Imagem obtida para terceira montagem..... 78

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: CPP calculado para comparação dos domínios da Figura 6.	39
Tabela 2: SSIM calculado para comparação dos domínios da Figura 1.	40
Tabela 3: Valores de ddp em unidades de medida de potencial elétrico (u.m.p), para um dos padrões de injeção de corrente do domínio. Para esse padrão, as ddp foram calculadas para as três distribuições de condutividade da Figura 8, usando o SOR e o método de Gauss-Seidel.	53
Tabela 4: CPP e SSIM calculados para reconstruções do domínio D1, realizadas por meio do método proposto, utilizando diferentes janelas e valores de desvio padrão para o filtro gaussiano. Em negrito são destacados os valores mais altos de CCP e SSIM.	62
Tabela 5: CPP e SSIM calculados para reconstruções do domínio D2, realizadas por meio do método proposto, utilizando diferentes janelas e valores de desvio padrão para o filtro gaussiano. Em negrito são destacados os valores mais altos de CCP e SSIM.	67
Tabela 6: CPP e SSIM calculados para reconstruções do domínio D3, realizadas por meio do método proposto, utilizando diferentes janelas e valores de desvio padrão para o filtro gaussiano. Em negrito são destacados os valores mais altos de CCP e SSIM.	71
Tabela 7: CPP e SSIM calculados para as reconstruções apresentadas na Figura 24, realizadas por meio do método de Herrera, para diferentes valores de N_i e M . Em negrito são destacados os valores mais altos de CCP e SSIM.	73
Tabela 8: CPP e SSIM calculados para as reconstruções apresentadas na Figura 27, realizadas por meio da combinação do método proposto com o método de Herrera.	75

LISTA DE SIMBOLOS

u	Potencial elétrico
σ	Condutividade elétrica
J	Densidade de corrente
\hat{n}	Versor normal a superfície
$E(\sigma_k)$	Função objetivo
V_i	Diferença de potencial entre dois eletrodos
$\Omega(u)$	Operador de regularização
λ	Parâmetro de regularização
P	Probabilidade
T	Parâmetro de controle
r	Número aleatório
$\alpha_{i,j}^k$	Elemento da matriz de passo
N_a	Número de novas configurações aceitas
N_T	Número total de iterações
i	Corrente elétrica
R	Resistência elétrica
l	Comprimento
ρ	Resistividade elétrica
S	Número de medidas ddp no contorno
$\alpha_{i,j}^k$	Elemento da matriz de passo
α	Passo
ω	Parâmetro do método de sobre-relexação sucessiva
$d_{i,j}$	<i>Elemento</i> da matriz de perturbação
$D_{M \times N}$	Matriz de números aleatórios
ζ	Desvio padrão

LISTA DE ABREVIATURAS

TIE	Tomografia por Impedância Elétrica
MDF	Método das Diferenças Finitas
SA	<i>Simulated Annealing</i>
SOR	Sobre-Relaxação Sucessiva
CCP	Coefficiente de Correlação de Pearson
SSIM	<i>Structural Similarity Index</i>
ddp	Diferença de Potencial Elétrico
DMAE	Departamento Municipal de Água e Esgotos de Porto Alegre

RESUMO

SANTANA MARTINS, Jefferson. **Solução do Problema Inverso da Tomografia por Impedância Elétrica Utilizando o *Simulated Annealing*: Uma Nova Abordagem.** Porto Alegre. 2016. Tese. Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia de Materiais, PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL.

O problema de reconstrução da tomografia por impedância elétrica (TIE) é um problema de otimização inverso, não linear e mal-condicionado, no qual se objetiva minimizar a diferença entre dados medidos e calculados através de um modelo numérico. No presente trabalho, é descrita uma nova abordagem do método de recozimento simulado aplicado à reconstrução de imagens de TIE. A principal vantagem do algoritmo apresentado é que todos os parâmetros de condutividade do domínio são atualizados conjuntamente. Outros métodos que empregam o recozimento simulado para a solução do problema da TIE avaliam individualmente cada parâmetro de condutividade, tendo, por isso, grande custo computacional. O método proposto foi testado com dados gerados computacionalmente e com medidas realizadas em um tanque de simulação física. Em ambos os casos, ele pôde fazer a inversão dos dados, sendo capaz de determinar a posição, as dimensões e a condutividade de diferentes materiais em um plano transversal de um objeto opaco.

Palavras-Chaves: Tomografia por impedância elétrica, problemas inversos, simulated annealing.

ABSTRACT

SANTANA MARTINS, Jefferson. **Image Reconstruction Using Simulated Annealing in Electrical Impedance Tomography: A New Approach.** Porto Alegre. 2016. Master/PhD Thesis. Graduation Program in Materials Engineering and Technology, PONTIFICAL CATHOLIC UNIVERSITY OF RIO GRANDE DO SUL.

Image reconstruction in electrical impedance tomography (EIT) deals with an ill-posed and nonlinear inverse problem. It intends to minimize the difference between simulated (virtual) object data and data from a non simulated (real) object. In this paper, a new approach to the Simulated Annealing method applied to reconstruction of EIT images is described. The main advantage in this approach is that all conductivity parameters are updated simultaneously. Other methods that employ Simulated Annealing to the problem of EIT evaluate each conductivity parameter individually resulting in high computational cost. The algorithm was tested both with computationally generated data and with measurements performed on a physical simulation tank. In both cases, the method was able to make data inversion, determining the position, the dimensions and the conductivity of materials in an opaque object plane.

Keywords: Electrical impedance tomography, inverse problem, simulated annealing.

1. INTRODUÇÃO

A técnica de Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) é um método de visualização não invasivo, no qual são mensuradas certas grandezas elétricas no contorno de um objeto opaco, para obtenção de imagens de seu interior inacessível. Se for considerada a sua modalidade bidimensional, na TIE as imagens são construídas a partir da estimativa de propriedades elétricas, tais como a condutividade e/ou a permissividade elétrica, para diversos pontos de um plano transversal de um objeto, cujo interior se deseja conhecer.

Uma das vantagens apresentadas pela TIE, pelo menos do ponto de vista teórico, está relacionada a um possível ganho de contraste da imagem em relação a outros métodos de reconstrução¹ de imagens não invasivos, como a tomografia computadorizada, que utiliza raios X. Isso pode ser compreendido, ao comparar a condutividade elétrica ao coeficiente de atenuação de raios X², para alguns tecidos do corpo humano. Ao ser confrontada a condutividade do osso com a condutividade dos músculos e do sangue, nota-se que a condutividade do primeiro é duas ordens de grandeza menor que a condutividade dos outros dois. Fazendo a mesma comparação em relação ao coeficiente de atenuação de raios X para os mesmos tecidos, a diferença não passa de uma ordem de grandeza (MENIN, 2009).

¹ Reconstrução e inversão serão utilizadas como sinônimos no presente trabalho.

² O coeficiente de atenuação de raios X é a grandeza responsável pelo contraste em imagens produzidas por tomografia computadorizada convencional.

Outras vantagens da TIE são a sua portabilidade, a sua facilidade de manutenção e o custo do equipamento para a aquisição dos dados e reconstrução do domínio. De forma efetiva, um tomógrafo por impedância elétrica consiste basicamente de uma fonte de excitação (corrente ou tensão), de eletrodos e de um computador. O sistema é pequeno e pode ser instalado mesmo em locais com pouco espaço. Em relação ao valor do equipamento, estimativas apontam para um baixo custo do tomógrafo por impedância elétrica em comparação a um tomógrafo computadorizado por raios X (AGUILAR, 2009). Além disso, por não utilizar radiação ionizante, o equipamento de TIE pode ser mantido conectado a pacientes ou amostras por longos períodos de tempo sem apresentar danos aos mesmos nem a terceiros. Entretanto, apesar dessas vantagens, a TIE necessita ainda melhorar a resolução espacial das imagens produzidas e diminuir o tempo computacional necessário para fazer a reconstrução das imagens devido à complexidade dos algoritmos utilizados.

Existem diversas áreas em que a TIE pode ser aplicada, tais como: Medicina, Geofísica, Ciências Ambientais, Química, Engenharia e em testes não destrutivos em materiais. Na Medicina, é possível destacar: a detecção de êmbolos em pulmões (PANOUTSOS et al., 2007), o monitoramento da ventilação pulmonar (NGUYEN et al., 2012), o monitoramento da função esofágica e gastrointestinal (EROL & MANGNALL et al., 1995), o monitoramento da atividade cardíaca (ISAACSON et al., 2006) e a detecção de câncer (CHEREPENIN et al., 2001). Em Geofísica e em Ciências Ambientais, a TIE é útil para localização de depósitos minerais (PARKER, 1984 apud BORCEA, 2002, p. 99), localização de minérios subterrâneos, na extração de petróleo e para detecção de vazamentos em tanques de armazenamento subterrâneo (RAMIREZ et al., 1996 apud BORCEA, p. 99). Na Química, a TIE pode ser empregada para o acompanhamento de reações em recipientes fechados (KOWALSKI, 2010) ou no fluxo de reagentes (TAPP et al., 2003). Em Engenharia, a TIE pode ser empregada para acompanhar o fluxo de gases, líquidos ou bolhas no interior de encanamentos fechados (RAMIREZ et al., 1993 apud BORCEA, p. 100). Em testes não destrutivos com materiais metálicos, a TIE pode ser aplicada na detecção de corrosão e pequenas fissuras ou vazios em metais (AGUILAR, 2009).

A procura pela distribuição de condutividade no interior de um objeto pode ser realizada através de modelos matemáticos que dependem ou não do tempo, por métodos de reconstrução estáticos e dinâmicos. Métodos estáticos são empregados quando as propriedades elétricas do objeto não variam significativamente durante o tempo necessário para a coleta de dados. Quando mudanças rápidas nas propriedades elétricas ocorrem, efeitos dinâmicos devem ser considerados e um método dinâmico precisará ser usado. Além de dinâmicos e estáticos, métodos de reconstrução para TIE podem também ser classificados em métodos de diferenças e em métodos absolutos. Em imagens de diferenças, dois conjuntos de dados de potencial são medidos. Baseada na diferença entre essas medidas, a diferença de condutividade entre diferentes pontos do domínio pode ser estimada. Nos métodos de reconstrução absolutos, um conjunto de dados de potencial é medido no contorno e o objetivo é estimar a condutividade absoluta do domínio (HERRERA et al., 2007).

Do ponto de vista matemático, os algoritmos utilizados para reconstrução de imagens absolutas para TIE, devem resolver um problema inverso, mal condicionado e que apresenta grande sensibilidade em relação a ruídos experimentais e erros numéricos. Além disso, as medidas realizadas no contorno são pouco sensíveis a mudanças de condutividade próximas ao centro do domínio, dificultando ainda mais o processo de obtenção de imagens (HERRERA et al., 2007).

Para obter uma imagem do interior do domínio, normalmente dois problemas devem ser resolvidos: direto e inverso. No problema direto é determinada a solução de uma equação diferencial por métodos analíticos ou por métodos numéricos, como o método das diferenças finitas (MDF) (MARTINS et al., 2015). Através da solução do problema direto e das medidas dos potenciais, é resolvido o problema inverso. Essencialmente, busca-se a distribuição de condutividade que minimiza a diferença entre os potenciais medidos no contorno e obtidos através da solução do problema direto.

Distintos métodos numéricos de otimização têm sido aplicados para a solução do problema inverso da TIE, principalmente métodos locais e métodos globais. Eppler e Harbrecht (2005) e Wang (2002) fazem a solução do problema inverso da TIE através de métodos locais. Em relação aos métodos de minimização globais, dois são aplicados à solução do problema inverso: os algoritmos genéticos (OLMI et

al., 2000) e o recozimento simulado, ou *simulated annealing* (SA) (HERRERA et al. 2007) (DE CASTRO MARTINS et al., 2012). O último foi o método estudado neste trabalho.

O SA é um método metaheurístico iterativo de otimização global estocástico, capaz de escapar de mínimos locais da função objetivo, através do emprego do critério de Metropolis (HERRERA et al. 2007). A escolha da taxa de resfriamento e da próxima distribuição de condutividade candidata (heurística de vizinhança) são as decisões mais importantes na definição de um algoritmo que vise implementar o SA (MARTINS e TSUZUKI, 2009).

O SA inicialmente foi desenvolvido para minimização de variáveis discretas. Corana et al. (1987) propôs uma versão do SA para minimização de funções com variáveis contínuas. No trabalho de Herrera et al. (2007), através do emprego da abordagem de Corana, foi demonstrado que o SA pode produzir soluções bastante precisas para o problema inverso da TIE. No entanto, o custo computacional para produzir as soluções é bastante elevado. Isso ocorre porque cada parâmetro de condutividade é modificado individualmente no domínio e, para cada modificação, é necessário fazer a solução do problema direto (DE CASTRO MARTINS et al., 2012).

No trabalho de De Castro Martins et al. (2012), uma segunda abordagem de procura heurística por uma solução vizinha foi testada. Nessa formulação, além das modificações individuais de condutividade em cada ponto do domínio, um tipo de “transporte de condutividade” entre pontos vizinhos foi utilizado. Essa heurística mais restritiva para procura de distribuições vizinhas mostrou-se mais eficiente para solução do problema inverso, quando comparada ao método utilizado no trabalho de Herrera et al. (2007).

Outra abordagem foi proposta pelo autor desta tese no trabalho de Martins (2012). Nessa abordagem, todo o domínio de condutividade é atualizado conjuntamente, por meio do emprego de um filtro passa-baixa sobre a matriz de perturbação. No entanto, apesar de se referir ao método de inversão empregado como sendo o SA, o método empregado no referido trabalho foi outro método Monte Carlo, onde a probabilidade de transição de estados não dependia do parâmetro de controle.

No presente trabalho, é proposta uma nova abordagem do SA aplicada ao problema da TIE, utilizando uma heurística de procura por soluções vizinhas, semelhante à heurística de Martins (2012), na qual todos os parâmetros do domínio de condutividade são atualizados ao mesmo tempo, diminuindo o tempo de busca pela solução que minimiza a função objetivo. Além disso, foram adicionadas modificações nas condições de aceitação do SA original, de modo a acelerar o decréscimo da função objetivo.

2. OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é estudar a solução do problema inverso da TIE através do recozimento simulado ou *Simulated Annealing* (SA) e desenvolver um algoritmo mais eficiente e preciso para a reconstrução de imagens. O SA é um método de otimização metaheurístico estocástico, o qual foi empregado com sucesso em outros trabalhos para a solução do problema inverso da TIE. Entretanto, apesar de preciso, o SA se mostrou uma técnica com elevado custo computacional. Por isso, neste trabalho é proposta uma nova abordagem para solução do problema inverso da TIE via recozimento simulado, onde todos os parâmetros de condutividade do domínio são atualizados conjuntamente. Essa abordagem visa reduzir o custo computacional do método quando aplicado ao problema de reconstrução da TIE.

2.1. Objetivos Específicos

Para a solução do problema inverso da TIE é necessário resolver o problema direto diversas vezes. Sendo assim, um dos objetivos específicos deste trabalho é *implementar uma solução eficiente para o problema direto da TIE*, de modo a reduzir o custo computacional do problema inverso.

Mesmo que testes com dados gerados computacionalmente sejam úteis, eles não reproduzem em sua totalidade o comportamento observado quando são realizados testes com medidas “reais”. Por isso, outro dos objetivos específicos deste trabalho é *testar a solução proposta com dados reais, obtidos por meio de medidas realizadas em simulações físicas num tanque de sedimentação*.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica foi dividida em seis partes. Na primeira parte, na seção 3.1, uma pequena introdução à TIE é realizada de modo a apresentar as principais características da técnica. Na segunda parte, na seção 3.2, é realizada uma descrição do problema direto da TIE. Posteriormente, na seção 3.3, o problema inverso da TIE é apresentado e formulado como um problema de otimização. Na seção 3.4, o *Simulated Annealing* é descrito e é realizada uma pequena explanação sobre sua aplicação ao problema inverso da TIE. Na seção 3.5, uma abordagem típica via *Simulated Annealing* para otimização de variáveis contínuas é exposta. Essa abordagem foi empregada em outros trabalhos para aproximar a solução do problema inverso da TIE.

3.1. Introdução à TIE

A TIE é um método de imagens não invasivo, onde é realizado um mapeamento da condutividade do interior de uma região de interesse, mediante a injeção de corrente elétrica e medidas de potenciais no contorno da região. Para fazer a injeção de corrente no domínio e a medida dos potenciais no seu contorno, é necessário dispor eletrodos na fronteira da seção reta que se deseja conhecer.

A corrente aplicada no contorno obedece a certo padrão de excitação. Este padrão pode ser adjacente ou diametral. No padrão adjacente (Figura 1), a corrente é aplicada utilizando dois eletrodos vizinhos. Já no padrão diametral (Figura 2) a corrente é aplicada em dois eletrodos em posições diametralmente opostas (LIMA, 2006). As Figuras 1 e 2 são representações desses dois procedimentos de obtenção de dados experimentais para TIE.

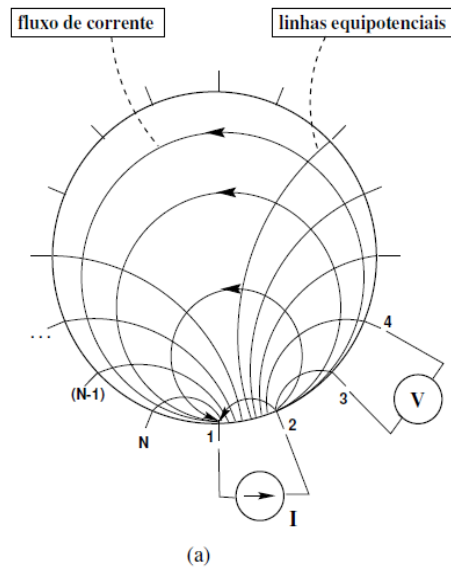


Figura 1: Padrão adjacente de injeção de corrente elétrica no domínio. Modificado de: TRIGO, 2006.

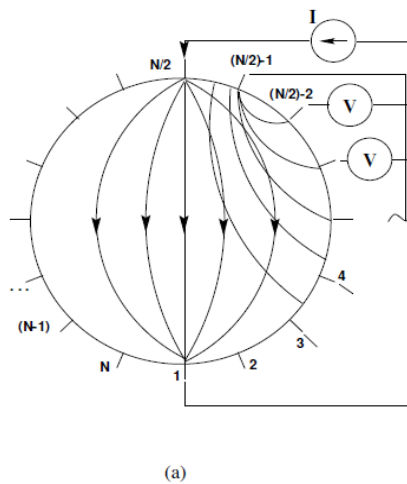


Figura 2: Padrão diametral de injeção de corrente elétrica no domínio. Modificado de: TRIGO, 2006.

Nos dois casos, os potenciais elétricos são medidos nos eletrodos restantes, efetuando a medida sempre em pares de eletrodos adjacentes, com exceção dos pares formados pelos eletrodos de injeção da corrente. Para um total de N eletrodos posicionados no contorno da região de interesse são obtidas $\frac{N(N-3)}{2}$ e $\frac{N(N-4)}{2}$ medidas independentes de potenciais, para as configurações adjacente e diametral, respectivamente. Existem outras configurações com múltiplas fontes de correntes, que injetam corrente e medem potenciais em todos os eletrodos simultaneamente. No entanto, neste trabalho serão tratados apenas aqueles dois casos (BEVILACQUA, 2003).

Do ponto de vista experimental, um circuito eletrônico se encarrega de distribuir as correntes pelos eletrodos e medir as diferenças de potencial. Os dados das medidas são passados a um computador que, utilizando um algoritmo adequado, pode fazer a estimativa da distribuição de condutividade (ou resistividade) no plano avaliado. A cada ponto da região medida é associado um *pixel*, o qual corresponde ao valor da condutividade estimada no ponto (LIMA, 2006).

Os algoritmos utilizados para produzir imagens de TIE devem resolver dois problemas matemáticos: o problema direto e o problema inverso. De modo geral, problemas diretos envolvem a determinação de um efeito³ a partir de uma causa⁴ conhecida (ENGL et. al, 1996). No caso específico da TIE, o problema direto envolve a estimativa dos potenciais elétricos no interior da região avaliada e da resposta no contorno, supondo conhecida a distribuição da condutividade ou da permissividade no interior da região (MENIN, 2009). No entanto, na TIE não se conhece *a priori* a distribuição da impedância elétrica do material no interior da região. As únicas informações disponíveis são os valores de excitação (injeção de corrente elétrica no domínio) e as medidas de resposta (medidas de potenciais elétricos em alguns pontos do contorno), por isso, para fazer a reconstrução de imagens utilizando a TIE, também é necessário resolver um segundo problema, o problema inverso. Problemas inversos são problemas onde são determinadas causas a partir de efeitos (ENGL et. al, 1996). No caso da TIE, o seu problema inverso procura, a partir dos dados de excitação e resposta, determinar a distribuição da impedância ou condutividade elétrica no interior de uma região de interesse (MENIN, 2009).

A solução do problema direto da TIE é de extrema importância para a solução do problema inverso. Uma vez que, a abordagem funcional mais utilizada para fazer

³ *Efeitos*, num modelo matemático, são as propriedades calculadas a partir de um modelo direto, como o campo de temperatura, concentração de partículas, corrente elétrica - etc. (Problemas diretos e inversos).

⁴ *Causas*, num modelo matemático, são as condições iniciais e de contorno, termos de fontes/sumidouros e propriedades do sistema (material). (Problemas diretos e inversos).

a resolução do problema inverso, basicamente faz a comparação de dados obtidos a partir de um modelo numérico e dados medidos no contorno (MENIN, 2009). O modelo numérico faz a solução do problema direto, o qual deve produzir uma solução ao mesmo tempo precisa e que não necessite de grande poder computacional, tendo em vista a necessidade de produzir uma imagem de qualidade em curto espaço de tempo. No caso específico deste trabalho, o tempo de processamento tem prioridade menor em comparação com a resolução da imagem.

A comparação entre os dados numéricos e experimentais é realizada na maioria das vezes mediante a criação de um funcional do erro, capaz de avaliar a diferença entre as informações obtidas pelos dois modelos. Este funcional deve ser minimizado através de um processo de otimização, tais como os Algoritmos Genéticos, o Método de Otimização Topológica e/ou o SA (MENIN, 2009).

A seguir será apresentado o modelo numérico que foi utilizado neste trabalho, capaz de modelar a distribuição de potencial no domínio, considerando distribuições de condutividades não homogêneas.

3.2. Problema Direto

O problema direto da TIE envolve a estimativa da distribuição dos potenciais no interior de uma região Ω e a resposta no contorno, supondo conhecida a distribuição de condutividade. A modelagem matemática desse problema, considerando uma distribuição quasi-estática de cargas (DENAI et al., 2010; MENIN, 2009), permite obter uma equação diferencial parcial capaz de modelar o potencial em Ω , que é expressa como:

$$\bar{\nabla} \cdot (\sigma \bar{\nabla} u) = 0 \text{ em } \Omega, \quad (1)$$

em que, u é o potencial e σ é a condutividade elétrica em um ponto qualquer no interior da região.

As condições de contorno (CC) para o problema direto da TIE correspondem aos valores de correntes/potenciais aplicados e medidos no contorno, sendo representadas matematicamente como:

$$\vec{J}_n = -\sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \hat{n} \text{ em } \partial\Omega, \quad (2)$$

onde, \hat{n} é um versor normal à superfície do objeto e \vec{J}_n é a densidade de corrente na direção do versor.

Condições de contorno como a expressão (2), na qual são conhecidas as derivadas no contorno $\partial\Omega$, são chamadas de condições de contorno de Neumann. A solução do problema direto com condições de contorno de Neumann é um caso particular em que as correntes elétricas injetadas na fronteira do domínio são conhecidas. Outra possibilidade é a solução do problema direto quando o potencial no contorno é conhecido, através da solução de (1) com condições de contorno de Dirichlet.

A aproximação da solução do problema direto da TIE foi realizada utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF), por meio de uma modificação da abordagem apresentada pelo autor desta tese no artigo de Martins et al. (2015). No referido trabalho, a equação (2) foi discretizada usando uma aproximação por diferenças finitas para a derivada primeira. Diferentemente, no presente trabalho, a discretização do contorno foi realizada através da consideração de pontos “fantasmas” externos ao domínio, com erro de truncamento $O(h^2)$. Com essa abordagem, foi possível utilizar o método de sobre-relaxação sucessiva (SOR) - no trabalho de Martins et al. (2015), foi utilizado o método de Gauss-Seidel - para resolver o sistema de equações lineares, o qual é resultado da aproximação das expressões (1) e (2) pelo MDF. Isso diminuiu o tempo necessário para aproximar a solução do problema direto e, conseqüentemente, atenua a demanda computacional para a solução do problema inverso.

3.3. Problema Inverso

O problema inverso da TIE tem por objetivo obter uma aproximação para a condutividade no interior Ω de um objeto de interesse, a partir dos potenciais elétricos e padrões de corrente elétricas, respectivamente, medidos e injetados no contorno $\partial\Omega$. Caso seja conhecido um modo eficiente de resolver o problema direto, uma alternativa para a solução do problema inverso é formulá-lo como um problema de minimização. Nessa formulação, uma função objetivo $E(\sigma_k)$ é definida e tem a

finalidade de representar a diferença entre as medidas realizadas no contorno e a solução do problema direto. Na literatura, alguns trabalhos como o de Kolehmainen et al. (2012), definem $E(\sigma_k)$ pela expressão (3) apresentada a seguir:

$$E(\sigma_k) = \sum_{i=1}^n [V_i - U_i(\sigma_k)]^2 \quad (3)$$

onde, n representa o número de medidas realizadas no contorno, V_i é o valor da diferença de potencial entre dois eletrodos quaisquer em $\partial\Omega$ e $U_i(\sigma_k)$ representa a diferença de potencial calculada por meio da solução do problema direto.

Além da escolha da função objetivo, para aproximar a solução do problema inverso da TIE é necessário adicionar informação ao problema, de modo a torná-lo bem condicionado. De maneira geral, problemas inversos são formulados como problemas de otimização com restrições que, matematicamente, são expressos por: $\min \|A(u) - f\|^2$, onde $A(u)$ é a solução do problema direto e f são dados empíricos. Métodos locais como o de Newton-Raphson (KIM et al., 2000), Quasi-Newton (ARTOLA e DELL, 1994), Levenberg–Marquardt (PLAYER et al., 1999), entre outros, resolvem o problema inverso adicionando um operador ao funcional: no qual $\Omega(u)$ é o operador de regularização e λ é um número real qualquer, chamado de parâmetro de regularização (TIKHONOV e ARSENIN, 1977).

Diferente de métodos determinísticos locais, métodos estocásticos globais não necessitam de um termo de regularização adicionado à função objetivo. Nesse caso, a informação adicional, necessária para solução do problema inverso da TIE, é adicionada através de restrições estabelecidas para o espaço de solução, como mostrado nos trabalhos de Herrera et al. (2007), para o SA, e de Olmi et al. (2000), para os algoritmos genéticos.

3.4. **Simulated Annealing (SA)**

O recozimento simulado ou *simulated annealing* (SA) é um método de minimização global metaheurístico, baseado numa analogia com o processo de recozimento físico que busca obter os estados de mais baixa energia de um sólido. No procedimento experimental, o método consiste em aquecer inicialmente um

material sólido até a sua fusão, que corresponde a um estado de grande mobilidade de suas partículas. A seguir, a temperatura do material fundido é reduzida, fazendo-o retornar ao estado sólido. Posteriormente, a temperatura é lentamente reduzida até a temperatura ambiente. Durante esse processo, as partículas que formam o material têm a chance de passar por vários estados energéticos e à medida que a temperatura é reduzida, a amplitude de seu movimento diminui. Quanto maior a temperatura inicial e menor a taxa de arrefecimento, mais próximo da estrutura cristalina de menor energia estará o material ao final do processo (KIRKPATRICK, GELATT e VECCHI, 1983). O SA é um método numérico que procura simular o processo de recozimento físico, na tentativa de minimizar uma função de diferenças - equivalente à energia no processo de recozimento físico - à função objetivo.

Para implementar computacionalmente o SA na solução do problema inverso da TIE, novas configurações para a distribuição de condutividade devem ser procuradas aleatoriamente, de modo que novas distribuições sejam aceitas caso diminuam o valor da função objetivo $E(\sigma_k)$. Esta função depende da distribuição de condutividade na k -ésima iteração, sendo definida de modo a representar a diferença entre os dados calculados pelo problema direto e as medidas de potencial realizadas no contorno. Por outro lado, se ocorrer um incremento do valor da função objetivo, a nova distribuição de condutividade pode ainda ser aceita, se atender a um critério de seleção dependente de uma probabilidade P . Esta probabilidade é definida como o inverso da exponencial da diferença entre $E(\sigma_k)$ e $E(\sigma_{k+1})$ dividido por um parâmetro T . Este parâmetro é um análogo à temperatura em processos de recozimento físico e, no recozimento simulado, decresce com o aumento do número de iterações k . Matematicamente, P é representada pela seguinte equação:

$$P = e^{-\left[\frac{E(\sigma_{k+1}) - E(\sigma_k)}{T(k+1)}\right]} \quad (4)$$

onde, $E(\sigma_{k+1})$ é o valor da função objetivo na iteração atual, $E(\sigma_k)$ é o valor da função objetivo na iteração anterior e $T(k+1)$ é o valor do parâmetro de controle na iteração atual.

Assim, para que uma nova distribuição de condutividade, caso esta aumente o valor de $E(\sigma_k)$, seja aceita, é necessário que o valor de P seja inferior ao valor de um número aleatório gerado no intervalo entre 0 e 1, numa determinada iteração

numérica. Este critério de seleção é conhecido como critério de Metropolis (METROPOLIS et al., 1953).

A principal vantagem do SA em relação a outros métodos de minimização é a sua capacidade de escapar de mínimos locais, pois o sistema flutua em torno de um valor da função diferença e a amplitude da flutuação é definida pelo parâmetro T . Inicialmente, T possui um valor muito alto, possibilitando que todo o espaço de fase seja percorrido e que, ao final do processo de recozimento, a solução esteja muito próxima do seu mínimo global. Isso faz do SA um método de minimização especialmente atrativo quando as funções a serem minimizadas apresentam múltiplos mínimos locais (LUTFIYYA, 1992).

A maioria dos desenvolvimentos teóricos e aplicações do SA foram realizadas para variáveis discretas. Entretanto, o SA também tem sido usado como ferramenta para tratar problemas em domínios contínuos.

No trabalho de Herrera et al. (2007), o SA foi aplicado para solução do problema inverso da TIE, utilizando uma versão para minimização de variáveis contínuas, proposta por Corana et al. (1987). Nessa abordagem, de forma individual, cada parâmetro de condutividade do domínio é modificado e a variação de cada parâmetro depende da quantidade de soluções rejeitadas. Quanto maior o número de soluções rejeitadas, menor é a variação do parâmetro de condutividade analisado. Assim, é possível obter soluções bastante precisas para o problema inverso da TIE. Em contrapartida, como é necessário resolver o problema direto para cada mudança de condutividade no domínio, o custo computacional para se obter as soluções é bastante elevado (DE CASTRO MARTINS et al., 2012).

Diferentemente do trabalho de Herrera et. al (2007), no presente trabalho é proposta uma versão do SA na qual todos os valores de condutividade do domínio são modificados conjuntamente, minimizando o custo computacional para se obter as reconstruções.

3.5. SA aplicado a TIE: a abordagem de Herrera (2007)

A solução de problemas de otimização com variáveis contínuas envolve encontrar uma solução candidata, através da solução atual e de um vetor direção.

Se a nova solução candidata é superior à solução anterior, ela é utilizada para gerar a próxima solução candidata.

Na abordagem de Herrera (2007), são impostas restrições no espaço de fase para se obter uma nova distribuição de condutividade candidata. O novo ponto candidato é gerado nas vizinhanças do ponto atual, aplicando movimentos aleatórios ao longo de cada direção coordenada, de modo a satisfazer os limites apresentados no trabalho de Corana et al. (1987). A partir de uma matriz de condutividade inicial $\sigma_{M \times N}$, são geradas novas distribuições de condutividade ao longo da direção h , dentro de um intervalo fixo de condutividade, $a \leq \sigma_{i,j}^k \leq b$, através de:

$$\sigma_{i,j}^{k+1} = \sigma_{i,j}^k + r\alpha_{i,j}^k \quad (5)$$

em que, r é um número aleatório entre $[-1,1]$ obtido através de um gerador de números pseudo-aleatórios e $\alpha_{i,j}^k$ é um componente da matriz de passo na k -ésima iteração.

Para cada direção, a nova matriz de passo é dada por (CORANA et al. 1987):

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} v_{i,j} \left\{ 1 + c_u \left[\frac{\left(\frac{N_a}{N_T} \right) - 0,6}{0,4} \right] \right\} & \text{se } N_a > 0,6 N_T \\ v_{i,j} \left\{ 1 + c_u \left[\frac{0,4 - \left(\frac{N_a}{N_T} \right)}{0,4} \right] \right\}^{-1} & \text{se } N_a < 0,4 N_T \\ v_{i,j} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

em que, N_a é o número de novas configurações aceitas para distribuição de condutividade, N_T é o número total de iterações k , $v_{i,j}$ e c_u são parâmetros ajustados empiricamente. A introdução da matriz $\alpha_{i,j}$ tem por objetivo manter o número de novas configurações aceitas em 50%.

O algoritmo empregado, para implementar o método de Herrera com vista a solucionar o problema inverso da TIE, é apresentado a seguir:

- 1) É calculado o valor de T_k , definido pela equação $T_k = T_0 B$, onde B é uma constante;
- 2) Para uma determinada interação, k , é gerado um número aleatório d , com valores entre 0 e 1;
- 3) Por meio da expressão (6) são calculados os elementos da matriz de passo $\alpha_{i,j}$;
- 4) Um elemento da matriz de condutividade $\sigma_{i,j}$ é somado ao produto de d por um dos elementos da matriz de passo $\alpha_{i,j}$, gerando uma nova distribuição de condutividade.
- 5) É resolvido o problema direto utilizando a nova matriz de condutividade $\sigma_{M \times N}$;
- 6) Calcula-se o valor de $E(\sigma_k)$;
- 7) Calcula-se o valor da probabilidade P através da equação (4);
- 8) É gerado um número aleatório R entre 0 e 1;
- 9) Se $E(\sigma_k) < E(\sigma_{k-1})$ ou $R < P$, é aceita a nova distribuição de condutividade $\sigma_k(M, N)$; senão, é mantida a matriz condutividade $\sigma_{k-1}(M, N)$ e o algoritmo é repetido um número n de vezes para o mesmo ponto (i, j) ;
- 10) Para um novo ponto da matriz de condutividade (i, j) , o algoritmo é repetido a partir do item (2);
- 11) Após todo o domínio de condutividade ser modificado, o algoritmo volta ao início e é repetido um número m de vezes.

Na seção seguinte é apresentada a metodologia utilizada para se analisar as estratégias de inversão abordadas neste trabalho.

4. METODOLOGIA

A metodologia foi dividida em quatro partes. Na primeira, na seção 4.1, é apresentado o modelo numérico utilizado para fazer a solução do problema direto. Na segunda, na seção 4.2, alguns parâmetros considerados para avaliar as reconstruções, como o Coeficiente de Correlação de Pearson e o *Structural Similarity Index*, são expostos e discutidos. Na terceira parte, na seção 4.3, todos os testes realizados para avaliar as diferentes estratégias de inversão são apresentados.

4.1. MDF Aplicado ao Problema Direto da TIE

O domínio computacional analisado é um domínio bidimensional quadrado $\Omega=[0,1] \times [0,1]$, onde é assumida uma condutividade $\sigma(x,y)$ não homogênea.

O esquema por diferenças finitas para a discretização do domínio usa uma malha uniformemente distribuída (Figura 3) representada por intervalos definidos por $\Delta x = \frac{x_m}{N}$ e $\Delta y = \frac{y_n}{M}$, onde N e M são números inteiros positivos que representam o número de divisões do domínio nas coordenadas x e y , respectivamente (NAYAK,1972). O ponto nodal (i,j) possui as coordenadas (x_i, y_j) , dadas por $x_i = x_0 + \Delta x i$ e $y_j = y_0 + \Delta y j$. O número máximo de linhas em x é denotado por $i_{max} = N$ e o número total de linhas em y é denotado por $j_{max} = M$.

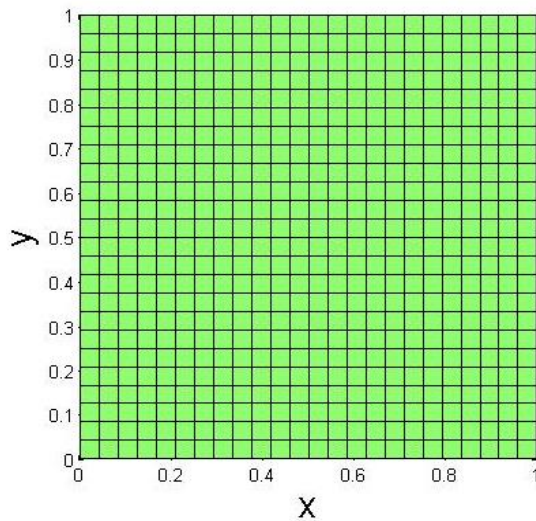


Figura 3: Malha utilizada para a solução do problema direto.

Para a solução do problema direto da TIE é necessário discretizar a equação (1). Como mostrado no trabalho de Kim et al. (2008), a discretização de (1) através do MDF pode ser realizado através da análise de uma malha resistiva, como a apresentada na Figura 4 (KIM ET AL., 2008).

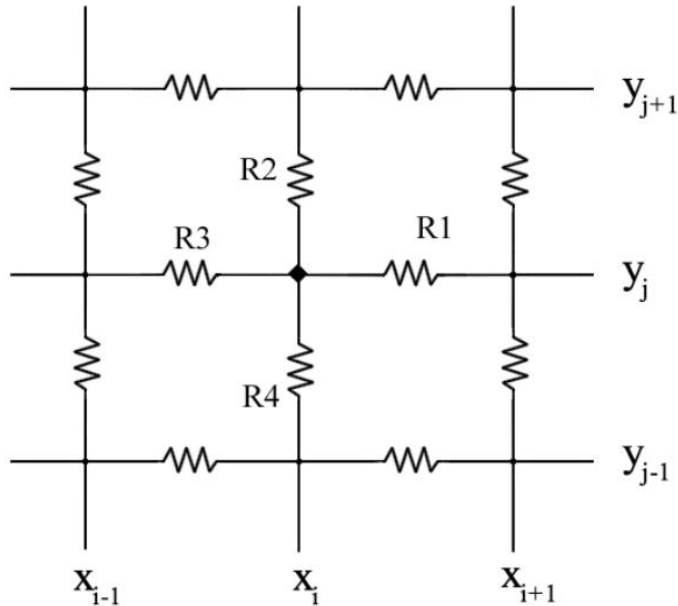


Figura 4: Rede resistiva para a discretização da equação (1).

A primeira lei de Kirchhoff diz que a soma algébrica das correntes elétricas que chegam a um nó deve ser igual a zero. Então, a aproximação para o potencial elétrico $u_{i,j}$ no ponto $p = (x_i, y_j)$ pode ser realizado pela relação:

$$\sum_{k=1}^4 i_k = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{R_1} + \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{R_2} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{R_3} + \frac{u_{i,j-1} - u_{i,j}}{R_4} = 0 \quad (7)$$

onde, R_k são as resistências dos resistores da malha resistiva e os i_k são as correntes que chegam no nó avaliado.

Isolando $u_{i,j}$ em (7), é obtido:

$$u_{i,j} = \frac{\left(\frac{u_{i+1,j}}{R_1} + \frac{u_{i-1,j}}{R_2} + \frac{u_{i,j+1}}{R_3} + \frac{u_{i,j-1}}{R_4} \right)}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)} \quad (8)$$

Considerando que a resistência R de um determinado resistor pode ser representada pela expressão $R = \rho \frac{l}{A}$, onde l é o comprimento do resistor, A é a sua área de seção reta e ρ é a resistividade do resistor, e que todos os eletrodos possuem a mesma geometria, a equação (8) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$u_{i,j} = \frac{\left(\frac{u_{i+1,j}}{\rho_1} + \frac{u_{i-1,j}}{\rho_2} + \frac{u_{i,j+1}}{\rho_3} + \frac{u_{i,j-1}}{\rho_4} \right)}{\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4} \right)} \quad (9)$$

Lembrando que a resistividade é o inverso da condutividade, a expressão (9) pode ser reescrita utilizando a equação (10) apresentada a seguir, extraída do anterior do autor desta tese (MARTINS et al., 2015):

$$u_{i,j} = \left[\frac{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j}) + (\sigma_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-1,j}) + (\sigma_{i,j+\frac{1}{2}} u_{i,j+1}) + (\sigma_{i,j-\frac{1}{2}} u_{i,j-1})}{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j} + \sigma_{i-\frac{1}{2},j} + \sigma_{i,j+\frac{1}{2}} + \sigma_{i,j-\frac{1}{2}})} \right] \quad (10)^5$$

⁵ o erro associado a equação (10) é de $O(h^2)$.

onde, $\sigma_{i+\frac{1}{2},j}$, $\sigma_{i-\frac{1}{2},j}$, $\sigma_{i,j+\frac{1}{2}}$ e $\sigma_{i,j-\frac{1}{2}}$, são os valores da condutividade em pontos localizados centralmente entre os pontos (i,j) e $(i+1,j)$, (i,j) e $(i-1,j)$, (i,j) e $(i,j+1)$ e (i,j) e $(i,j-1)$, respectivamente. A condutividade nesses pontos pode ser obtida através do cálculo da média harmônica da condutividade entre as regiões adjacentes avaliadas. Portanto, a condutividade no ponto médio entre os pontos $(i+a,j+b)$ e o ponto (i,j) , sendo a e b números inteiros quaisquer, é dada por:

$$\sigma_{i+\frac{a}{2},j+\frac{b}{2}} = \frac{(\sigma_{i+a,j+b}\sigma_{i,j})}{\left(\frac{\sigma_{i+a,j+b} + \sigma_{i,j}}{2}\right)} \quad (11)$$

Quanto às derivadas na direção normal a $\partial\Omega$, sua discretização pode ser realizada de maneiras diversas. Neste trabalho, a discretização das derivadas no contorno da região foi realizada por meio do emprego da relação (12) apresentada a seguir:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \vec{n} \cdot \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \vec{i} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \vec{j} \right) \quad (12)$$

O vetor unitário \vec{n} em coordenadas cartesianas é definido como $\vec{n} = [\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}]$, onde θ é o ângulo entre o vetor \vec{n} e o eixo da coordenada x no plano.

Em relação à discretização do contorno, nos pontos onde não havia presença de eletrodos de injeção de corrente, a derivada normal à superfície do potencial foi considerada como possuindo valor zero. Assim, quatro discretizações para o contorno, dependendo do lado do retângulo considerado, foram obtidas. Para facilitar a compreensão das discretizações, cada lado foi chamado de L1, L2, L3 e L4, como mostrado na Figura 5 apresentada a seguir.

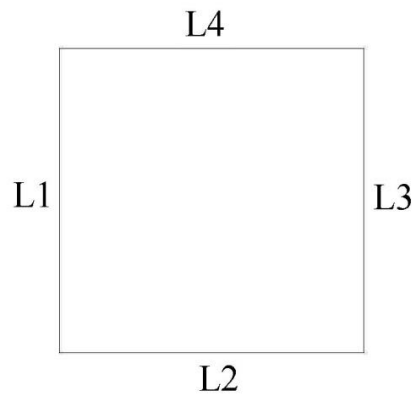


Figura 5: Rótulos atribuídos a cada um dos lados da região avaliada.

Para um ponto localizado no lado L1, onde não está sendo injetada corrente elétrica, considerando um *ponto fantasma* nas imediações do domínio e utilizando as equações (10) e o (12) o valor do potencial $u_{0,j}$ pode ser aproximado por:

$$u_{0,j} = \left[\frac{2(\sigma_{\frac{1}{2},j} u_{1,j}) + (\sigma_{0,j+\frac{1}{2}} u_{0,j+1}) + (\sigma_{0,j-\frac{1}{2}} u_{0,j-1})}{(2\sigma_{\frac{1}{2},j} + \sigma_{0,j+\frac{1}{2}} + \sigma_{0,j-\frac{1}{2}})} \right] , \quad (13)$$

Para um ponto localizado no lado L3, o valor do potencial $u_{n,j}$ pode ser aproximado por:

$$u_{n,j} = \left[\frac{2(\sigma_{n-\frac{1}{2},j} u_{n-1,j}) + (\sigma_{n,j+\frac{1}{2}} u_{n,j+1}) + (\sigma_{n,j-\frac{1}{2}} u_{n,j-1})}{(2\sigma_{n-\frac{1}{2},j} + \sigma_{n,j+\frac{1}{2}} + \sigma_{n,j-\frac{1}{2}})} \right] . \quad (14)$$

Para um ponto localizado no lado L2, o valor do potencial $u_{i,0}$ pode ser aproximado por:

$$u_{i,0} = \left[\frac{2(\sigma_{i,\frac{1}{2}} u_{i,1}) + (\sigma_{i+\frac{1}{2},0} u_{i+1,0}) + (\sigma_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-1,0})}{(2\sigma_{i,\frac{1}{2}} + \sigma_{i+\frac{1}{2},0} + \sigma_{i-\frac{1}{2},j})} \right] , \quad (15)$$

Para um ponto localizado no lado L4, o valor do potencial $u_{i,m}$ pode ser aproximado por:

$$u_{i,m} = \left[\frac{2(\sigma_{i,m-\frac{1}{2}} u_{i,m-1}) + (\sigma_{i+\frac{1}{2},m} u_{i+1,m}) + (\sigma_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-1,m})}{(2\sigma_{i,m-\frac{1}{2}} + \sigma_{i+\frac{1}{2},m} + \sigma_{i-\frac{1}{2},j})} \right] , \quad (16)$$

onde, n e m são, respectivamente, o número de linhas e colunas da matriz de condutividade.

Combinando novamente as expressões (10) e (12) para pontos no contorno onde está sendo injetada corrente elétrica, a aproximação do potencial $u_{0,j}$ para L1 é dada por:

$$u_{0,j} = \left[\frac{2(\sigma_{\frac{1}{2},j}u_{1,j}) + (\sigma_{0,j+\frac{1}{2}}u_{0,j+1}) + (\sigma_{0,j-\frac{1}{2}}u_{0,j-1}) + 2h\left(\frac{I}{\sigma_{0,j}A}\right)}{(2\sigma_{\frac{1}{2},j} + \sigma_{0,j+\frac{1}{2}} + \sigma_{0,j-\frac{1}{2}})} \right], \quad (17)$$

a aproximação do potencial $u_{n,j}$ para L3 é dada por:

$$u_{n,j} = \left[\frac{2(\sigma_{n-\frac{1}{2},j}u_{n-1,j}) + (\sigma_{n,j+\frac{1}{2}}u_{n,j+1}) + (\sigma_{n,j-\frac{1}{2}}u_{n,j-1}) + 2h\left(\frac{I}{\sigma_{n,j}A}\right)}{(2\sigma_{n-\frac{1}{2},j} + \sigma_{n,j+\frac{1}{2}} + \sigma_{n,j-\frac{1}{2}})} \right], \quad (18)$$

a aproximação do potencial $u_{i,0}$ para L2 é dada por:

$$u_{i,0} = \left[\frac{2(\sigma_{n-\frac{1}{2},j}u_{n-1,j}) + (\sigma_{n,j+\frac{1}{2}}u_{n,j+1}) + (\sigma_{n,j-\frac{1}{2}}u_{n,j-1}) + 2h\left(\frac{I}{\sigma_{i,0}A}\right)}{(2\sigma_{n-\frac{1}{2},j} + \sigma_{n,j+\frac{1}{2}} + \sigma_{n,j-\frac{1}{2}})} \right], \quad (19)$$

e a aproximação do potencial $u_{i,m}$ para L4 é dada por:

$$u_{i,m} = \left[\frac{2(\sigma_{n-\frac{1}{2},j}u_{n-1,j}) + (\sigma_{n,j+\frac{1}{2}}u_{n,j+1}) + (\sigma_{n,j-\frac{1}{2}}u_{n,j-1}) + 2h\left(\frac{I}{\sigma_{i,m}A}\right)}{(2\sigma_{n-\frac{1}{2},j} + \sigma_{n,j+\frac{1}{2}} + \sigma_{n,j-\frac{1}{2}})} \right], \quad (20)$$

onde, h é a distância entre dois pontos adjacentes no domínio, I é a corrente elétrica nos eletrodos de injeção e A é a área da superfície de contato dos eletrodos com o domínio.

4.2. Análise das Reconstruções

É difícil quantificar a precisão de métodos numéricos para a reconstrução de imagens, tendo em vista que cada método pode ser implementado de diversas maneiras diferentes (WRIGHT, 2003). Todavia, o estudo aqui apresentado tem como um dos seus objetivos avaliar duas abordagens via SA para solução do problema inverso da TIE. Por isso, alguns parâmetros serão definidos de modo a fazer uma

análise quantitativa das soluções obtidas pelos métodos de otimização estudados e a comparação entre reconstruções produzidas por diferentes métodos.

Quando o domínio a ser visualizado não é conhecido, a qualidade das reconstruções pode ser aferida através do valor da função objetivo, ou seja, quanto menor for o valor da função objetivo, melhor (teoricamente) será a reconstrução. No entanto, para duas diferentes reconstruções, em que o valor final da função objetivo é o mesmo, a qualidade das reconstruções pode ser diferente. Como o domínio que se deseja visualizar não é conhecido, é impossível saber qual das duas reconstruções é a melhor. Por outro lado, algumas vezes, com o objetivo de testar diferentes estratégias de inversão numérica, é possível reconstruir imagens de domínios conhecidos. Essa estratégia pode ser melhor explorada quando os testes são realizados com dados gerados através de um modelo numérico, pois é possível utilizar ferramentas estatísticas para comparar os domínios reconstruídos com os domínios empregados para gerar os dados de potencial.

A complexidade para correlacionar dois conjuntos de dados pode ser reduzida através do cálculo do *Coefficiente de Correlação de Pearson* (CCP). No ano de 1885, estudos empíricos e teóricos realizados por Sir Francis Galton definiram a regressão e a correlação como tópicos da área da estatística (LEE RODGERS & NICEWANDER, 1988). Em 1895, Karl Pearson publicou um trabalho onde ele definiu o Coeficiente de Correlação de Pearson (PEARSON, 1895). O CCP é largamente empregado em análise estatística, reconhecimento de padrões e processamento de imagens digitais (YEN et al., 1996). No tratamento de imagens digitais, o CCP pode ser utilizado de modo a medir o grau de correlação entre duas imagens. Sendo que, quando o CCP for igual a 1 as duas imagens são exatamente iguais, quando o CPP for igual a 0 não há correlação entre as imagens e quando o CPP for igual a -1 as duas imagens são completamente anti-correlacionadas, ou seja, uma é o negativo da outra. Matematicamente, o CCP é definido por meio da seguinte expressão:

$$CCP = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\sigma_{i,j}^{real} - \sigma_{média}^{real}) \cdot (\sigma_{i,j}^{reconstruída} - \sigma_{média}^{reconstruída}) \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\sigma_{i,j}^{real} - \sigma_{média}^{real})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\sigma_{i,j}^{reconstruída} - \sigma_{média}^{reconstruída})^2}} \quad (20)$$

onde n e m representam, respectivamente, o número de linhas e colunas do domínio.

Para exemplificar como o CCP pode representar a similaridade entre as reconstruções e os domínios empregados para obter as medidas, ele foi usado de modo a comparar três domínios sintéticos: C1, C2 e C3. Os domínios são apresentados na Figura 6 e os valores de *CCP* calculados são apresentados na Tabela 1. As matrizes que compõem os domínios possuem valores que variam continuamente de 2 até 5.

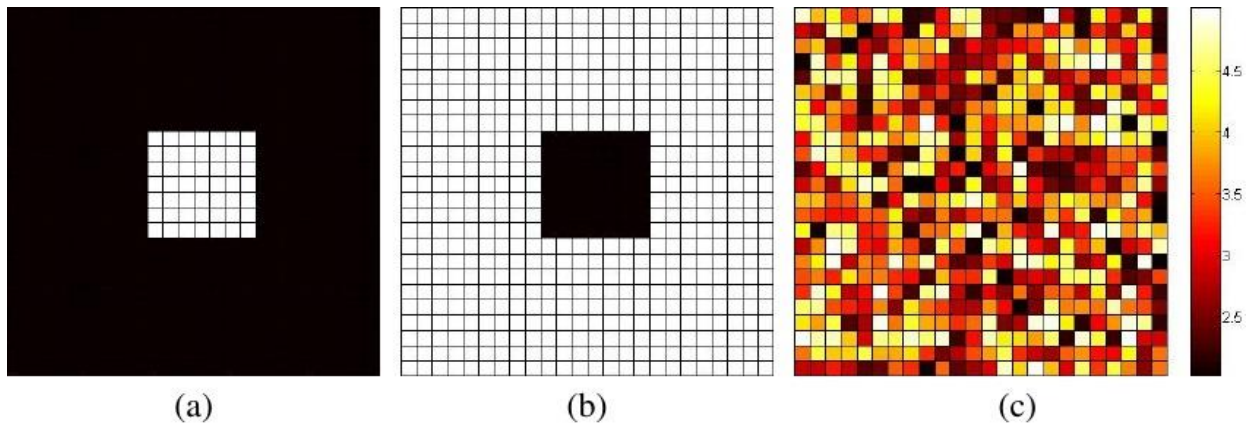


Figura 6: a) Domínio C1; b) domínio C2; c) domínio C3.

Tabela 1: CCP calculado para comparação dos domínios da Figura 6.

Comparação entre	CCP
C1 e C1	1,00
C1 e C2	-1,00
C1 e C3	0,02

Quando duas distribuições de condutividade são exatamente iguais, o *CCP* deve ser igual a 1. Isso é apresentado na primeira linha da Tabela 1, através do cálculo da correlação entre uma distribuição consigo mesma, a saber, C1 e C1. Quando duas distribuições possuem o mesmo aspecto geométrico, mas valores simétricos de condutividade, o *CCP* tem valor igual a -1. Este aspecto é mostrado na segunda linha da Tabela 1, com o cálculo do *CCP* para as distribuições C1 e C2. Na terceira linha da Tabela 1, foi apresentado o *CCP* entre a distribuição C1 e a distribuição aleatória C3. O valor obtido foi aproximadamente 0, pois não existe correlação entre C1 e C3.

Valores extremos para o CPP são incomuns, normalmente são encontrados valores intermediários entre 0 e 1, por isso é importante estabelecer uma nomenclatura para poder interpretar esses valores. Para Dancey e Reidy (2007), valores de *CCP* entre 0,0 e 0,3 correspondem a uma fraca correlação entre as variáveis; para valores de 0,3 até 0,7 a correlação é considerada moderada; e para valores entre 0,7 e 1,0 a correlação é considerada forte.

O método proposto para a reconstrução da imagem é um método absoluto, o que significa que os valores de condutividade das reconstruções devem estar próximos dos valores de condutividade do domínio mapeado. No entanto, para dois domínios com a mesma geometria, mesmo que os valores de condutividade sejam diferentes, o valor da correlação continua sendo aproximadamente 1. Essa é a única ressalva em relação ao emprego do CPP para avaliar as reconstruções, pois o seu valor depende somente da “semelhança” geométrica entre as reconstruções e os domínios mapeados. Por isso, uma segunda métrica de qualidade visual foi utilizada, de modo a complementar o estudo das reconstruções.

O *Structural Similarity Index* (SSIM) é uma métrica de qualidade visual utilizada para medir a similaridade entre duas imagens. Essa métrica calcula a qualidade de uma imagem com base em três características importantes da imagem original e da imagem teste. Essas características são a luminância, o contraste e a estrutura (WANG ZHOU et al., 2004).

Como forma de apresentar o comportamento do SSIM para a análise das reconstruções, ele foi empregado para comparar os domínios C1, C2, e C3 da Figura 6. Os resultados obtidos estão organizados na Tabela 2, apresentada a seguir.

Tabela 2: SSIM calculado para comparação dos domínios da Figura 1.

Comparação entre	SSIM
C1 e C1	1,00
C1 e C2	0,55
C1 e C3	0,09

Os valores de SSIM calculados para a comparação dos domínios C1-C1 e C1-C3 são aproximadamente iguais aos valores de CCP calculados para a

comparação dos mesmos domínios. No entanto, para os valores calculados para a comparação dos domínios C1-C2, a diferença entre os valores das duas métricas de análise de imagens é considerável. Essa diferença ocorre porque o SSIM pondera o contraste e a luminância na comparação de duas imagens.

Para mostrar como o SSIM pode complementar a análise das reconstruções, ele foi utilizado para comparar o domínio C4 com o domínio C1. O domínio C4 é geometricamente igual ao domínio C1, no entanto o quadrado central possui 3,0 u.m.c enquanto que a mesma região em C1 possui 5,0 u.m.c. O CCP calculado para a comparação dos dois domínios é igual a 1,00 e o valor do SSIM calculado para a mesma comparação é igual a 0,70. Ou seja, o SSIM reconhece a diferença de escala entre os objetos.

A utilização dos dois parâmetros de comparação de imagens visa contemplar isoladamente aspectos da acurácia das reconstruções, com o emprego do CCP, e de forma conjunta aspectos geométricos e de condutividade, com o emprego do SSIM.

Além da similaridade com o domínio de interesse, para avaliar a eficiência dos métodos de otimização, também é necessário estimar o custo computacional de cada método. O custo computacional está relacionado ao tempo necessário para obter as reconstruções. Por isso, foi determinado o tempo que cada método estudado necessita para atualizar completamente o domínio de condutividade. Quando todos os parâmetros de condutividade do domínio são atualizados, um ciclo do método de otimização é completado. Esse ciclo é chamado de iteração.

O estudo do custo computacional dos métodos testados foi realizado por meio da comparação do tempo médio de cada iteração. Basicamente, quanto menor o resultado do produto entre o tempo médio de cada iteração e o número total de iterações para produzir uma determinada reconstrução, menor será o custo computacional do método analisado.

4.3. Ensaios realizados

4.3.1. Geração do Modelo Virtual

Para iniciar os testes dos métodos de inversão numérica, no ambiente virtual Matlab® versão R2007a, foi desenvolvido um algoritmo para implementar o MDF e o SA. Por meio do algoritmo desenvolvido, a viabilidade do método proposto para a solução do problema inverso da TIE foi testada, comparando-o com os resultados obtidos utilizando a abordagem de Herrera (2007). Para isso, três domínios (modelo virtual) foram gerados computacionalmente com distribuições heterogêneas de condutividade. Em cada domínio, a solução do problema direto foi aproximada numericamente, considerando doze diferentes padrões de corrente injetados no seu contorno.

Cada modelo virtual gerado computacionalmente é um quadrado composto por 576 elementos quadrados. Em cada lado do quadrado, quatro eletrodos estão distribuídos, totalizando dezesseis eletrodos distribuídos ao longo do contorno $\partial\Omega$ do domínio, como mostrado na Figura 7.

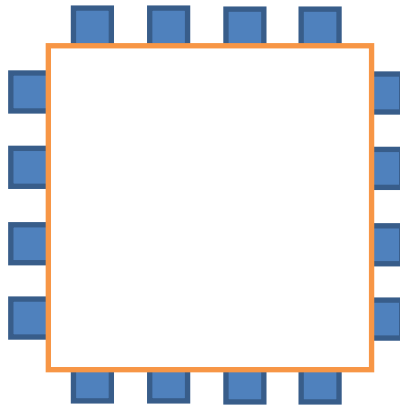


Figura 7: Disposição dos eletrodos no contorno da região avaliada.

As distribuições de condutividade definidas *a priori* possuem dois diferentes valores de condutividade. Elas estão representadas na Figura 8.

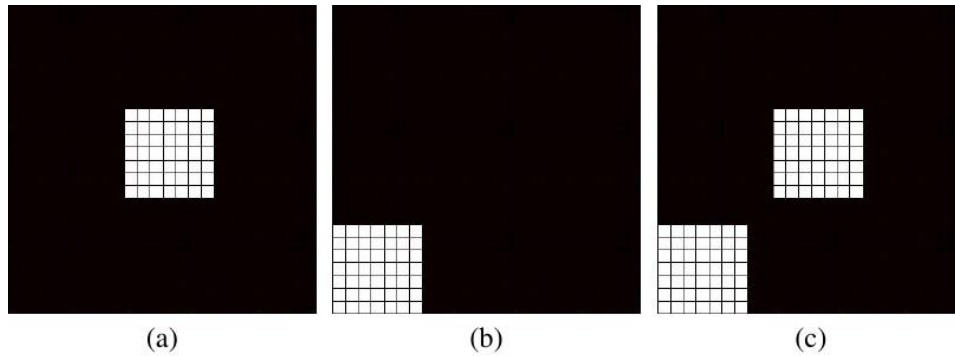


Figura 8: Distribuições de condutividade utilizadas para solução do problema inverso. A região em branco possui condutividade igual a 5,0 unidades de medida de condutividade (u.m.c.) e a região de cor preta possui condutividade igual a 2,0 u.m.c.. a) Domínio D1, b) domínio D2 e c) domínio D3.

Como já mencionado, duas diferentes estratégias foram adotadas para a solução do sistema de equações resultante da discretização do domínio pelo MDF: O método SOR e o Método de Gauss-Seidel. Os dois métodos foram comparados quanto ao tempo computacional e potenciais calculados no contorno, para as distribuições de condutividade da Figura 8.

Em relação ao padrão de injeção de corrente no contorno, o padrão adjacente foi escolhido para realizar os testes, por ser aquele onde são obtidas o maior número de medidas independentes. Utilizando esse padrão de injeção, para o domínio analisado, são obtidos doze conjuntos de medidas, como representado na Figura 9 mostrada a seguir:

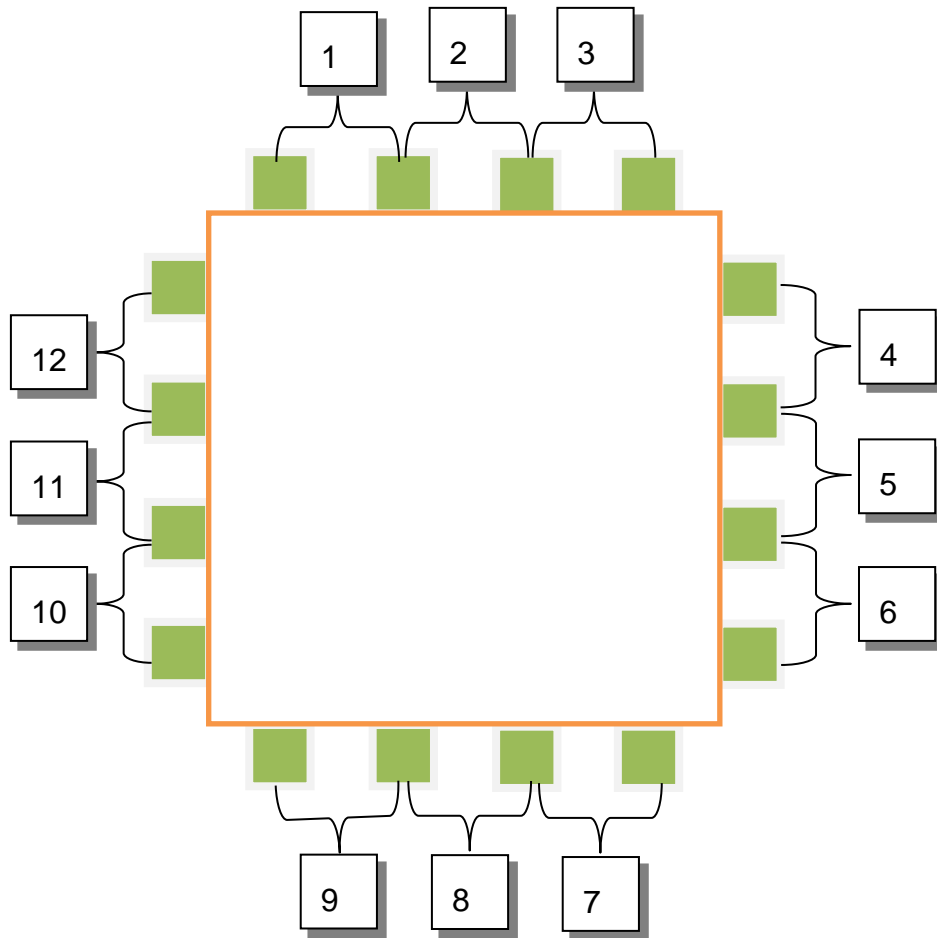


Figura 9: Padrão de injeção de corrente adjacente. Cada número representa um arranjo de injeção de corrente. As chaves representam quais são os pares de eletrodos onde são realizadas as injeções. Como é representado pela figura, para o padrão adjacente, são obtidos doze conjuntos de medidas.

Para a solução do problema inverso, a função erro foi calculada por meio da equação $E(\sigma_k) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^L [V_i - U_i(\sigma_k)]^2$, em que S é o número de pontos nos quais a ddp foi medida no contorno, V_i é o valor de uma determinada ddp medida entre dois eletrodos no contorno e $U_i(\sigma_k)$ é o valor da ddp calculada por meio da solução do problema direto, entre dois eletrodos, para uma distribuição de condutividade qualquer σ_k .

O parâmetro T_{k+1} foi calculado pela expressão $T_{k+1} = 0,9999 \cdot T_k$, enquanto o escalar α^k foi atualizado a cada iteração k através da expressão (6).

A solução do problema direto foi realizada para as distribuições de condutividade da Figura 8. Os resultados foram então empregados para testar o

método de inversão proposto neste trabalho⁶, sendo uma maneira de simular medidas realizadas no contorno.

A dificuldade de comparar diferentes métodos numéricos de reconstrução de imagens não ocorre somente porque cada método pode ser implementado de maneiras diversas, mas também porque é difícil determinar os parâmetros empíricos de entrada que maximizam a eficiência do método de otimização empregado. Obviamente, é muito improvável, ou mesmo impossível, obter de forma empírica os parâmetros ótimos de cada método. Apesar disso, é possível testar um pequeno conjunto de parâmetros e determinar dentro do conjunto, aqueles parâmetros que fazem as técnicas de inversão estudadas apresentarem os melhores resultados. Por isso, os primeiros testes foram idealizados de modo a tentar definir dentro de um conjunto de parâmetros de entrada, aqueles nos quais as melhores reconstruções eram obtidas, considerando o método proposto neste trabalho e o método de Herrera.

4.3.2. Método Proposto

No método proposto, os parâmetros de condutividade são todos atualizados ao mesmo tempo. Isso só é possível sem o emprego de um termo de regularização, se um filtro gaussiano for aplicado sobre a matriz de perturbação. Por conseguinte, o primeiro teste do método proposto procurou analisar quais os parâmetros do filtro gaussiano desempenham papel importante na qualidade das reconstruções obtidas.

Filtros gaussianos são filtros passa-baixa utilizados para suavizar a imagem de forma ponderada e simétrica. Eles dependem de dois parâmetros: da dimensão da janela, que é determinado pelo tamanho de uma matriz, e do desvio padrão. Esses dois parâmetros determinam os valores de uma matriz denominada máscara. Os valores dessa matriz são gerados a partir de relações matemáticas que, para

⁶ Para evitar o crime de inversão, para gerar as medidas foi utilizado o método iterativo de Gauss-Seidel, enquanto que na solução do problema inverso, foi empregado o método de sobre-relaxação sucessiva com um menor número de iterações.

filtros gaussianos, são calculados através de uma função gaussiana bidimensional com média zero e desvio padrão ζ , como mostrado na relação apresentada a seguir:

$$Gauss(x, y) = \frac{1}{2\pi\zeta^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\zeta^2}} \quad (21)$$

onde x e y são as posições na máscara e $Gauss(x, y)$ dá o valor a ser colocado na posição (x, y) da máscara.

Nos testes do método proposto foram testados três valores para o desvio padrão: 1, 3 e 5. Para cada um dos valores de ζ , o problema inverso foi resolvido para as seguintes dimensões de janela: 5x5, 6x6, 7x7, 8x8, 9x9, 10x10, 15x15, 20x20 e 25x25.

4.3.3. Método de Herrera

Após obter-se as reconstruções, elas foram comparadas por meio do CCP e SSIM de cada uma com seus domínios correspondentes na Figura 4.

No método de Herrera, os valores de condutividade são atualizados individualmente e, para cada atualização, o problema direto é resolvido. Além disso, para um determinado ponto, o valor da condutividade é modificado um número M de vezes antes que um outro ponto do domínio seja modificado.

A qualidade das reconstruções no método de Herrera depende do número M e do número de iterações N_i . Por isso, num segundo momento do trabalho, utilizando o método de Herrera, algumas reconstruções para os domínios da Figura 4 foram obtidas para diferentes valores de N_i e M . Os valores de N_i e M escolhidos para os testes foram: $N_i=1000$ e $M=10$, $N_i=2000$ e $M=5$, $N_i=500$ e $M=20$. Para essas reconstruções, o decréscimo do parâmetro T foi controlado a cada iteração através da expressão $T_{k+1} = 0,9T_k$. O valor inicial escolhido para o parâmetro T foi 0,08 e o valor do passo $\alpha_{i,j}$ foi controlado através da expressão (6).

Utilizando novamente o CCP e o SSIM, as reconstruções obtidas pelo método de Herrera também foram comparadas aos seus domínios correspondentes da Figura 8.

4.3.4. Método Híbrido

Por último, os dois métodos de reconstrução foram empregados de forma conjunta para fazer a solução do problema inverso. Basicamente, o algoritmo proposto iniciou o processo iterativo de modo a diminuir rapidamente o valor da função objetivo. Num segundo momento, o método de Herrera foi utilizado para refinar a solução obtida pelo método proposto. Os valores do desvio padrão e tamanho de janela escolhidos para os testes, foram aqueles que apresentaram os melhores resultados nos testes iniciais para o método proposto. Em relação ao método de Herrera, os valores de M e N utilizados foram, respectivamente, 50 e 3. Para o método proposto, o parâmetro T_{k+1} foi calculado pela expressão $T_{k+1} = 0,9999 \cdot T_k$, enquanto o escalar α^k foi atualizado a cada iteração k , através da expressão (6). No método de Herrera, o valor inicial escolhido para o parâmetro T foi 0,0001, o valor da matriz de passo $\alpha_{i,j}$ foi controlado também através da expressão (6) e o decréscimo do parâmetro T foi controlado através da expressão $T_{k+1} = 0,9T_k$.

4.3.5. Avaliação da Qualidade das Reconstruções

De modo a verificar a qualidade das reconstruções obtidas pelo método híbrido (combinação do método proposto com o método de Herrera), o CCP e o SSIM foram calculados para cada solução realizada e cada reconstrução foi comparada ao seu domínio correspondente na Figura 8.

A avaliação de um método de inversão numérica somente por meio de dados sintéticos pode ser enganosa, especialmente quando um modelo é utilizado tanto para a produção de dados quanto para sua inversão (WIRGIN, 2004). Este fato pode ser atribuído à diferença entre os potenciais elétricos do modelo original e dos domínios reconstruídos tenderem a zero. Isso pode ser observado na Figura 10, onde a evolução da função objetivo é mostrada para uma das reconstruções realizadas pelo método proposto.

4.3.6. Aplicação a Um Sistema Físico

Apesar de ser esperado, esse comportamento não é realista em aplicações práticas, porque o modelo simulado será sempre diferente do sistema físico. Assim,

é necessário avaliar o processo de reconstrução proposto quando aplicado aos dados obtidos a partir de um sistema físico (DE CASTRO MARTINS et al., 2012). A fim de fazer isso, o algoritmo proposto foi utilizado para obter imagens de um plano transversal em um tanque de simulação física. O tanque tem 16 eletrodos acoplados a um sistema de aquisição de dados eletrônicos. Uma fotografia do equipamento é mostrada na Figura 10.



Figura 10: Placa de aquisição de dados e tanque utilizados para o ensaio.

Para a solução do problema direto, foi gerado um domínio computacional de modo a representar geometricamente o aquário e os eletrodos, o qual está representado na Figura 11.

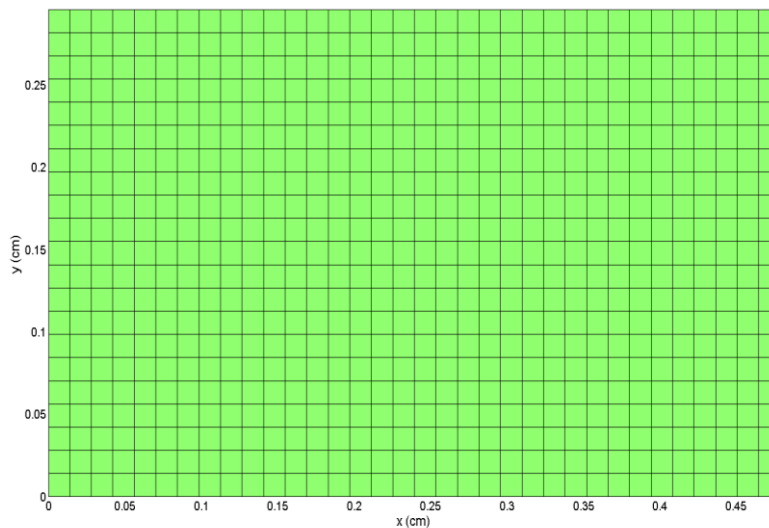


Figura 11: Domínio computacional empregado para representar o plano transversal do aquário, onde estão organizados os eletrodos de injeção de corrente.

O plano transversal analisado do aquário tem formato retangular com 48cm x 30 cm. O domínio computacional foi dividido em 35 colunas e 22 linhas como forma de manter $\Delta x = \Delta y \approx 1,4$ cm, como apresentado na Figura 11.

A distribuição dos eletrodos no contorno é apresentada na Figura 12. Como pode ser observado, os eletrodos ocupam apenas três dos quatro lados do domínio, pois não foram colocados eletrodos na parte superior do aquário.

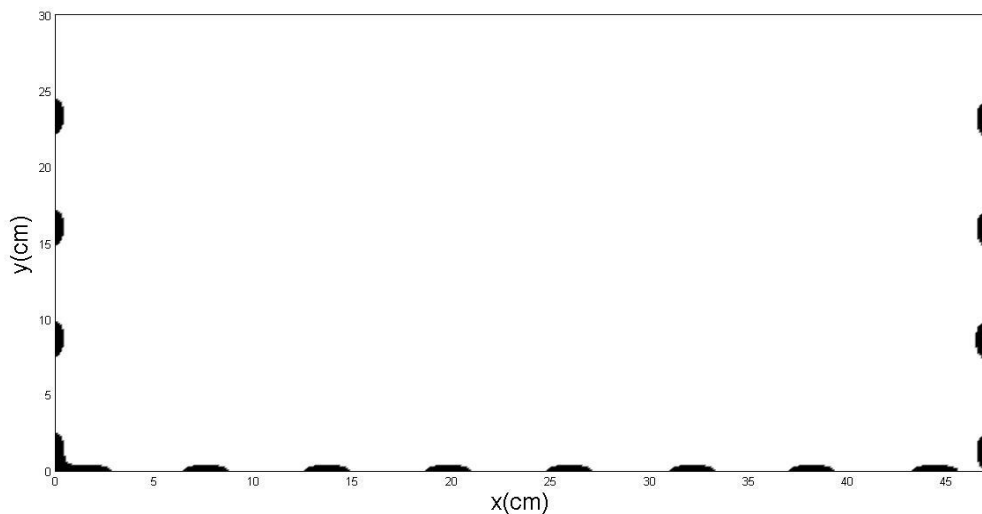


Figura 12: Representação da dimensão e posição dos eletrodos no plano avaliado do aquário (regiões de coloração preta na figura).

Os testes do algoritmo no modelo físico foram feitos em uma primeira etapa para duas situações distintas: um objeto condutor e um objeto isolante imersos em água. Na segunda etapa, foi testada uma distribuição laminar contínua de condutividade, composta de areia e carvão em pó.

No primeiro ensaio com o tanque cheio de água da torneira, um cilindro de latão com 5 cm de base e 11 cm de altura foi colocado dentro do tanque, como apresentado na Figura 13.

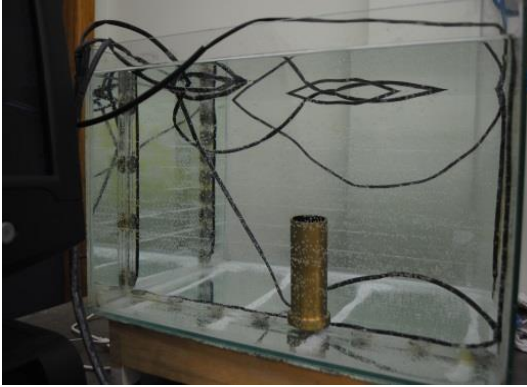


Figura 13: Primeira montagem para testar o método proposto com dados reais.

Para o segundo ensaio, um béquer de vidro foi colocado dentro no tanque, ainda preenchido por água. Na Figura 14 é apresentada uma imagem da montagem.

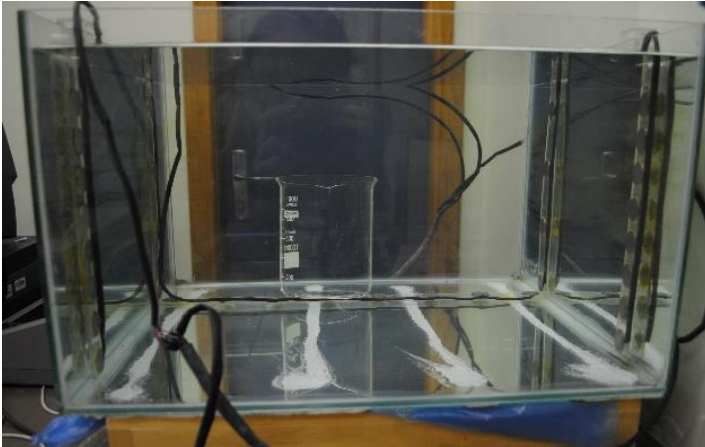


Figura 14: Segunda montagem para testar o método proposto.

No terceiro teste, o tanque foi preenchido com uma camada de areia de construção e uma camada de carvão mineral em pó, ambas preenchidas com água. A água serve como meio condutor para facilitar o fluxo de cargas elétricas entre os eletrodos, os quais estão posicionados nas paredes laterais e no fundo do tanque. A Figura 15 mostra a geometria do sistema, após o tanque ser secado e uma fatia vertical do depósito ter sido removida para permitir a visualização da distribuição de diferentes materiais no plano contendo os eletrodos.



Figura 15: Terceira montagem para testar o método proposto.

No próximo capítulo são apresentados os resultados obtidos para todos os testes realizados no presente trabalho.

5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados são apresentados em quatro partes. Na primeira, são organizados e expostos os resultados obtidos com as duas estratégias de solução do problema direto. Na segunda, é apresentado o algoritmo desenvolvido para programar a versão proposta do SA, com vista de aproximar a solução do problema inverso da TIE. Na terceira, são expostas as reconstruções obtidas com dados “sintéticos”, geradas por meio da solução do problema direto para alguns modelos virtuais. Na quarta parte, são apresentadas as reconstruções obtidas de um tanque de simulação física, através de medidas de potencial elétrico realizadas no contorno de um plano transversal do tanque.

5.1. Problema Direto

O problema direto foi resolvido para as distribuições de condutividade da Figura 8, por meio do emprego do SOR e do método de Gauss-Seidel. As soluções obtidas com o SOR foram realizadas com $\omega = 1,8$ ⁷ e 300 iterações. As soluções realizadas pelo método de Gauss-Seidel foram obtidas com 1200 iterações. O critério de parada utilizado foi uma variação de 0,0005 u.m.p para as ddp calculadas no contorno, entre duas iterações consecutivas. O algoritmo implementado para as soluções encontra-se no Apêndice I. A distribuição de potencial para um dos padrões de injeção de corrente (injeção entre dois eletrodos centrais na parte inferior

⁷ O parâmetro ω pode assumir valores entre 1 e 2. Esse parâmetro é o responsável por fazer o SOR ter maior taxa de convergência que o método de Gauss-Seidel. O valor de $\omega = 1,8$, adotado para a solução do problema direto neste trabalho, foi aquele que apresentou os melhores resultados em alguns ensaios realizados.

do domínio) da solução do problema direto para o domínio D1, é apresentada a seguir, na Figura 16.

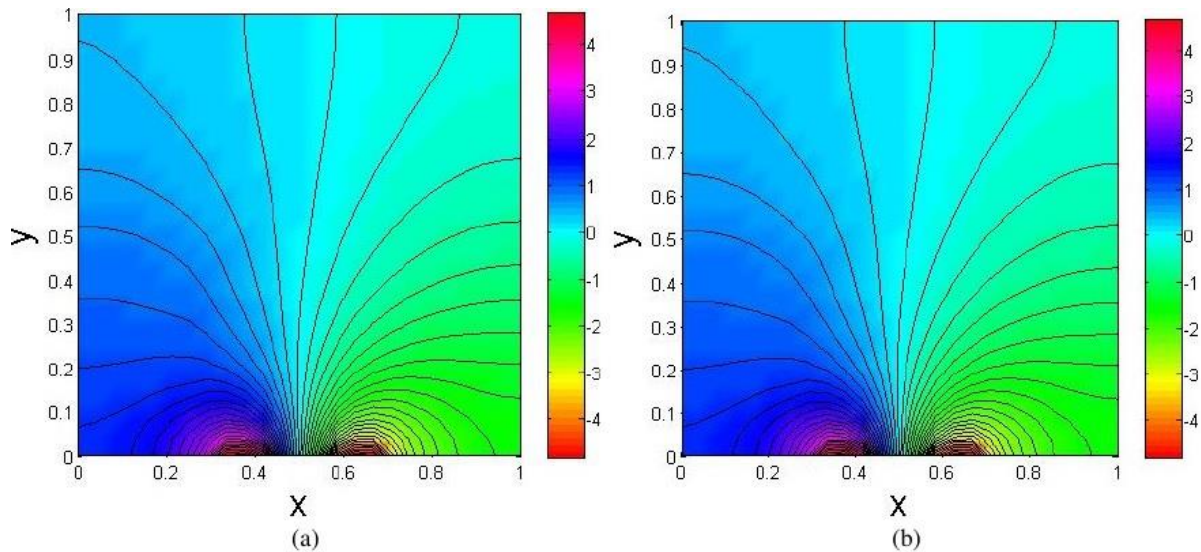


Figura 16: Solução do problema direto utilizando: a) o SOR, com 300 iterações e $\omega=1,8$; a) o método de Gauss-Seidel, com 1200 iterações, para um dos padrões de injeção de corrente no domínio.

Os valores de ddp obtidos para um dos padrões de injeção de corrente no domínio, considerando todos os eletrodos arranjados no contorno, foram organizadas na Tabela 3, apresentada a seguir:

Tabela 3: Valores de ddp em unidades de medida de potencial elétrico (u.m.p), para um dos padrões de injeção de corrente do domínio. Para esse padrão, as ddp foram calculadas para as três distribuições de condutividade da Figura 8, usando o SOR e o método de Gauss-Seidel.

SOR (D1)	Gauss (D1)	Diferença percentual (%)	SOR (D2)	Gauss (D2)	Diferença percentual (%)	SOR (D3)	Gauss (D3)	Diferença percentual (%)
2,894	2,894	0,000	2,650	2,651	0,038	2,715	2,715	0,000
-0,316	-0,316	0,000	-0,483	-0,483	0,000	-0,350	-0,350	0,000
-0,164	-0,164	0,000	-0,160	-0,160	0,000	-0,172	-0,172	0,000
0,645	0,645	0,000	0,643	0,643	0,000	0,657	0,657	0,000
-9,164	-9,163	0,011	-9,078	-9,078	0,000	-9,013	-9,013	0,000
-0,337	-0,337	0,000	-0,502	-0,502	0,000	-0,365	-0,365	0,000
-0,230	-0,230	0,000	-0,225	-0,225	0,000	-0,241	-0,241	0,000
0,467	0,467	0,000	0,463	0,463	0,000	0,480	0,480	0,000
2,790	2,790	0,000	2,793	2,793	0,000	2,814	2,815	0,036
-0,206	-0,206	0,000	-0,205	-0,205	0,000	-0,218	-0,218	0,000
-0,160	-0,159	0,625	-0,156	-0,156	0,000	-0,166	-0,166	0,000
0,198	0,198	0,000	0,197	0,197	0,000	0,205	0,205	0,000

O tempo médio para realizar a solução do problema direto, para todos os padrões de injeção de corrente, ficou em torno de 0,3s para o SOR e 1,30s para o método de Gauss-Seidel. Os testes foram realizados num computador com processador Intel Core 2 Duo, com 3 gigabytes de memória RAM.

Os resultados apresentados na Tabela 2 mostram que as soluções produzidas pelo SOR são aproximadamente iguais às produzidas pelo método de Gauss-Seidel, pois a maior diferença percentual encontrada entre os potenciais foi 0,06%. Por sua vez, tendo em vista a grande diminuição do tempo computacional (cerca de 4 vezes), o SOR é mais indicado para a solução do problema direto que o método de Gauss-Seidel. Além disso, devido à importância do problema direto para a solução do problema inverso, o emprego do SOR poderá ser uma forma de melhorar a qualidade das reconstruções produzidas e/ou diminuir o tempo computacional para obtê-las.

Na seção seguinte, é apresentado o algoritmo proposto com vista a implementar a abordagem do AS, proposta no presente trabalho.

5.2. Problema Inverso - SA aplicado a TIE: a abordagem proposta

A solução do problema inverso da TIE utilizando o SA foi realizada modificando-se todos os parâmetros de condutividade do domínio ao mesmo tempo. Para isso, é necessário definir um passo $\Delta\sigma$, o qual é obtido através do produto dos elementos de uma matriz de números aleatórios, que pode ser chamada de matriz de perturbação $D_{M \times N}$, por um escalar α . O escalar α desempenha papel semelhante à matriz $\alpha_{i,j}^k$ na abordagem de Herrera, ou seja, é modificado a cada iteração k de modo a manter o número de aceitação de novas configurações em cerca de 50%. Por sua vez, a matriz de condutividade em uma dada iteração $k+1$, é calculada por meio da seguinte expressão, modificada do trabalho de Corana et al. (1987):

$$\sigma_{i,j}^{k+1} = \sigma_{i,j}^k + \alpha d_{i,j} \quad (21)$$

onde $d_{i,j}$ é um elemento da matriz de passo.

Além da definição da variação da matriz de condutividade a cada iteração, para fazer a solução do problema inverso da TIE, é necessário adicionar informação ao problema, por meio de uma técnica de regularização. Na regularização através da

adição de operadores, como a regularização generalizada de Tikhonov (TIKHONOV e ARSENIN, 1977), o operador de regularização é o termo responsável por garantir a suavidade (regularidade) da solução, fazendo com que o problema inverso se torne bem condicionado. Ele atua de modo a representar a variação espacial dos valores de condutividade. Deste modo, para uma dada iteração, mesmo se a diferença entre a solução do problema direto e dos dados empíricos diminuir, a função a ser minimizada pode ter um acréscimo no seu valor, porque, nessa iteração, o gradiente médio de condutividade pode ser maior em comparação ao valor do gradiente médio na iteração anterior. Por outro lado, quando é realizada a solução do problema inverso da TIE sem empregar regularização, ao final do processo, quando o algoritmo satisfaz o critério de parada, é obtida uma imagem sem qualquer padrão reconhecível. Isso acontece devido, como já referido, ao mau condicionamento do problema inverso e à técnica de ensaios aleatórios empregada. Como o problema aceita diversas soluções matemáticas e, sucessivamente, a matriz de condutividade $\sigma_{m \times n}$ é somada à matriz de perturbação $D_{M \times N}$, ao final do processo de reconstrução, não é obtida uma imagem do domínio avaliado.

Isso pode ser contornado caso a matriz $D_{M \times N}$ passe por um processo de filtragem de altas frequências antes de ser adicionada a $\sigma_{m \times n}$. Esse processo deixa $D_{M \times N}$ mais suave e, por consequência, deixa também $\sigma_{m \times n}$ mais regular, fazendo com que não seja necessário utilizar o operador de regularização. Desta forma, essa abordagem permite a atualização de todos os parâmetros de condutividade do domínio ao mesmo tempo, diminuindo consideravelmente o custo computacional para fazer as reconstruções, quando comparada à abordagem de Herrera et al. (2007).

Além do filtro de altas frequências, a heurística do método proposto também depende da matriz de condutividade na iteração anterior. Neste aprimoramento, os elementos $d_{i,j}$ da matriz de perturbação são multiplicados pelos elementos $\sigma_{i,j}^k$ da matriz de condutividade na iteração anterior. Deste modo, a expressão (21) torna-se:

$$\sigma_{i,j}^{k+1} = \sigma_{i,j}^k + \alpha d_{i,j} \sigma_{i,j}^k \quad (22)$$

Em um trabalho anterior do autor desta tese (MARTINS,2012), também foi empregado um método estocástico como forma de fazer a solução do problema inverso da TIE. Além disso, naquele trabalho também foi utilizado um filtro passa-baixa como forma de manter regular o domínio de condutividade durante a solução. No entanto, o método empregado não era o SA, porque o parâmetro de controle utilizado tinha valor numérico igual a zero.

Modificar todos os parâmetros de condutividade ao mesmo tempo, faz com que a variação da função objetivo seja muito grande a cada iteração. Nesse cenário, a aceitação de soluções piores pode fazer a solução flutuar perto do valor inicial, sem efetivamente diminuir. No entanto, fazer com que o sistema flutue sempre a partir da distribuição de condutividade de “menor energia”, faz com que não seja explorada a principal virtude do SA, que é a capacidade de escapar de mínimos locais. Por isso, neste trabalho, uma modificação nas condições de aceitação do SA original foi adicionada.

Nessa modificação, o sistema sempre parte do valor de condutividade, com o qual foi obtido - a princípio - o menor valor para a função objetivo. No entanto, o valor da função objetivo indexada a essa distribuição de condutividade pode mudar. Portanto, para uma dada iteração k , o valor da função objetivo associada à “melhor” distribuição de condutividade encontrada até o momento, pode ser mais alto do que deveria ser. Sendo assim, nessa iteração, mesmo que o valor da função objetivo não seja menor que o valor mínimo encontrado até o momento, a distribuição de condutividade pode ainda ser aceita.

Essa modificação nas condições do SA original garante o decréscimo da função objetivo e, conjuntamente, a aceitação de soluções piores, necessária para o emprego adequado do SA.

O algoritmo desenvolvido neste trabalho para implementar o método proposto à solução do problema inverso da TIE é apresentado a seguir:

- 1) É calculado o valor de T_k , definido pela equação $T_k = T_0 B$, onde B é uma constante;

- 2) Para uma determinada interação, k , é gerado uma matriz de números aleatórios $D_{M \times N}$, com valores entre -1 e 1;
- 3) Por meio da expressão (6) é calculado o valor do passo α ;
- 4) Um filtro passa-baixa frequência é utilizado sobre a matriz de números aleatórios $D_{M \times N}$, gerando uma nova matriz $D_{M \times N}$;
- 5) Os elementos da matriz de condutividade $\sigma_{i,j}$ são multiplicados pelo passo α e pelos elementos da matriz aleatória $d_{i,j}$;
- 6) A matriz resultante do procedimento anterior é somada à matriz de condutividade atual, dando origem a uma nova distribuição de condutividade $\sigma_{M \times N}^{k+1}$;
- 7) É resolvido o problema direto utilizando a nova matriz de condutividade;
- 8) Calcula-se o valor de $E(\sigma_{k+1})$;
- 9) Calcula-se o valor de P através da equação (15);
- 10) É gerado um número aleatório R entre 0 e 1;
- 11) Se $E(\sigma_{k+1}) < E(\sigma_k)$, é aceita a nova distribuição de condutividade $\sigma_k(M, N)$.
- 12) Se $E(\sigma_{k+1}) > E(\sigma_k)$ e $R < P$, a matriz de condutividade volta a ser aquela onde foi calculado o menor valor para a função $E(\sigma)$. No entanto, o valor da função objetivo é alterado para o valor atual;
- 13) Se $E(\sigma_{k+1}) > E(\sigma_k)$ e $R > P$, é mantida a matriz condutividade $\sigma_k(M, N)$ e o valor da função volta a ser o valor anterior $E(\sigma_k)$;
- 14) O algoritmo volta ao início e é repetido um número m de vezes.

Antes de continuar a discussão, é importante tecer alguns comentários a respeito das diferenças na aplicação do método proposto e do método de Herrera,

de modo a explicar os valores da taxa de variação escolhidos para o parâmetro de controle para cada método. Durante esses comentários, por diversas vezes serão utilizadas palavras como “*maior*” ou “*pequena*”. Quando a frase estiver se referindo ao método proposto, ele estará sendo comparado ao método de Herrera, quando estiver se referindo ao método de Herrera a comparação estará sendo realizada com o método proposto.

No método proposto, o domínio de condutividade é atualizado completamente ao mesmo tempo e, com isso, ocorre um decréscimo do parâmetro de controle T . Sendo assim, a taxa de decréscimo de T deve ser muito pequena, da ordem de 0,01% por iteração. Além disso, como o domínio é completamente modificado, mesmo para pequenos valores de α , a função objetivo tende a variar bastante. Portanto, para que ocorra a aceitação de estados piores, T deve ter um valor inicial elevado, da ordem de 10^1 . De modo diferente, no método de Herrera diversas soluções do problema direto são realizadas e o parâmetro T é atualizado somente quando todo o domínio for completamente percorrido. Nesse caso, o parâmetro de controle deve ter uma taxa de decréscimo menor, da ordem de 10% por iteração. Além disso, como somente um valor de condutividade é modificado a cada iteração, a função objetivo pouco varia. Por isso, o valor inicial para o parâmetro pode ser pequeno, da ordem de 10^{-2} , porque mesmo assim soluções piores podem ser aceitas.

Na seção seguinte são apresentados os resultados dos testes realizados com modelos numéricos.

5.3. Problema Inverso - Testes com modelos virtuais

Os primeiros testes buscaram investigar a relação entre a qualidade das reconstruções com o valor do desvio padrão e a dimensão da janela do filtro gaussiano utilizados. Os resultados obtidos com as diferentes janelas e valores para o desvio padrão, considerando o domínio D1 da Figura 8, foram organizados nas figuras 17, 18 e 19, as quais são apresentadas a seguir.

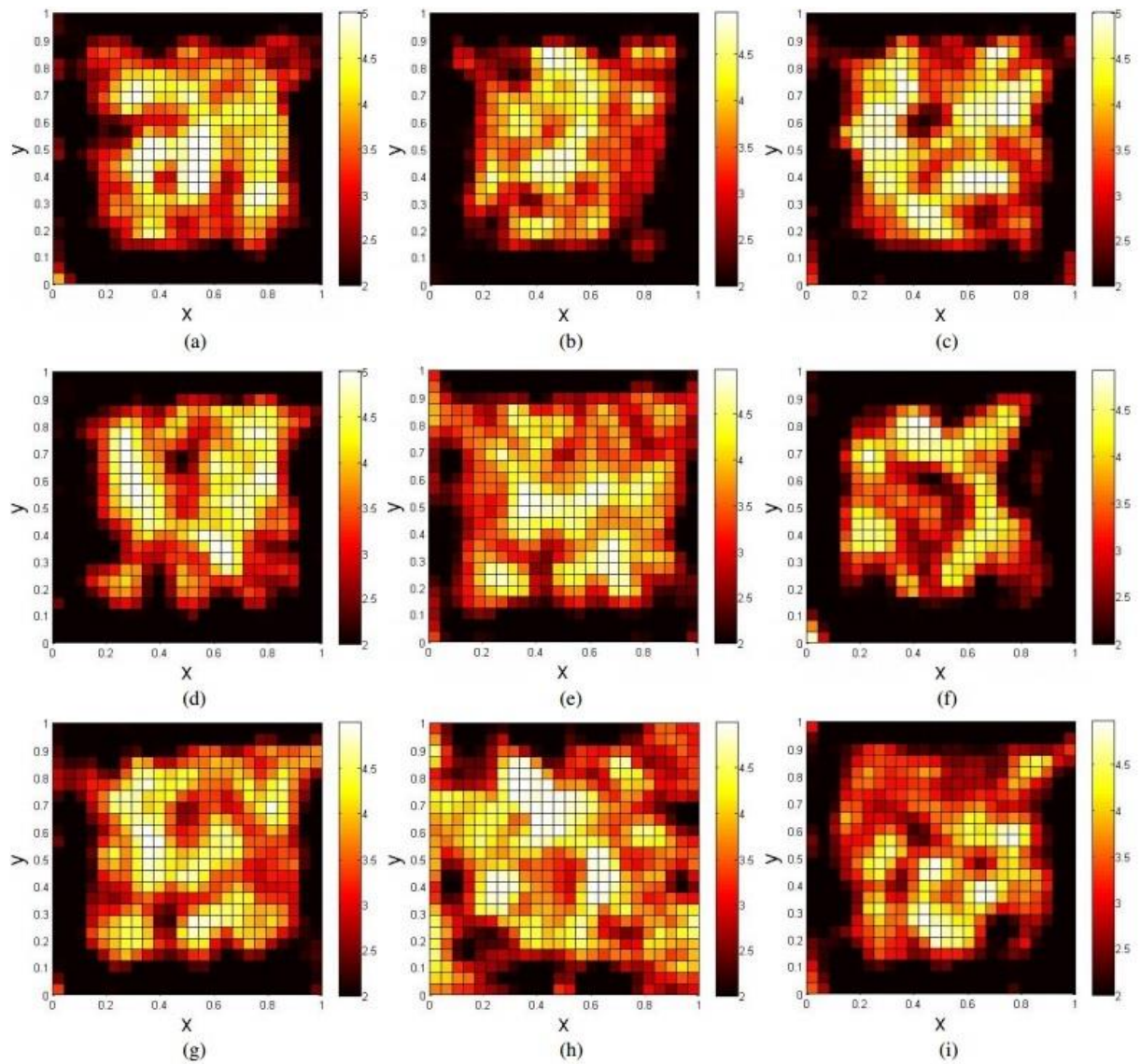


Figura 17: Reconstruções para o domínio $D1$ da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 1. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.

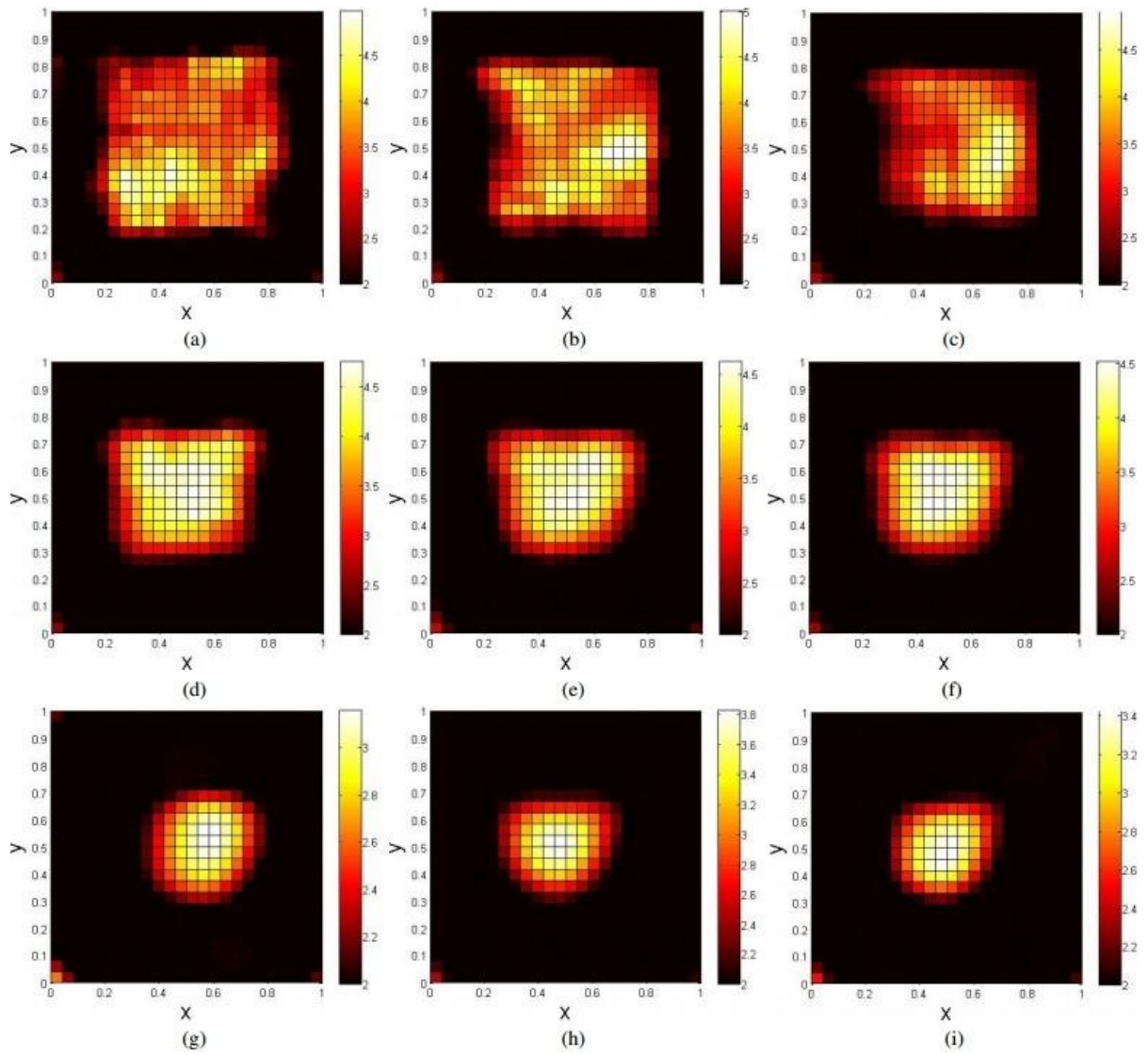


Figura 18: Reconstruções para o domínio $D1$ da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 3. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.

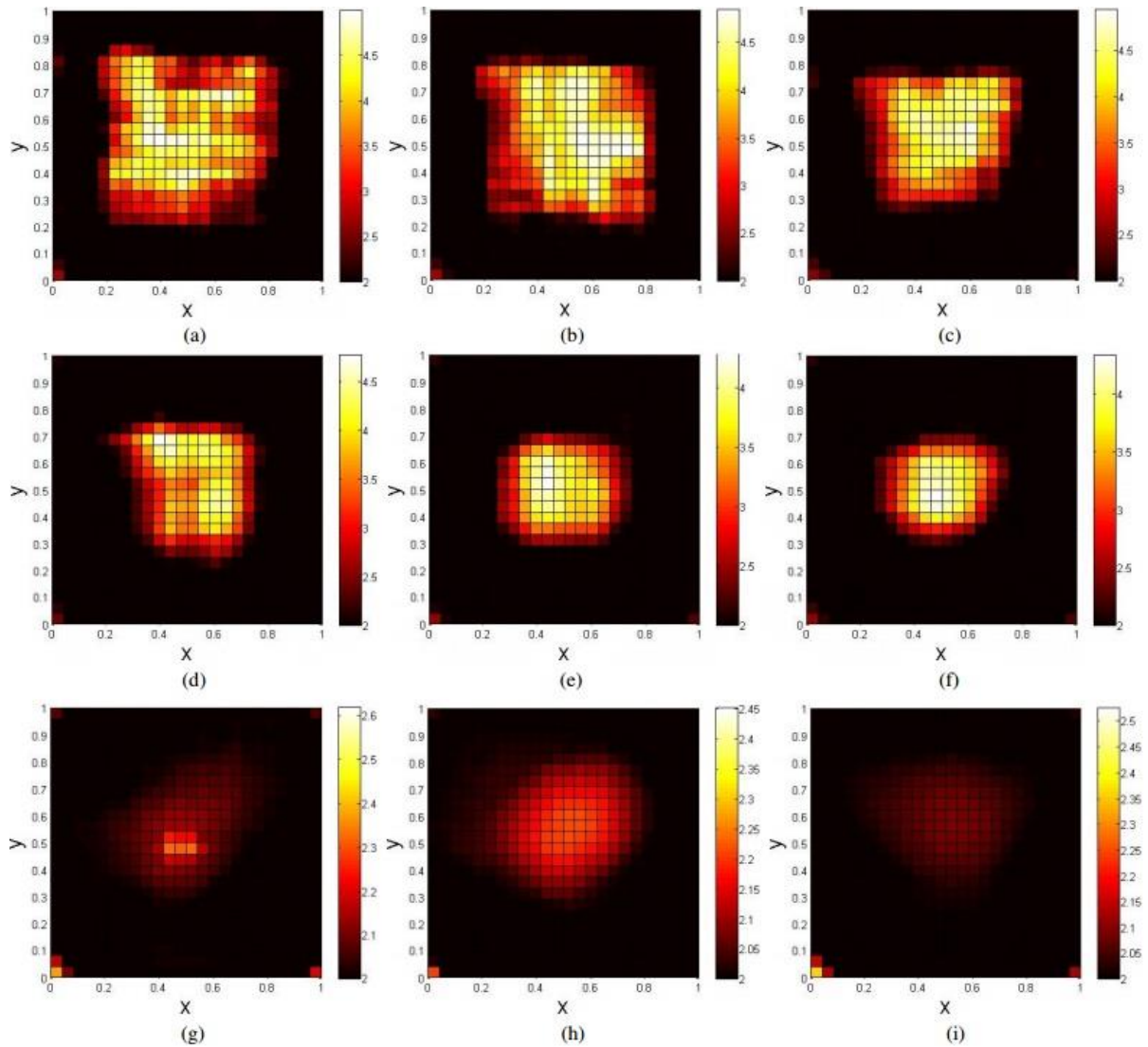


Figura 19: Reconstruções para o domínio D1 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 5. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.

A avaliação e a comparação das reconstruções da Figura 17, da Figura 18 e da Figura 19 foi realizada através do cálculo do CCP e do SSIM, entre as reconstruções e os seus domínios correspondentes na Figura 8. Os valores encontrados para o domínio D1 foram dispostos na Tabela 4, apresentada a seguir.

Tabela 4: CCP e SSIM calculados para reconstruções do domínio D1, realizadas por meio do método proposto, utilizando diferentes janelas e valores de desvio padrão para o filtro gaussiano. Em negrito são destacados os valores mais altos de CCP e SSIM.

Desvio Padrão	1		3		5	
Métrica	CCP	SSIM	CCP	SSIM	CCP	SSIM
5x5	0,391	0,048	0,420	0,083	0,563	0,292
6x6	0,448	0,169	0,469	0,094	0,594	0,215
7x7	0,240	-0,050	0,522	0,181	0,710	0,374
8x8	0,307	0,039	0,737	0,422	0,740	0,443
9x9	0,370	0,134	0,794	0,505	0,848	0,597
10x10	0,192	-0,056	0,830	0,581	0,893	0,649
15x15	0,329	0,108	0,829	0,425	0,510	0,200
20x20	0,243	0,073	0,829	0,505	0,693	0,211
25x25	0,296	0,035	0,865	0,478	0,368	0,182

Considerando a nomenclatura de Dancey e Reidy (2007), com tamanhos de janela iguais ou superiores a 8x8 e desvio padrão igual a 3, foram obtidas reconstruções com forte correlação para o domínio D1. Por sua vez, de todas as dimensões de matrizes para a janela do filtro, o tamanho 25x25 foi aquele em que se obteve a melhor reconstrução, tendo correlação com D1 igual a 0,865.

Para os testes realizados utilizando filtros com desvio padrão igual a 5, foram obtidas reconstruções com forte correlação para o domínio D1, com tamanhos de janela entre 7x7 e 10x10, sendo que a reconstrução que empregou um filtro com desvio padrão igual a 5 e dimensão da janela igual 10x10, foi a que apresentou os valores mais altos de CCP e de SSIM, entre todos os testes realizados com o método proposto para o domínio D1.

Os testes realizados para filtros com desvio padrão igual a 1, não apresentaram bons resultados, tendo em vista que nenhuma reconstrução apresentou forte correlação com o domínio D1.

Mesmo para as melhores reconstruções, os valores obtidos para o SSIM foram intermediários⁸. Possivelmente, esses valores intermediários encontrados ocorreram devido à diferença entre os valores absolutos de condutividade das reconstruções e do domínio D1.

Na Tabela 3 (pág. 62), é possível observar que os valores de potencial calculados pelo método de Gauss-Seidel e pelo método SOR são pouco diferentes para a mesma distribuição de condutividade. Nas reconstruções realizadas essa diferença é ainda maior, pois o SOR foi utilizado com apenas 100 iterações. Isso significa que existe um valor limite para a função objetivo. Valores menores ao valor limite para a função objetivo, não correspondem a uma melhora na qualidade das reconstruções. Considerando as reconstruções do domínio D1 pelo método proposto, os menores valores encontrados para a função objetivo foram próximos a 0,06 (u.m.p)². Considerando a distribuição de condutividade do domínio D1, foi realizado cálculo da função objetivo - valor mínimo - para esse domínio. O valor obtido foi 0,05 (u.m.p)² Isso significa que o método proposto chegou perto do limite teórico da técnica de imagens estudada.

As reconstruções obtidas para o domínio D2 da Figura 8, com diferentes dimensões de janelas e valores para o desvio padrão do filtro gaussiano, foram organizados nas figuras 20, 21 e 22, as quais são apresentadas a seguir

⁸ Para a análise dos valores de SSIM vamos também adotar a nomenclatura de Dancey e Reidy (2007).

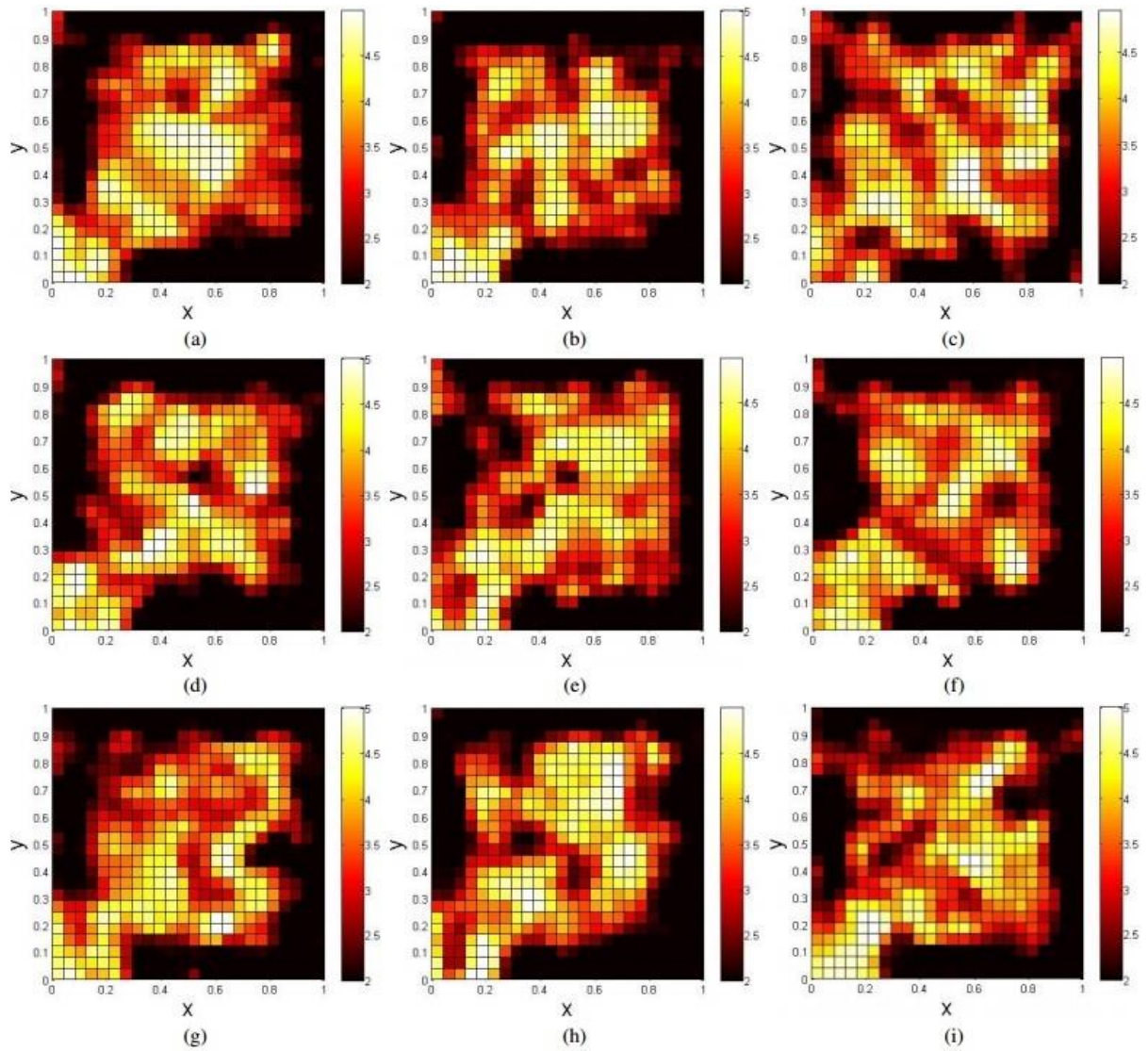


Figura 20: Reconstruções para o domínio $D2$ da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 1. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.

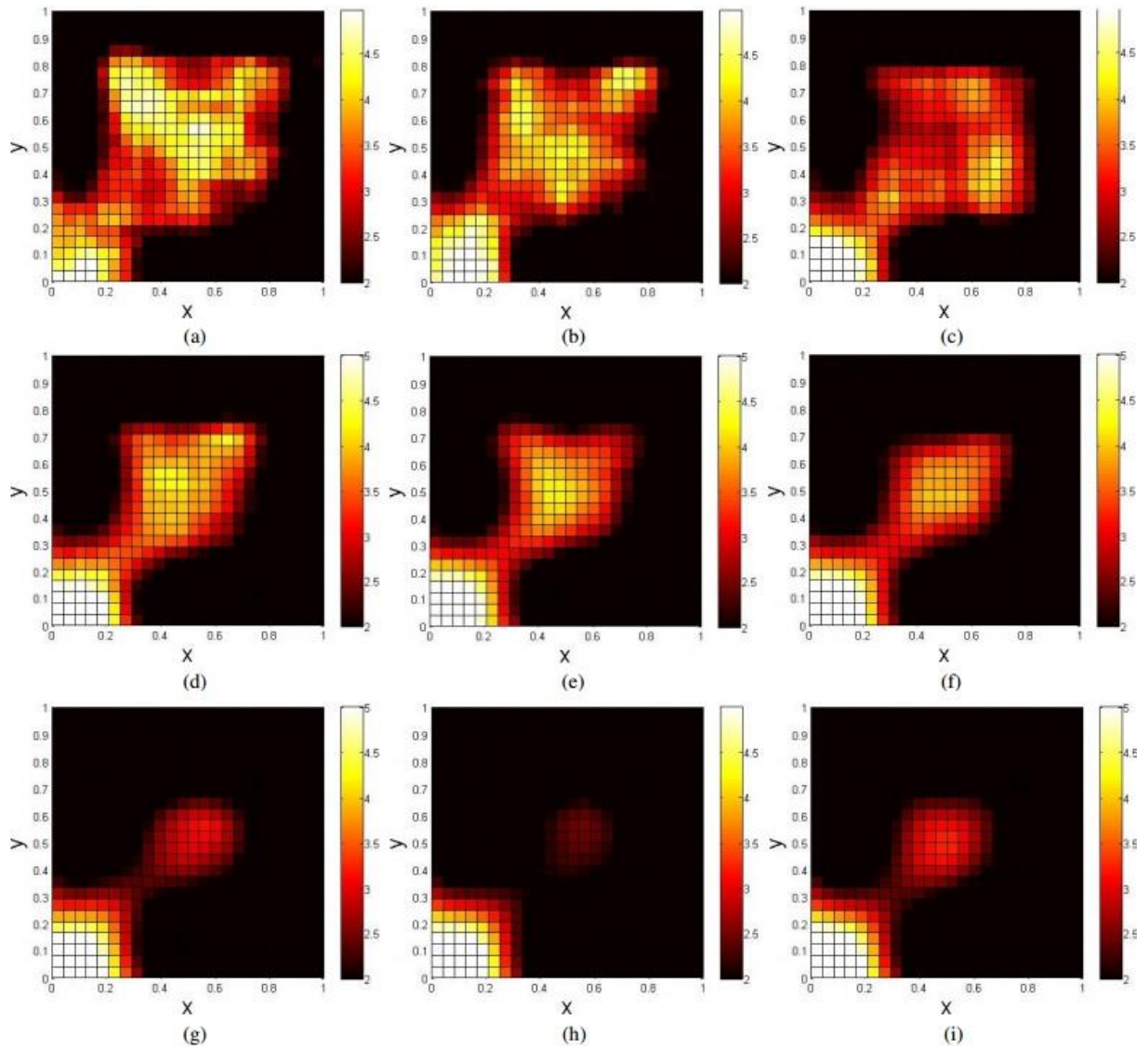


Figura 21: Reconstruções para o domínio D2 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 3. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.

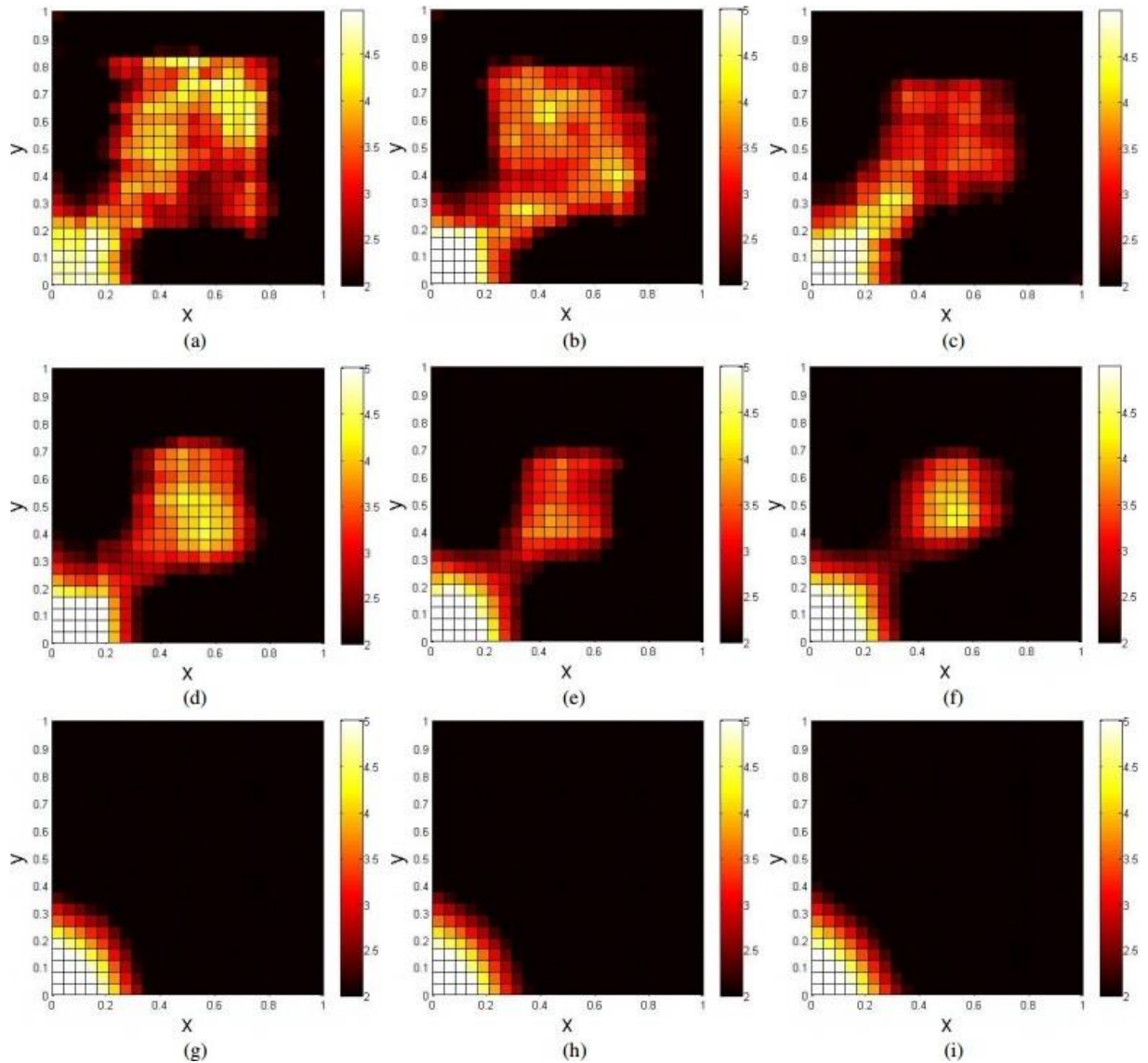


Figura 22: Reconstruções para o domínio D2 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 5. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.

A avaliação e a comparação das reconstruções das figuras 20, 21 e 22 foi novamente realizada através do cálculo do CCP e SSIM, entre as reconstruções e seus domínios correspondentes na Figura 8. Os valores encontrados foram dispostos na Tabela 5, apresentada a seguir.

Tabela 5: CCP e SSIM calculados para reconstruções do domínio D2, realizadas por meio do método proposto, utilizando diferentes janelas e valores de desvio padrão para o filtro gaussiano. Em negrito são destacados os valores mais altos de CCP e SSIM.

Desvio Padrão	1		3		5	
Métrica	CCP	SSIM	CCP	SSIM	CCP	SSIM
5x5	0,269	0,040	0,382	0,093	0,483	0,092
6x6	0,353	0,054	0,534	0,107	0,542	0,120
7x7	0,159	0,046	0,589	0,129	0,721	0,211
8x8	0,350	0,060	0,612	0,150	0,614	0,160
9x9	0,290	0,073	0,659	0,179	0,761	0,307
10x10	0,358	0,075	0,710	0,252	0,726	0,311
15x15	0,326	0,065	0,875	0,526	0,868	0,891
20x20	0,226	0,024	0,916	0,779	0,855	0,887
25x25	0,375	0,088	0,846	0,498	0,837	0,882

Com tamanhos de janela iguais ou superiores a 10x10, foram obtidas reconstruções com forte correlação para o domínio D2, utilizando um filtro gaussiano com desvio padrão igual a 3. Por sua vez, para esse valor de desvio padrão, de todas as dimensões de matrizes para a janela, o tamanho 20x20 foi aquele em que obteve-se o maior valor de CCP, tendo correlação com D2 igual a 0,9160.

Para as reconstruções realizadas com desvio padrão igual a 5, as reconstruções com tamanhos de janela superiores a 8x8 apresentaram forte correlação com o domínio D2. Por sua vez, de todas as reconstruções realizadas com desvio padrão igual a 5, a reconstrução com janela 15x15 foi a que apresentou o maior valor de CCP, tendo correlação com D2 igual a 0,868.

Novamente, os testes realizados para filtros com desvio padrão igual a 1 não apresentaram resultados satisfatórios, pois nenhuma das reconstruções realizadas com esse desvio apresentaram forte correlação com o domínio D2.

Em relação aos valores de SSIM, as reconstruções que apresentaram os valores mais altos para essa métrica, foram as realizadas com desvio padrão igual a 5 e janela igual ou superior a 15x15. Essas reconstruções foram as únicas que não apresentaram artefatos na parte central do domínio. Isso explica os valores de SSIM obtidos. No entanto, é importante salientar que do ponto de vista geométrico, as reconstruções com desvio padrão igual a 5 e janela igual ou superior a 15x15 não conseguiram reproduzir o formato quadrado da região com 5 u.m.c da parte inferior

do domínio D2. Por isso, a reconstrução com janela 20x20 e desvio padrão igual a 3 apresentou o maior valor de CCP.

Para as reconstruções do domínio D2 pelo método proposto, os menores valores encontrados para a função objetivo foram próximos a $0,25 \text{ (u.m.p)}^2$. Para a distribuição de condutividade do domínio D2, foi realizado cálculo do valor mínimo aproximado para a função objetivo. O valor obtido foi $0,15 \text{ (u.m.p)}^2$. Isso significa que o método proposto chegou perto do limite teórico da técnica de imagens estudada.

Nas figuras 23, 24 e 25 apresentadas a seguir, foram organizados os resultados obtidos para as reconstruções do domínio D3 pelo método proposto.

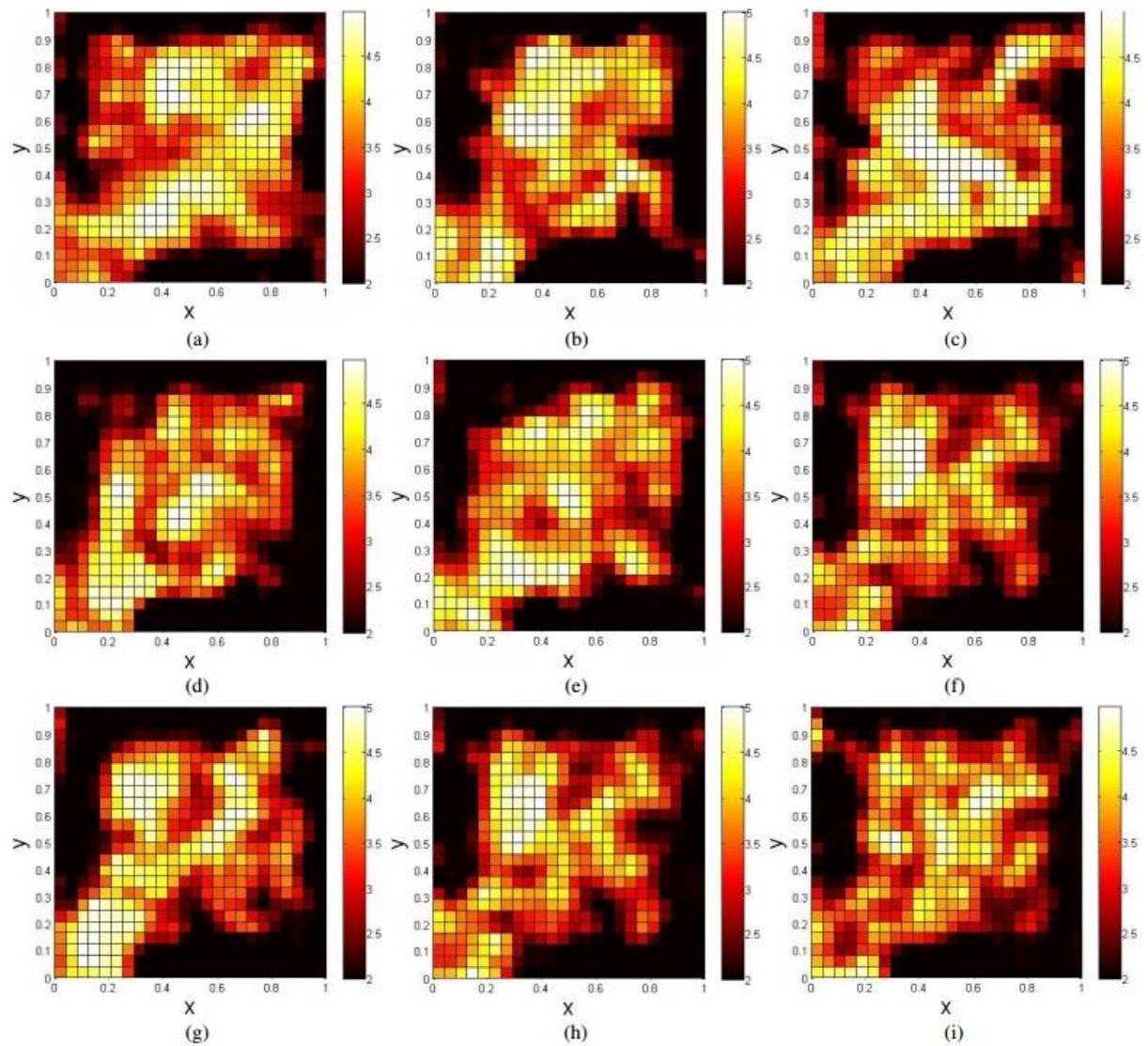


Figura 23: Reconstruções para o domínio D3 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 1. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.

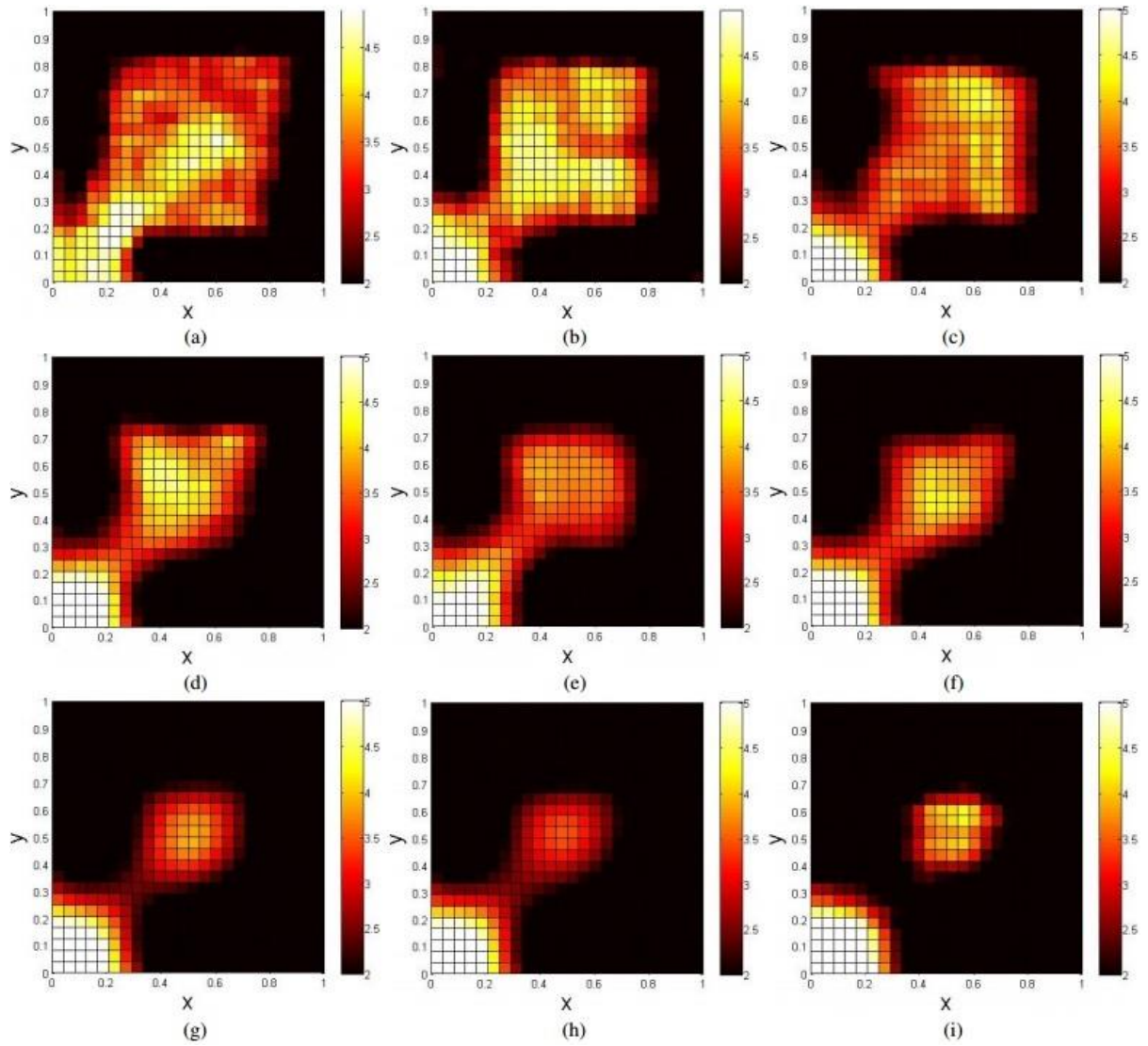


Figura 24: Reconstruções para o domínio D3 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 3. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.

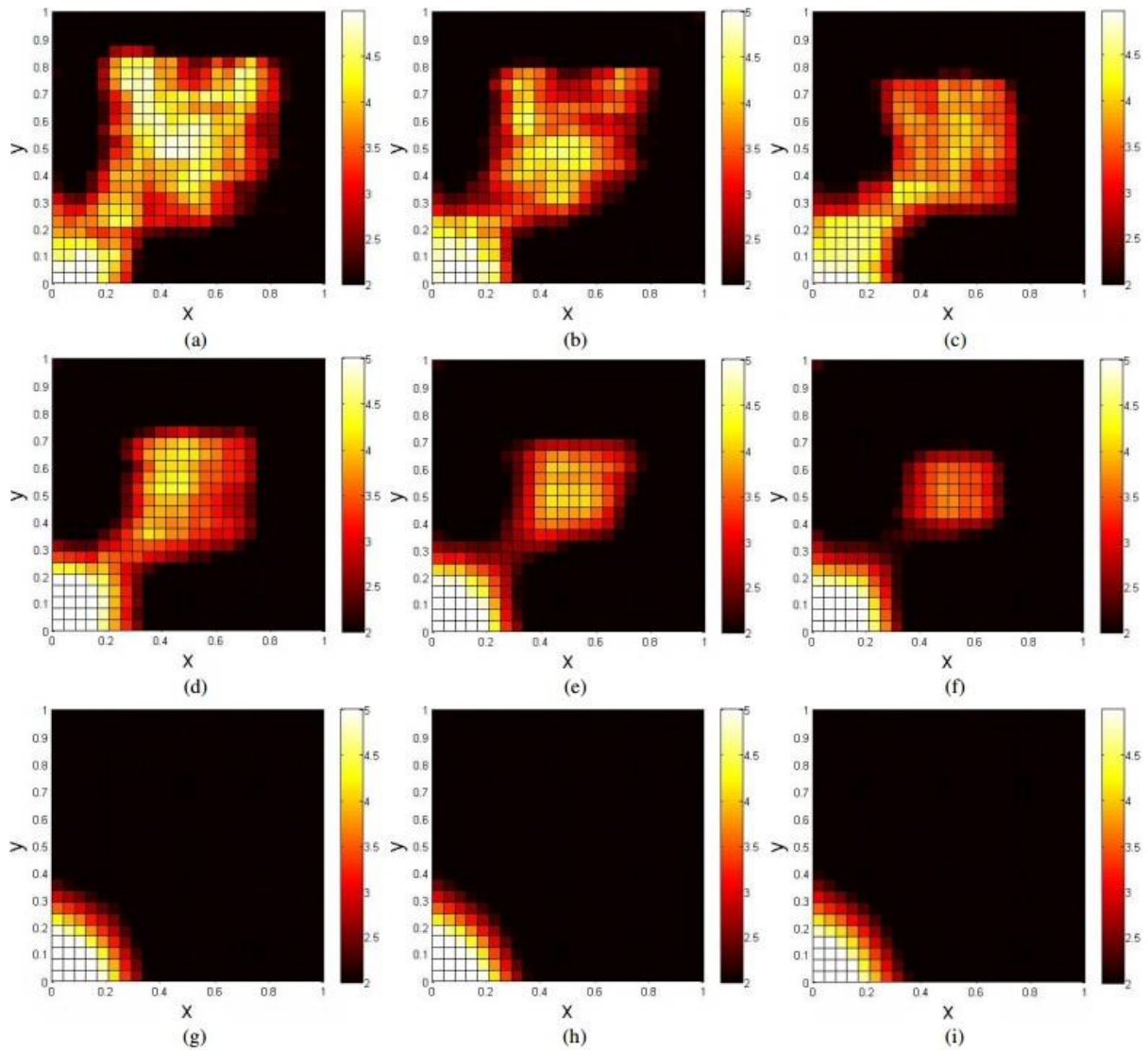


Figura 25: Reconstruções para o domínio D3 da Figura 8, com diferentes tamanhos para a janela do filtro gaussiano e desvio padrão igual a 5. a) Janela 5x5; b) Janela 6x6; c) Janela 7x7; d) Janela 8x8; e) Janela 9x9; f) Janela 10x10; g) Janela 15x15; h) Janela 20x20 e i) Janela 25x25.

Os valores encontrados para o CCP e o SSIM, calculados para as reconstruções das figuras 23, 24 e 25 e seu domínio correspondente na Figura 8, foram dispostos na Tabela 6, apresentada a seguir.

Com tamanhos de janela iguais ou superiores a 8x8, utilizando um desvio padrão igual a 3, foram obtidas reconstruções com forte correlação para o domínio D3. De todas as dimensões de matrizes utilizadas para a janela com desvio padrão igual a 3, o tamanho 10x10 foi aquele em que foi obtida a melhor reconstrução, tendo correlação com D3 igual a 0,856.

Tabela 6: CCP e SSIM calculados para reconstruções do domínio D3, realizadas por meio do método proposto, utilizando diferentes janelas e valores de desvio padrão para o filtro gaussiano. Em negrito são destacados os valores mais altos de CCP e SSIM.

Desvio Padrão	1		3		5	
Métrica	CCP	SSIM	CCP	SSIM	CCP	SSIM
5x5	0,292	0,010	0,650	0,217	0,618	0,232
6x6	0,458	0,076	0,593	0,139	0,711	0,271
7x7	0,420	0,135	0,659	0,161	0,754	0,262
8x8	0,509	0,164	0,801	0,421	0,803	0,388
9x9	0,428	0,051	0,851	0,494	0,885	0,617
10x10	0,460	0,151	0,856	0,559	0,862	0,558
15x15	0,493	0,102	0,766	0,547	0,591	0,154
20x20	0,460	0,151	0,816	0,435	0,573	0,143
25x25	0,452	0,156	0,817	0,544	0,572	0,144

Para as reconstruções com desvio padrão igual a 5, foram obtidas reconstruções com forte correlação para o domínio D3 para tamanhos de janela entre 6x6 e 10x10. Dentre todas as reconstruções realizadas, a reconstrução com desvio padrão igual a 5 e janela igual 9x9 foi aquela que apresentou a melhor correlação, com CCP igual a 0,885.

As reconstruções com desvio padrão igual a 1, independentemente da janela empregada, não apresentaram forte correlação com o domínio D3.

Em relação aos valores de SSIM, a reconstrução que apresentou o valor mais alto, foi realizada com desvio padrão igual a 5 e janela igual a 9x9. Em média, os valores de SSIM encontrados para as reconstruções com desvio padrão igual a 3 e 5 foram aproximadamente iguais.

Tomando todos os resultados de forma conjunta, o método proposto foi capaz de fazer a inversão dos dados numéricos. No entanto, nas reconstruções para os domínios D2 e D3, o algoritmo mostrou dificuldade de localizar as regiões de maior condutividade na parte central dos domínios. Além disso, o valor ótimo para a janela do filtro variou de domínio para domínio, o que impossibilitou a determinação de um valor ótimo.

Os menores valores encontrados para a função objetivo, para as reconstruções do domínio D3 pelo método proposto foram próximos a 0,15 (u.m.p)².

Para a distribuição D3, foi realizado cálculo do valor mínimo aproximado para a função objetivo. O valor obtido foi 0,10 (u.m.p)². Isso significa que o método proposto chegou perto do limite teórico da técnica de imagens estudada.

O método de Herrera também foi utilizado para fazer reconstruir os domínios da Figura 8. As reconstruções obtidas foram dispostas na Figura 26 apresentada a seguir:

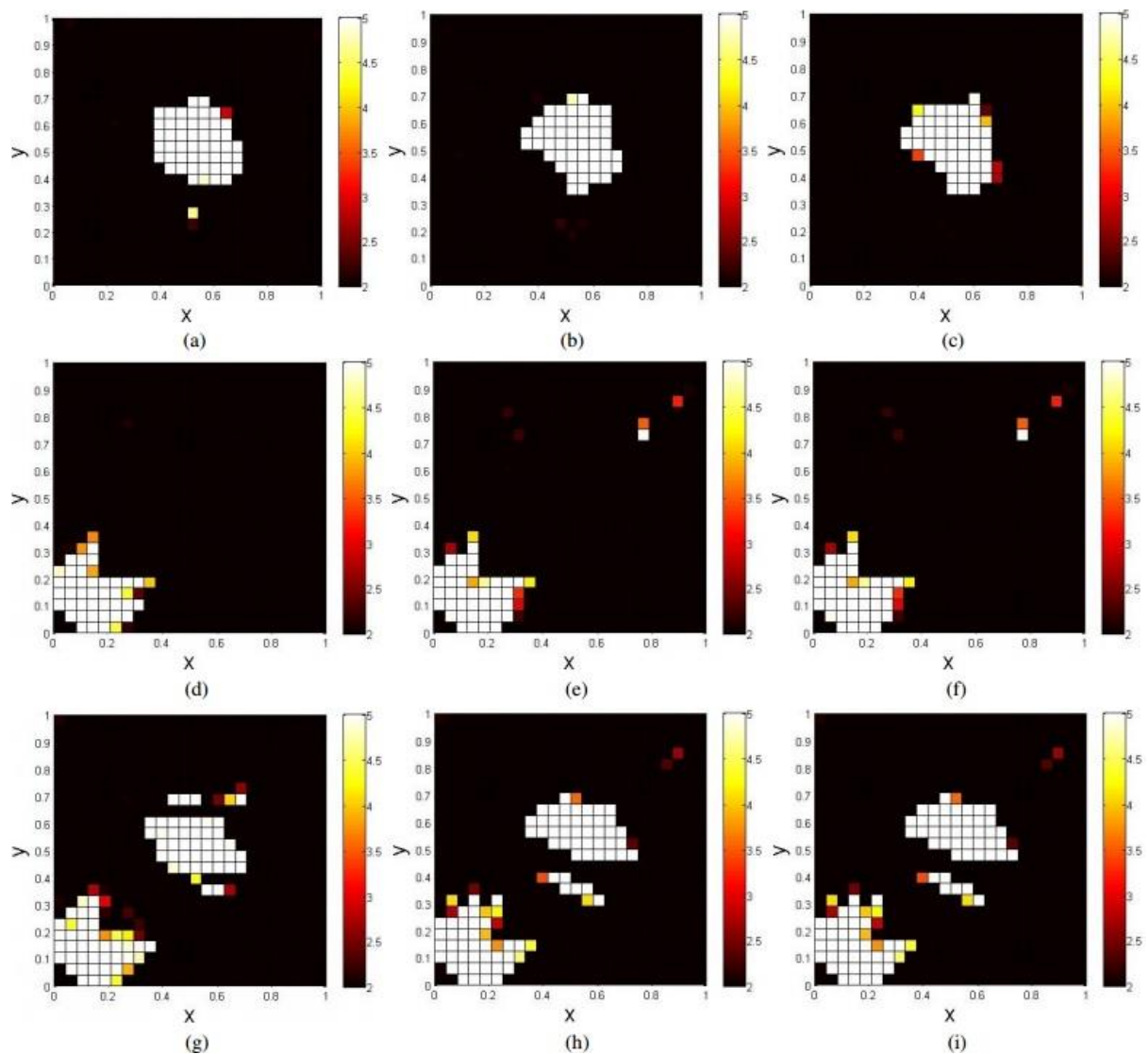


Figura 26: Reconstruções para os domínios da Figura 8, utilizando o método de Herrera com diferentes valores para N_i e M . a) Reconstrução de D1 para $N_i=500$ e $M=20$; b) Reconstrução de D1 para $N_i=1000$ e $M=10$; c) Reconstrução de D1 para $N_i=2000$ e $M=5$; d) Reconstrução de D2 para $N_i=500$ e $M=20$; e) Reconstrução de D2 para $N_i=1000$ e $M=10$; f) Reconstrução de D2 para $N_i=2000$ e $M=5$; g) Reconstrução de D3 para $N_i=500$ e $M=20$; Reconstrução de D3 para $N_i=1000$ e $M=10$ e i) Reconstrução de D3 para $N_i=2000$ e $M=5$.

Para as reconstruções da Figura 26 foi realizado o cálculo da correlação e do SSIM em relação ao seu correspondente na Figura 8. Os valores encontrados foram dispostos na Tabela 7, a qual é apresentada a seguir.

Tabela 7: CCP e SSIM calculados para as reconstruções apresentadas na Figura 24, realizadas por meio do método de Herrera, para diferentes valores de Ni e M. Em negrito são destacados os valores mais altos de CCP e SSIM.

<i>Domínio</i>	D1		D2		D3	
<i>Métrica</i>	CCP	SSIM	CCP	SSIM	CCP	SSIM
NI500 M20	0,887	0,660	0,820	0,728	0,724	0,480
NI2000 M5	0,860	0,704	0,837	0,907	0,746	0,438
NI1000 M10	0,837	0,749	0,811	0,876	0,729	0,357

Para as reconstruções da Figura 26 pelo método Herrera, os menores valores encontrados para a função objetivo foram aproximadamente iguais para todas as reconstruções, próximo a $0,03$ (u.m.p)². Esse valor é menor que o valor limite para D2 e D3, indicando que o método de Herrera chegou ao limite de precisão da TIE.

A análise quantitativa das reconstruções da Figura 26, por meio dos valores de CCP expostos na Tabela 7, indicam que, do ponto de vista geométrico, o método de Herrera tem precisão semelhante ao do método proposto. Isso pode ser compreendido pela análise do CCP, considerando a nomenclatura de Dancey e Reidy.

Todas as reconstruções pelo método de Herrera apresentaram forte correlação com os domínios correspondentes da Figura 8, o que em média é superior aos obtidos pelo método proposto. Por sua vez, se o julgamento for realizado considerando somente os mais altos valores de CCP, as reconstruções realizadas pelo método proposto obtiveram valores muito próximos aos valores encontrados para as reconstruções realizadas pelo método de Herrera. Além disso, os valores máximos calculados de SSIM para as melhores reconstruções realizadas pelo método proposto, foram também semelhantes aos valores máximos encontrados para as reconstruções realizadas pelo método de Herrera. Sendo assim, considerando a análise conjunta pelo CCP e pelo SSIM, as reconstruções realizadas pelo método de Herrera e pelo método proposto possuem precisão aproximadamente iguais. Por sua vez, é interessante notar que o método de Herrera

conseguiu chegar a valores menores para a função objetivo, no entanto isso não se refletiu em uma melhora na qualidade das reconstruções.

No entanto, um exame qualitativo das reconstruções indica que os dois métodos apresentam algumas diferenças, mesmo que produzam reconstruções com precisão semelhante. O método proposto conseguiu identificar de forma mais precisa a forma de cada região, mas não conseguiu determinar com acuidade a condutividade de cada uma delas, principalmente na região central dos *phantoms*. Por sua vez, o método de Herrera determinou de forma precisa a condutividade de cada região, mas teve dificuldade de determinar a forma de cada uma delas.

Apesar de terem apresentado precisão semelhante, os dois métodos são bastante diferentes quando a comparação entre eles é realizada considerando o custo computacional de cada um. O custo computacional necessário para produzir as reconstruções pelo método de Herrera é bastante elevado em comparação ao do método proposto, porque individualmente cada parâmetro de condutividade é modificado a cada iteração. Assim, como é necessário resolver o problema direto para cada mudança de condutividade no domínio, o custo computacional para obter as soluções é bastante elevado.

A comparação do custo computacional de cada método pode ser realizada através do número de soluções do problema direto. O número de soluções do problema direto necessárias para gerar cada uma das reconstruções através do método que propomos, foi mais de 6000 vezes menor que pelo método de Herrera – 1×10^3 para o método proposto e 6×10^6 para o método de Herrera⁹. Sendo assim, do ponto de vista computacional, a heurística apresentada neste trabalho é muito menos dispendiosa. No computador utilizado para os testes, as reconstruções

⁹ Os testes para o problema inverso foram também realizados em um computador com processador Intel Core 2 Duo, com 3 gigabytes de memória RAM.

realizadas pelo método proposto demoraram cerca de 16 minutos, enquanto que pelo método de Herrera demoraram quase uma semana.

No último teste realizado com as distribuições de condutividade da Figura 8, os dois métodos foram utilizados conjuntamente para fazer a reconstrução de D1, de D2 e de D3. Nas reconstruções realizadas, o método proposto foi empregado inicialmente de modo a diminuir rapidamente o valor da função objetivo. Após 10 mil iterações, o método de Herrera foi utilizado. As reconstruções obtidas são apresentadas na Figura 27, apresentada a seguir:

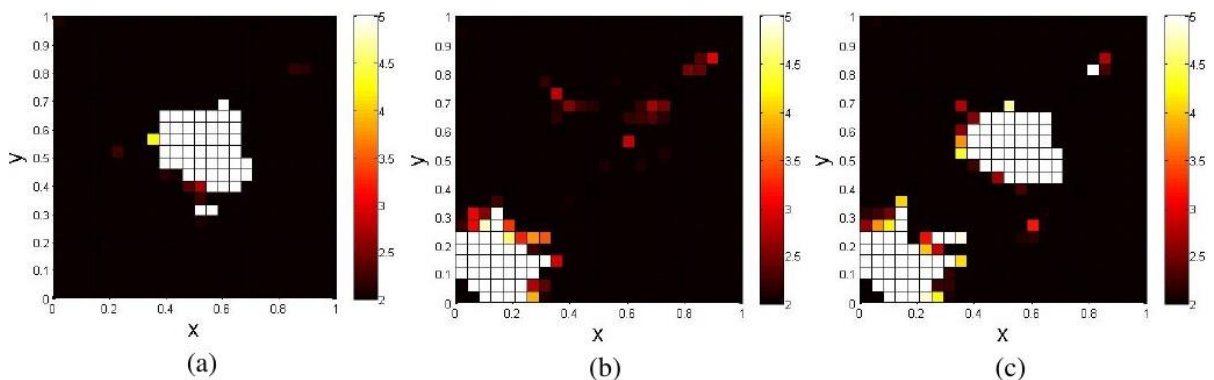


Figura 27: Reconstruções para os domínios da Figura 8 realizada por meio do método híbrido. As reconstruções foram realizadas com 10.000 iterações para a etapa com o método proposto, $N_i=50$ e $M=3$ para a etapa com o método de Herrera. a) Reconstrução do domínio D1; b) Reconstrução do domínio D2; c) Reconstrução do domínio de D3.

Para as reconstruções da Figura 27 foi realizado o cálculo da correlação e do SSIM em relação ao seu correspondente na Figura 8. Os valores encontrados foram dispostos na Tabela 8, a qual é apresentada a seguir.

Tabela 8: CPP e SSIM calculados para as reconstruções apresentadas na Figura 27, realizadas por meio da combinação do método proposto com o método de Herrera.

D1		D2		D3	
CCP	SSIM	CCP	SSIM	CCP	SSIM
0,880	0,738	0,862	0,667	0,798	0,561

Nitidamente, as reconstruções realizadas pelo método híbrido são iguais ou superiores às realizadas pelo método de Herrera sozinho. Isso é perceptível, principalmente, para a reconstrução realizada para o domínio D3. Os valores de CCP e SSIM calculados para essa reconstrução, apresentados na Tabela 8, são, respectivamente, 0,798 e 0,561. Esses valores são superiores a todos os valores de

CCP e SSIM calculados para as reconstruções de D3 realizadas pelo método de Herrera, os quais foram apresentados na Tabela 7.

Os valores encontrados de CCP e SSIM para as reconstruções pelo método híbrido são aproximadamente iguais aos melhores valores encontrados para as reconstruções realizadas pelo método proposto. Talvez, se for testado um número maior de parâmetros, seja possível melhorar as reconstruções obtidas para o método híbrido.

Para produzir as soluções da Figura 27 foram necessárias 1×10^5 , 60 vezes menos do que as iterações necessárias para produzir as reconstruções da Figura 26, mas ainda muito maior que o número de iterações das reconstruções produzidas pelo método proposto.

5.4. Problema Inverso - Testes com modelos físicos

Apesar de úteis, testes com dados sintéticos gerados numericamente são limitados, principalmente quando o modelo numérico utilizado para gerar os dados é o mesmo empregado para fazer a inversão. Normalmente, o valor da função objetivo durante a inversão tende a zero, fato este que não reproduz o comportamento observado quando medidas reais são utilizadas. Por isso, no presente trabalho foram realizados alguns ensaios em um tanque de sedimentos de interesse geológico, de modo a testar em uma situação de uso real o método de inversão proposto.

A reconstrução obtida para o primeiro conjunto de medidas realizadas no tanque é apresentada na Figura 28. As medidas foram obtidas com o tanque preenchido por água da torneira, com um cilindro de metal colocado dentro do tanque imerso na água. A geometria do sistema foi apresentada na Figura 13.

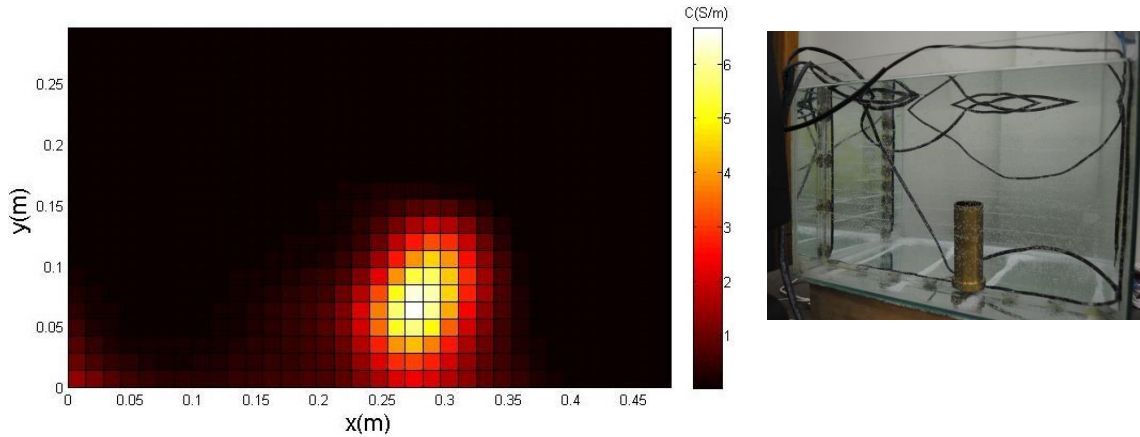


Figura 28: Imagem reconstruída da primeira montagem.

A reconstrução para a primeira montagem mostrou que a técnica pôde reproduzir com boa precisão as dimensões e a posição do cilindro colocado no tanque. Além disso, a condutividade da água calculada pelo algoritmo ficou em torno de 0,016 S/m, valor compatível com o informado pelo Departamento Municipal de Água e Esgotos de Porto Alegre (DMAE), que, em média, é de 0,013 S/m. O valor obtido da condutividade do cilindro foi subestimado, talvez devido a grande condutividade do latão - cerca de $1,43 \times 10^6$ S/m – o que teoricamente exigiria maior número de interações k do algoritmo para chegar a um valor aproximado.

Para o segundo ensaio, um béquer de vidro foi colocado no tanque, ainda preenchido por água, conforme a disposição mostrada na Figura 14. Na Figura 29 é apresentada a reconstrução obtida.

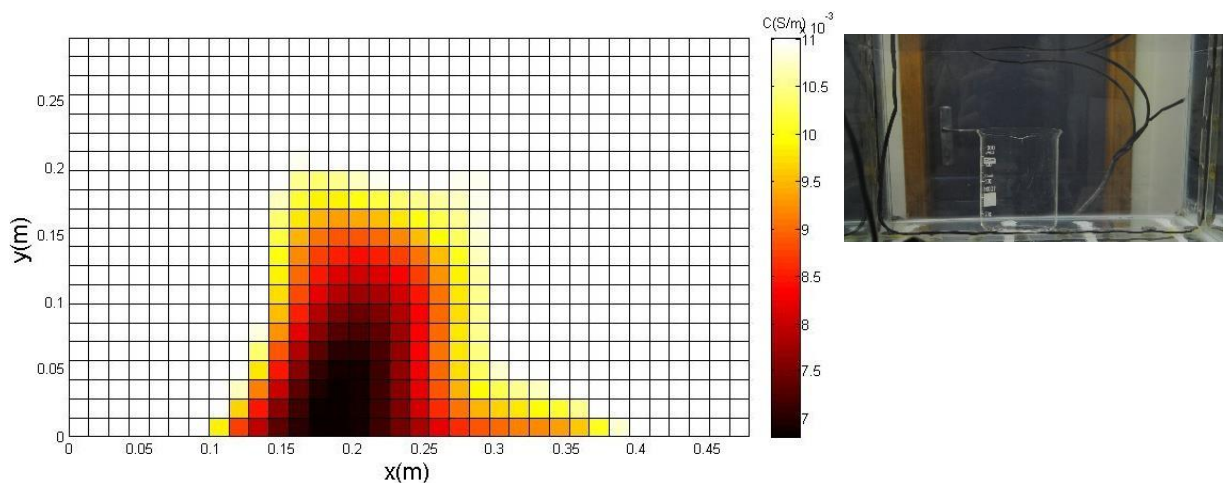


Figura 29: Inversão obtida para a segunda montagem.

A reconstrução para a segunda montagem reforça o conceito de que a técnica pode avaliar as dimensões, a posição e a condutividade de materiais dispostos no

tanque. A condutividade da água estimada pelo algoritmo ficou em torno de 0,011 S/m, novamente semelhante ao valor informado pelo DMAE. Para o béquer, a condutividade foi superestimada¹⁰, possivelmente pelos mesmos motivos já mencionados para o cilindro metálico da primeira montagem.

No terceiro ensaio, o tanque foi preenchido com uma camada de areia de construção e uma camada de carvão mineral em pó. Ambas preenchidas com água. A água serve como meio condutor para facilitar o fluxo de cargas elétricas entre os eletrodos, que estão posicionados nas paredes laterais e no fundo do tanque. Na Figura 15 foi apresentada a geometria do sistema, após o tanque ser secado e uma fatia vertical do depósito ter sido removida para permitir a visualização da distribuição de diferentes materiais no plano contendo os eletrodos. Na Figura 30 é apresentada a reconstrução obtida para essa configuração.

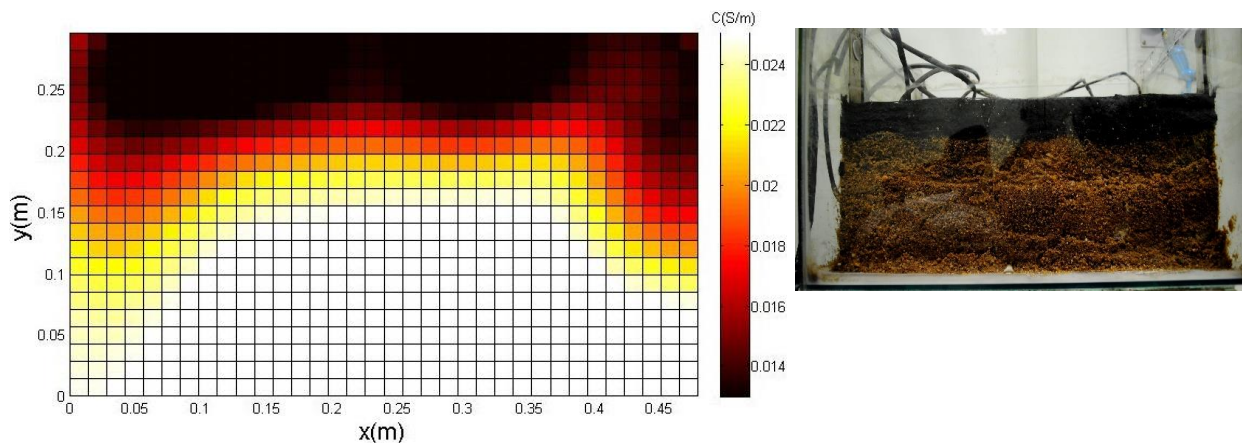


Figura 30: Imagem obtida para terceira montagem.

A condutividade da areia e do carvão quando misturados à água da torneira foram medidas em laboratório utilizando as técnicas de espectroscopia de impedância elétrica (CHINAGLIA et al., 2008) e o método das quatro pontas (GIROTTO e SANTOS, 2002). Os valores medidos da condutividade do carvão e da areia foram de 0,050 S/m e 0,024 S/m, respectivamente. A água utilizada no

¹⁰ A condutividade elétrica do vidro varia muito em virtude da sua composição. Considerando o trabalho de Bossa et. al. (2007), a condutividade pode assumir valores entre 10^{-15} S/m até 10^{-17} S/m.

experimento também foi analisada por estes dois métodos e apresentou uma condutividade de 0,01 S/m. A reconstrução apresentada na Figura 30 representa de maneira razoável a estrutura mostrada na Figura 15, ainda que os valores de condutividade sejam diferentes dos esperados para a areia e o carvão, mais próximos do valor da água. Acreditamos que essa discrepância seja devida ao fato de a corrente elétrica tender a fluir pelos interstícios entre os grãos de areia e de carvão, que estão preenchidos com água e apenas uma pequena parcela fluir pelos grãos.

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposta e testada uma abordagem para reconstrução de imagens de TIE, utilizando um método de minimização global estocástico: o *Simulated Annealing*.

O SA já havia sido empregado para fazer a solução do problema inverso da TIE em outros trabalhos. No entanto, a abordagem tradicional utilizada para a solução do problema inverso, normalmente necessita de extensos recursos computacionais para produzir boas reconstruções. Por isso, com vista a diminuir o tempo computacional e manter a qualidade das reconstruções produzidas, foi proposta uma nova versão do SA para minimização de variáveis contínuas, onde todos os parâmetros de condutividade do domínio são atualizados conjuntamente.

A técnica proposta foi testada com dados gerados por meio de um modelo virtual e com dados medidos em um tanque de simulação física.

As reconstruções produzidas utilizando o método proposto, a partir dos dados gerados pelo modelo numérico, foram comparadas quantitativamente às reconstruções produzidas pelo método de Herrera (2007) – uma abordagem típica presente na literatura - para os mesmos dados, diminuindo consideravelmente o tempo computacional.

Na comparação realizada, foi calculado o CCP e o SSIM entre as reconstruções produzidas pelos dois métodos e as distribuições de condutividade utilizadas para gerar os dados. Essa análise mostrou que o método proposto produziu resultados semelhantes ao método de Herrera. No entanto, o tempo computacional necessário para produzir as soluções pelo método proposto é cerca de 6000 vezes menor.

Também foram realizadas algumas reconstruções por meio da combinação dos dois métodos, o resultado obtido foi satisfatório. No entanto, mais testes são necessários para determinar a melhor forma de combiná-los, melhorando as reconstruções obtidas.

As reconstruções produzidas a partir das medidas realizadas no tanque de simulação física mostram que o método proposto pode estimar satisfatoriamente a posição, as dimensões e a condutividade de diferentes materiais em um plano transversal de um objeto de interesse. É importante ressaltar que as reconstruções foram obtidas sem a presença de eletrodos na parte superior do domínio, mostrando que o método pode produzir boas reconstruções mesmo com informação limitada no contorno do objeto estudado.

A solução do problema inverso depende de repetidas soluções do problema direto. Por isso, foram realizados também alguns testes para a solução do problema direto, de modo a diminuir o tempo computacional necessário para sua solução.

A aproximação da solução do problema direto da TIE foi realizada utilizando o MDF, por meio de uma modificação da abordagem apresentada no artigo de Martins et al. (2015). As mudanças nas discretizações das condições de contorno permitiram o emprego do SOR, o que diminuiu em 4 vezes o custo computacional para a solução do problema direto pelo MDF. Isso, certamente, também se reflete em um decréscimo do custo computacional para solução do problema inverso.

Considerando a simplicidade para sua aplicação e a precisão dos resultados obtidos, o algoritmo proposto e testado ao longo deste trabalho pode ser considerado uma boa alternativa para solução do problema inverso da TIE.

7. PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

- O método proposto se mostrou uma alternativa simples e eficaz para a solução do problema inverso da TIE. No entanto, ainda é necessário investigar e estabelecer uma relação entre a janela do filtro gaussiano, o desvio padrão e a qualidade das reconstruções. Isso irá simplificar e generalizar futuras aplicações do método proposto.
- Não existe impedimento para a combinação do método proposto com outra técnica de minimização, principalmente técnicas determinísticas. Trabalhos futuros devem procurar uma forma de combinar a capacidade de sair de mínimos locais do método proposto, com a velocidade dos métodos determinísticos.
- Também é necessário analisar matematicamente o método proposto de forma mais detalhada. Essa análise poderá revelar formas mais eficazes de aplicações do mesmo.
- A TIE pode ser utilizada para obter imagens tridimensionais de um determinado objeto. A extensão tridimensional do método passa pela formulação tridimensional do problema direto, o que deverá ser realizado em trabalhos futuros.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguilar, J. C. Z. (2009). Estudos numéricos para o problema da tomografia por impedância elétrica (Doctoral dissertation, Universidade de São Paulo).

Artola, J., & Dell, J. (1994). Broyden quasi-Newton method applied to electrical impedance tomography. *Electronics Letters*, 30(1), 27-28.

BIOMATEMÁTICA, M. E., BEVILACQUA, J. D. S., RAFIKOV, M., & SÃO JOSÉ, D. R. P. S. Backprojection: Algoritmo para Reconstrução de Imagem Médica.

Borcea, L. (2002). Electrical impedance tomography. *Inverse problems*, 18(6), R99-R136.

Bossa, T. H., Díaz-Mora, N., Buchner, S., Crovace, M. C., Soares Jr, P. C., & Lepienski, C. M. (2007). Estudo da condutividade elétrica de vidros de isoladores de linhas de transmissão HVDC dopados. In CONGRESSO DA ACADEMIA TRINACIONAL DE CIÊNCIAS, II.

Cherepenin, V., Karpov, A., Korjenevsky, A., Kornienko, V., Mazaletskaya, A., Mazourov, D., & Meister, D. (2001). A 3D electrical impedance tomography (EIT) system for breast cancer detection. *Physiological measurement*, 22(1), 9.

Chinaglia, D. L., Gozzi, G., Alfaro, R. A. M., & Hessel, R. (2008). Espectroscopia de impedância no laboratório de ensino. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 30(4), 4504-1.

Corana, A., Marchesi, M., Martini, C. and Ridella, S. (1987), Minimizing Multimodal Functions of Continuous Variables with the "Simulated Annealing Algorithm", *ACM Transactions on Mathematical Software*, March 1987, pp. 272–280.

- Dancey, C. P., & Reidy, J. (2007). *Statistics without maths for psychology*. Pearson Education.
- De Castro Martins, T., de Camargo, E. D. L. B., Gonzalez Lima, R., Amato, M. B. P., & de Sales Guerra Tsuzuki, M. (2012). Image reconstruction using interval simulated annealing in electrical impedance tomography. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 59(7), 1861-1870.
- Denai, M. A., Mahfouf, M., Mohamad-Samuri, S., Panoutsos, G., Brown, B. H., & Mills, G. H. (2010). Absolute electrical impedance tomography (aEIT) guided ventilation therapy in critical care patients: simulations and future trends. *Information Technology in Biomedicine, IEEE Transactions on*, 14(3), 641-649.
- Engl, H. W., Hanke, M., & Neubauer, A. (1996). *Regularization of inverse problems* (Vol. 375). Springer Science & Business Media.
- Eppler, K., & Harbrecht, H. (2005). A regularized Newton method in electrical impedance tomography using shape Hessian information. *Control and Cybernetics*, 34, 203-225.
- Erol, R. A., Mangnall, Y., Leathard, A. D., Smallwood, R. H., Brown, B. H., Cherian, P., & Bardham, K. D. (1995). Identifying oesophageal contents using electrical impedance tomography. *Physiological measurement*, 16(4), 253.
- Greenspan, D. (1974). *Discrete numerical methods in physics and engineering* (Vol. 312). New York: Academic Press.
- Giroto, E. M., & Santos, I. A. (2002). Medidas de resistividade elétrica dc em sólidos: como efetuá-las corretamente. *Química Nova*, 25(4), 639-647.
- Herrera, C. N. L., Vallejo, M. F. M., Moura, F. S., Aya, J. C. C., & Lima, R. G. (2007). Electrical impedance tomography algorithm using simulated annealing search method. *Proc. Int. Cong. Mech. Eng*, 7033-7036.
- Isaacson, D., Mueller, J. L., Newell, J. C., & Siltanen, S. (2006). Imaging cardiac activity by the D-bar method for electrical impedance tomography. *Physiological measurement*, 27(5), S43.

- Kim, H. C., Boo, C. J., & Lee, Y. J. (2005). Image reconstruction using simulated annealing algorithm in EIT. *Int. J. of Control, Automation, and Systems*, 3, 211-216.
- Kim, K. Y., Kim, B. S., Kim, M. C., Lee, J. H., Park, J. W., Lee, Y. J., & Choi, Y. B. (2000). Regularized modified Newton Raphson algorithm for electrical impedance tomography based on the exponentially weighted least square criterion. In *TENCON 2000. Proceedings* (Vol. 1, pp. 64-68). IEEE.
- Kim, Y. J., Lee, C. O., & Park, E. H. (2008). Applied Mathematics Research Report 08-05.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *science*, 220(4598), 671-680.
- Kolehmainen, V., Lassas, M., Ola, P., & Siltanen, S. (2013). Recovering boundary shape and conductivity in electrical impedance tomography. *Inverse Problems and Imaging*, 7(1), 217-242.
- Kowalski, A., Davidson, J., Flanagan, M., & York, T. (2010). Electrical resistance tomography for characterization of physical stability in liquid compositions. *Chemical Engineering Journal*, 158(1), 69-77.
- Lee Rodgers, J., & Nicewander, W. A. (1988). Thirteen ways to look at the correlation coefficient. *The American Statistician*, 42(1), 59-66.
- Lutfiyya, H., McMillin, B., Poshyanonda, P., & Dagli, C. (1992). Composite stock cutting through simulated annealing. *Mathematical and computer modeling*, 16(1), 57-74.
- Martins, J. S. (2012). Desenvolvimento de um algoritmo para reconstrução de imagens utilizando a técnica de tomografia por impedância elétrica. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia de Materiais. Porto Alegre. Brasil.
- Martins, J. S., Moura, C. S., & Vargas, R. F. (2015). Avaliação de 3 diferentes aproximações para a solução do problema direto da tomografia de impedância

elétrica. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 31(1), 42-49.

Martins, T. C., & Tsuzuki, M. (2009). Placement over containers with fixed dimensions solved with adaptive neighborhood simulated annealing. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 57(3), 273-280.

Menin, O. H. (2009). *Método dos elementos de contorno para tomografia de impedância elétrica* (Doctoral dissertation, Universidade de São Paulo).

Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., & Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21(6), 1087-1092.

Nayak, G. C. (1972). *Applied numerical methods*, B. Carnahan, HA Lither and JO Wilkes, Wiley, New York, 1969. No. of Pages: 604.

Nguyen, D. T., Jin, C., Thiagalingam, A., & McEwan, A. L. (2012). A review on electrical impedance tomography for pulmonary perfusion imaging. *Physiological measurement*, 33(5), 695.

Olmi, R., Bini, M., & Priori, S. (2000). A genetic algorithm approach to image reconstruction in electrical impedance tomography. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 4(1), 83-88.

Panoutsos, G., Mahfouf, M., Brown, B. H., & Mills, G. H. (2007, February). Electrical impedance tomography (EIT) in pulmonary measurement: a review of applications and research. In *Proceedings of the Fifth IASTED International Conference on Biomedical Engineering, BioMED* (pp. 221-230).

Parker, R. L. (1984). The inverse problem of resistivity sounding. *Geophysics*, 49(12), 2143-2158.

Pearson, K. (1895). Note on regression and inheritance in the case of two parents. *Proceedings of the Royal Society of London*, 240-242.

- Player, M. A., Van Weereld, J., Hutchison, J. M. S., Allen, A. R., & Shang, L. (1999). An electrical impedance tomography algorithm with well-defined spectral properties. *Measurement Science and Technology*, 10(3), L9.
- Tapp, H. S., Peyton, A. J., Kemsley, E. K., & Wilson, R. H. (2003). Chemical engineering applications of electrical process tomography. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 92(1), 17-24.
- Tikhonov, A. N.; Arsenin, V.Y (1977). *Solution of Ill-posed Problems*, John Wiley & Sons.
- Wang, M. (2002). Inverse solutions for electrical impedance tomography based on conjugate gradients methods. *Measurement Science and Technology*, 13(1), 101.
- Wang, Z., Bovik, A. C., Sheikh, H. R., & Simoncelli, E. P. (2004). Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 13(4), 600-612.
- Wirgin, A. (2004). The inverse crime. *arXiv preprint math-ph/0401050*.
- Wright, M. B. (2003). An overview of neighbourhood search metaheuristics. Working Paper 087, Lancaster University Management School.
- Yen, K., Yen, E. K., & Johnston, R. G. (1996). The ineffectiveness of the correlation coefficient for image comparisons.

APÊNDICE I

O algoritmo iterativo mostrado a seguir, foi desenvolvido em linguagem MATLAB com o objetivo de solucionar o problema direto, para os testes com dados sintéticos.

O início da aproximação da solução começa ao ser especificado o tamanho da matriz de discretização. Isso é realizado através de dois números, os quais são definidos como mostrado a seguir:

$N=25$; (Número de pontos (p-1) da matriz no eixo x)

$M=25$; (Número de pontos (p-1) da matriz no eixo y)

$w=1.8$; (Parâmetro de relaxação)

$w1=1-1.8$;

Em seguida é criado o domínio utilizando os seguintes comandos:

for i=1:N+1

xn(i)=(i-1)/N; (define os pontos do domínio no eixo x)

end

for j=1:M+1

yn(j)=(j-1)/M; (define os pontos do domínio no eixo y)

end

Após a definição dos pontos que fazem parte do domínio são calculados os valores de condutividade nos pontos centrais a pontos adjacentes do domínio.

for i=2:N

for j=2:M

una (i,j)=((1/c1(i+1,j)+1/(c1(i,j)))^-1)*2;

unb (i,j)=((1/(c1(i-1,j))+1/(c1(i,j)))^-1)*2;

```

unc (i,j)=((1/(c1(i,j+1))+1/(c1(i,j))))^-1)*2;
und (i,j)=((1/(c1(i,j-1))+1/(c1(i,j))))^-1)*2;
end
end
for j=2:M
una(1,j)=((1/c1(2,j)+1/(c1(1,j))))^-1)*2;
unc(1,j)=((1/(c1(1,j+1))+1/(c1(1,j))))^-1)*2;
und(1,j)=((1/(c1(1,j-1))+1/(c1(1,j))))^-1)*2;
unb(N1,j)=((1/c1(N,j)+1/(c1(N1,j))))^-1)*2;
unc(N1,j)=((1/(c1(N1,j+1))+1/(c1(N1,j))))^-1)*2;
und(N1,j)=((1/(c1(N1,j-1))+1/(c1(N1,j))))^-1)*2;
i=j;
unc (i,1)=((1/c1(i,2)+1/(c1(i,1))))^-1)*2;
una (i,1)=((1/(c1(i+1,1))+1/(c1(i,1))))^-1)*2;
unb (i,1)=((1/(c1(i-1,1))+1/(c1(i,1))))^-1)*2;
und (i,M1)=((1/c1(i,M)+1/(c1(i,M1))))^-1)*2;
una (i,M1)=((1/(c1(i+1,M1))+1/(c1(i,M1))))^-1)*2;
unb (i,M1)=((1/(c1(i-1,M1))+1/(c1(i,M1))))^-1)*2;
end
unc(1,1)=((1/c1(1,2)+1/(c1(1,1))))^-1)*2;
una(1,1)=((1/(c1(2,1))+1/(c1(1,1))))^-1)*2;
unc(N1,1)=((1/c1(N1,2)+1/(c1(N1,1))))^-1)*2;
unb(N1,1)=((1/(c1(N,1))+1/(c1(N1,1))))^-1)*2;
und(1,M1)=((1/c1(1,M)+1/(c1(1,M1))))^-1)*2;
una(1,M1)=((1/(c1(2,M1))+1/(c1(1,M1))))^-1)*2;
und(N1,M1)=((1/c1(N1,M)+1/(c1(N1,M1))))^-1)*2;
unb(N1,M1)=((1/(c1(N,M1))+1/(c1(N1,M1))))^-1)*2;

```

onde **una**, **unb**, **unc** e **und** são matrizes com valores de condutividade em pontos localizados centralmente entre os pontos (i,j) e $(i+1,j)$, (i,j) e $(i-1,j)$, (i,j) e $(i,j+1)$ e (i,j) e $(i,j-1)$, respectivamente.

O processo iterativo começa e as aproximações para os potenciais no contorno são computadas:

for d=1:iteração (início do processo de iteração)

for j=2:M (condições de contorno para cada lado do quadrado)

$$\text{un1}(1,j) = ((2 * \text{un1}(2,j) * \text{una}(1,j) + \text{un1}(1,j+1) * \text{unc}(1,j) + \text{un1}(1,j-1) * \text{und}(1,j)) + (\text{eletrodo}(1,j) * (2 * l * \text{deltax}) / (\text{Area} * (\text{c1}(1,j)))))) / (2 * \text{una}(1,j) + \text{unc}(1,j) + \text{und}(1,j));$$

$$\text{un1}(N1,j) = ((2 * \text{un1}(N,j) * \text{unb}(N1,j) + \text{un1}(N1,j+1) * \text{unc}(N1,j) + \text{un1}(N1,j-1) * \text{und}(N1,j))) / (2 * \text{unb}(N1,j) + \text{unc}(N1,j) + \text{und}(N1,j));$$

$$\text{un2}(1,j) = ((2 * \text{un2}(2,j) * \text{una}(1,j) + \text{un2}(1,j+1) * \text{unc}(1,j) + \text{un2}(1,j-1) * \text{und}(1,j)) + (\text{eletrodo}(2,j) * (2 * l * \text{deltax}) / (\text{Area} * (\text{c1}(1,j)))))) / (2 * \text{una}(1,j) + \text{unc}(1,j) + \text{und}(1,j));$$

$$\text{un2}(N1,j) = ((2 * \text{un2}(N,j) * \text{unb}(N1,j) + \text{un2}(N1,j+1) * \text{unc}(N1,j) + \text{un2}(N1,j-1) * \text{und}(N1,j))) / (2 * \text{unb}(N1,j) + \text{unc}(N1,j) + \text{und}(N1,j));$$

$$\text{un3}(1,j) = ((2 * \text{un3}(2,j) * \text{una}(1,j) + \text{un3}(1,j+1) * \text{unc}(1,j) + \text{un3}(1,j-1) * \text{und}(1,j)) + (\text{eletrodo}(3,j) * (2 * l * \text{deltax}) / (\text{Area} * (\text{c1}(1,j)))))) / (2 * \text{una}(1,j) + \text{unc}(1,j) + \text{und}(1,j));$$

$$\text{un3}(N1,j) = ((2 * \text{un3}(N,j) * \text{unb}(N1,j) + \text{un3}(N1,j+1) * \text{unc}(N1,j) + \text{un3}(N1,j-1) * \text{und}(N1,j))) / (2 * \text{unb}(N1,j) + \text{unc}(N1,j) + \text{und}(N1,j));$$

$$\text{un4}(N1,j) = ((2 * \text{un4}(N,j) * \text{unb}(N1,j) + \text{un4}(N1,j+1) * \text{unc}(N1,j) + \text{un4}(N1,j-1) * \text{und}(N1,j)) + ((-1) * \text{eletrodo}(1,j) * (2 * l * \text{deltax}) / (\text{Area} * (\text{c1}(N1,j)))))) / (2 * \text{unb}(N1,j) + \text{unc}(N1,j) + \text{und}(N1,j));$$

$$\text{un4}(1,j) = ((2 * \text{un4}(2,j) * \text{una}(1,j) + \text{un4}(1,j+1) * \text{unc}(1,j) + \text{un4}(1,j-1) * \text{und}(1,j))) / (2 * \text{una}(1,j) + \text{unc}(1,j) + \text{und}(1,j));$$

$$\text{un5}(N1,j) = ((2 * \text{un5}(N,j) * \text{unb}(N1,j) + \text{un5}(N1,j+1) * \text{unc}(N1,j) + \text{un5}(N1,j-1) * \text{und}(N1,j)) + ((-1) * \text{eletrodo}(2,j) * (2 * l * \text{deltax}) / (\text{Area} * (\text{c1}(N1,j)))))) / (2 * \text{unb}(N1,j) + \text{unc}(N1,j) + \text{und}(N1,j));$$

$$\text{un5}(1,j) = ((2 * \text{un5}(2,j) * \text{una}(1,j) + \text{un5}(1,j+1) * \text{unc}(1,j) + \text{un5}(1,j-1) * \text{und}(1,j))) / (2 * \text{una}(1,j) + \text{unc}(1,j) + \text{und}(1,j));$$

$$\text{un6}(N1,j) = ((2 * \text{un6}(N,j) * \text{unb}(N1,j) + \text{un6}(N1,j+1) * \text{unc}(N1,j) + \text{un6}(N1,j-1) * \text{und}(N1,j)) + ((-1) * \text{eletrodo}(3,j) * (2 * l * \text{deltax}) / (\text{Area} * (\text{c1}(N1,j)))))) / (2 * \text{unb}(N1,j) + \text{unc}(N1,j) + \text{und}(N1,j));$$

$$\text{un6}(1,j)=((2*\text{un6}(2,j)*\text{una}(1,j)+\text{un6}(1,j+1)*\text{unc}(1,j)+\text{un6}(1,j-1)*\text{und}(1,j)))/(2*\text{una}(1,j)+\text{unc}(1,j)+\text{und}(1,j));$$

$$\text{un7}(N1,j)=((2*\text{un7}(N,j)*\text{un7}(N1,j)+\text{un7}(N1,j+1)*\text{unc}(N1,j)+\text{un7}(N1,j-1)*\text{und}(N1,j)))/(2*\text{unb}(N1,j)+\text{unc}(N1,j)+\text{und}(N1,j));$$

$$\text{un7}(1,j)=((2*\text{un7}(2,j)*\text{una}(1,j)+\text{un7}(1,j+1)*\text{unc}(1,j)+\text{un7}(1,j-1)*\text{und}(1,j)))/(2*\text{una}(1,j)+\text{unc}(1,j)+\text{und}(1,j));$$

$$\text{un8}(N1,j)=((2*\text{un8}(N,j)*\text{un8}(N1,j)+\text{un8}(N1,j+1)*\text{unc}(N1,j)+\text{un8}(N1,j-1)*\text{und}(N1,j)))/(2*\text{unb}(N1,j)+\text{unc}(N1,j)+\text{und}(N1,j));$$

$$\text{un8}(1,j)=((2*\text{un8}(2,j)*\text{una}(1,j)+\text{un8}(1,j+1)*\text{unc}(1,j)+\text{un8}(1,j-1)*\text{und}(1,j)))/(2*\text{una}(1,j)+\text{unc}(1,j)+\text{und}(1,j));$$

$$\text{un9}(N1,j)=((2*\text{un9}(N,j)*\text{un9}(N1,j)+\text{un9}(N1,j+1)*\text{unc}(N1,j)+\text{un9}(N1,j-1)*\text{und}(N1,j)))/(2*\text{unb}(N1,j)+\text{unc}(N1,j)+\text{und}(N1,j));$$

$$\text{un9}(1,j)=((2*\text{un9}(2,j)*\text{una}(1,j)+\text{un9}(1,j+1)*\text{unc}(1,j)+\text{un9}(1,j-1)*\text{und}(1,j)))/(2*\text{una}(1,j)+\text{unc}(1,j)+\text{und}(1,j));$$

$$\text{un10}(N1,j)=((2*\text{un10}(N,j)*\text{un10}(N1,j)+\text{un10}(N1,j+1)*\text{unc}(N1,j)+\text{un10}(N1,j-1)*\text{und}(N1,j)))/(2*\text{unb}(N1,j)+\text{unc}(N1,j)+\text{und}(N1,j));$$

$$\text{un10}(1,j)=((2*\text{un10}(2,j)*\text{una}(1,j)+\text{un10}(1,j+1)*\text{unc}(1,j)+\text{un10}(1,j-1)*\text{und}(1,j)))/(2*\text{una}(1,j)+\text{unc}(1,j)+\text{und}(1,j));$$

$$\text{un11}(N1,j)=((2*\text{un11}(N,j)*\text{un11}(N1,j)+\text{un11}(N1,j+1)*\text{unc}(N1,j)+\text{un11}(N1,j-1)*\text{und}(N1,j)))/(2*\text{unb}(N1,j)+\text{unc}(N1,j)+\text{und}(N1,j));$$

$$\text{un11}(1,j)=((2*\text{un11}(2,j)*\text{una}(1,j)+\text{un11}(1,j+1)*\text{unc}(1,j)+\text{un11}(1,j-1)*\text{und}(1,j)))/(2*\text{una}(1,j)+\text{unc}(1,j)+\text{und}(1,j));$$

$$\text{un12}(N1,j)=((2*\text{un12}(N,j)*\text{un12}(N1,j)+\text{un12}(N1,j+1)*\text{unc}(N1,j)+\text{un12}(N1,j-1)*\text{und}(N1,j)))/(2*\text{unb}(N1,j)+\text{unc}(N1,j)+\text{und}(N1,j));$$

$$\text{un12}(1,j)=((2*\text{un12}(2,j)*\text{una}(1,j)+\text{un12}(1,j+1)*\text{unc}(1,j)+\text{un12}(1,j-1)*\text{und}(1,j)))/(2*\text{una}(1,j)+\text{unc}(1,j)+\text{und}(1,j));$$

%%

i=j;

%%

$$\text{un1}(i,1)=(2*\text{un1}(i,2)*\text{unc}(i,1)+\text{un1}(i+1,1)*\text{una}(i,1)+\text{un1}(i-1,1)*\text{unb}(i,1))/(2*\text{unc}(i,1)+\text{una}(i,1)+\text{unb}(i,1));$$

$$\text{un1}(i,M1)=(2*\text{un1}(i,M)*\text{und}(i,M1)+\text{un1}(i+1,M1)*\text{una}(i,M1)+\text{un1}(i-1,M1)*\text{unb}(i,M1))/(2*\text{und}(i,M1)+\text{una}(i,M1)+\text{unb}(i,M1));$$

$$\text{un2}(i,1)=(2*\text{un2}(i,2)*\text{unc}(i,1)+\text{un2}(i+1,1)*\text{una}(i,1)+\text{un2}(i-1,1)*\text{unb}(i,1))/(2*\text{unc}(i,1)+\text{una}(i,1)+\text{unb}(i,1));$$

$$\text{un2}(i,M1)=(2*\text{un2}(i,M)*\text{und}(i,M1)+\text{un2}(i+1,M1)*\text{una}(i,M1)+\text{un2}(i-1,M1)*\text{unb}(i,M1))/(2*\text{und}(i,M1)+\text{una}(i,M1)+\text{unb}(i,M1));$$

$$\text{un3}(i,1)=(2*\text{un3}(i,2)*\text{unc}(i,1)+\text{un3}(i+1,1)*\text{una}(i,1)+\text{un3}(i-1,1)*\text{unb}(i,1))/(2*\text{unc}(i,1)+\text{una}(i,1)+\text{unb}(i,1));$$

$$\text{un3}(i,M1)=(2*\text{un3}(i,M)*\text{und}(i,M1)+\text{un3}(i+1,M1)*\text{una}(i,M1)+\text{un3}(i-1,M1)*\text{unb}(i,M1))/(2*\text{und}(i,M1)+\text{una}(i,M1)+\text{unb}(i,M1));$$

$$\text{un4}(i,1)=(2*\text{un4}(i,2)*\text{unc}(i,1)+\text{un4}(i+1,1)*\text{una}(i,1)+\text{un4}(i-1,1)*\text{unb}(i,1))/(2*\text{unc}(i,1)+\text{una}(i,1)+\text{unb}(i,1));$$

$$\text{un4}(i,M1)=(2*\text{un4}(i,M)*\text{und}(i,M1)+\text{un4}(i+1,M1)*\text{una}(i,M1)+\text{un4}(i-1,M1)*\text{unb}(i,M1))/(2*\text{und}(i,M1)+\text{una}(i,M1)+\text{unb}(i,M1));$$

$$\text{un5}(i,1)=(2*\text{un5}(i,2)*\text{unc}(i,1)+\text{un5}(i+1,1)*\text{una}(i,1)+\text{un5}(i-1,1)*\text{unb}(i,1))/(2*\text{unc}(i,1)+\text{una}(i,1)+\text{unb}(i,1));$$

$$\text{un5}(i,M1)=(2*\text{un5}(i,M)*\text{und}(i,M1)+\text{un5}(i+1,M1)*\text{una}(i,M1)+\text{un5}(i-1,M1)*\text{unb}(i,M1))/(2*\text{und}(i,M1)+\text{una}(i,M1)+\text{unb}(i,M1));$$

$$\text{un6}(i,1)=(2*\text{un6}(i,2)*\text{unc}(i,1)+\text{un6}(i+1,1)*\text{una}(i,1)+\text{un6}(i-1,1)*\text{unb}(i,1))/(2*\text{unc}(i,1)+\text{una}(i,1)+\text{unb}(i,1));$$

$$\text{un6}(i,M1)=(2*\text{un6}(i,M)*\text{und}(i,M1)+\text{un6}(i+1,M1)*\text{una}(i,M1)+\text{un6}(i-1,M1)*\text{unb}(i,M1))/(2*\text{und}(i,M1)+\text{una}(i,M1)+\text{unb}(i,M1));$$

$$\text{un7}(i,1)=(2*\text{un7}(i,2)*\text{unc}(i,1)+\text{un7}(i+1,1)*\text{una}(i,1)+\text{un7}(i-1,1)*\text{unb}(i,1)+(\text{eletrodo}(1,j)*(2*I*\text{deltax})/(\text{Area}*(\text{c1}(N1,j)))))/(2*\text{unc}(i,1)+\text{una}(i,1)+\text{unb}(i,1));$$

$$\text{un7}(i,M1)=(2*\text{un7}(i,M)*\text{und}(i,M1)+\text{un7}(i+1,M1)*\text{una}(i,M1)+\text{un7}(i-1,M1)*\text{unb}(i,M1))/(2*\text{und}(i,M1)+\text{una}(i,M1)+\text{unb}(i,M1));$$

$$\text{un8}(i,1)=(2*\text{un8}(i,2)*\text{unc}(i,1)+\text{un8}(i+1,1)*\text{una}(i,1)+\text{un8}(i-1,1)*\text{unb}(i,1)+(\text{eletrodo}(2,j)*(2*I*\text{deltax})/(\text{Area}*(\text{c1}(N1,j)))))/(2*\text{unc}(i,1)+\text{una}(i,1)+\text{unb}(i,1));$$

$$\text{un8}(i,M1)=(2*\text{un8}(i,M)*\text{und}(i,M1)+\text{un8}(i+1,M1)*\text{una}(i,M1)+\text{un8}(i-1,M1)*\text{unb}(i,M1))/(2*\text{und}(i,M1)+\text{una}(i,M1)+\text{unb}(i,M1));$$

$$\text{un9}(i,1)=(2*\text{un9}(i,2)*\text{unc}(i,1)+\text{un9}(i+1,1)*\text{una}(i,1)+\text{un9}(i-1,1)*\text{unb}(i,1)+(\text{eletrodo}(3,j)*(2*I*\text{deltax})/(\text{Area}*(\text{c1}(N1,j)))))/(2*\text{unc}(i,1)+\text{una}(i,1)+\text{unb}(i,1));$$

$$\text{un9}(i,M1)=(2*\text{un9}(i,M)*\text{und}(i,M1)+\text{un9}(i+1,M1)*\text{una}(i,M1)+\text{un9}(i-1,M1)*\text{unb}(i,M1))/(2*\text{und}(i,M1)+\text{una}(i,M1)+\text{unb}(i,M1));$$

$$\text{un10}(i,1)=(2*\text{un10}(i,2)*\text{unc}(i,1)+\text{un10}(i+1,1)*\text{una}(i,1)+\text{un10}(i-1,1)*\text{unb}(i,1))/(2*\text{unc}(i,1)+\text{una}(i,1)+\text{unb}(i,1));$$

$$\text{un10}(i,M1)=(2*\text{un10}(i,M)*\text{und}(i,M1)+\text{un10}(i+1,M1)*\text{una}(i,M1)+\text{un10}(i-1,M1)*\text{unb}(i,M1)+(-1)*\text{eletrodo}(1,j)*(2*I*\text{deltax})/(\text{Area}*(c1(N1,j))))/(2*\text{und}(i,M1)+\text{una}(i,M1)+\text{unb}(i,M1));$$

$$\text{un11}(i,1)=(2*\text{un11}(i,2)*\text{unc}(i,1)+\text{un11}(i+1,1)*\text{una}(i,1)+\text{un11}(i-1,1)*\text{unb}(i,1))/(2*\text{unc}(i,1)+\text{una}(i,1)+\text{unb}(i,1));$$

$$\text{un11}(i,M1)=(2*\text{un11}(i,M)*\text{und}(i,M1)+\text{un11}(i+1,M1)*\text{una}(i,M1)+\text{un11}(i-1,M1)*\text{unb}(i,M1)+(-1)*\text{eletrodo}(2,j)*(2*I*\text{deltax})/(\text{Area}*(c1(N1,j))))/(2*\text{und}(i,M1)+\text{una}(i,M1)+\text{unb}(i,M1));$$

$$\text{un12}(i,1)=(2*\text{un12}(i,2)*\text{unc}(i,1)+\text{un12}(i+1,1)*\text{una}(i,1)+\text{un12}(i-1,1)*\text{unb}(i,1))/(2*\text{unc}(i,1)+\text{una}(i,1)+\text{unb}(i,1));$$

$$\text{un12}(i,M1)=(2*\text{un12}(i,M)*\text{und}(i,M1)+\text{un12}(i+1,M1)*\text{una}(i,M1)+\text{un12}(i-1,M1)*\text{unb}(i,M1)+(-1)*\text{eletrodo}(3,j)*(2*I*\text{deltax})/(\text{Area}*(c1(N1,j))))/(2*\text{und}(i,M1)+\text{una}(i,M1)+\text{unb}(i,M1));$$

end

$$\text{un1}(1,1)=(\text{un1}(1,2)*\text{unc}(1,1)+\text{un1}(2,1)*\text{una}(1,1))/(\text{una}(1,1)+\text{unc}(1,1));$$

$$\text{un1}(N1,1)=(\text{un1}(N1,2)*\text{unc}(N1,1)+\text{un1}(N,1)*\text{unb}(N1,1))/(\text{unb}(N1,1)+\text{unc}(N1,1));$$

$$\text{un1}(1,M1)=(\text{un1}(1,M)*\text{und}(1,M1)+\text{un1}(2,M1)*\text{una}(1,M1))/(\text{una}(1,M1)+\text{und}(1,M1));$$

$$\text{un1}(N1,M1)=(\text{un1}(N1,M)*\text{und}(N1,M1)+\text{un1}(N,M1)*\text{unb}(N1,M1))/(\text{und}(N1,M1)+\text{und}(N1,M1));$$

$$\text{un2}(1,1)=(\text{un2}(1,2)*\text{unc}(1,1)+\text{un2}(2,1)*\text{una}(1,1))/(\text{una}(1,1)+\text{unc}(1,1));$$

$$\text{un2}(N1,1)=(\text{un2}(N1,2)*\text{unc}(N1,1)+\text{un2}(N,1)*\text{unb}(N1,1))/(\text{unb}(N1,1)+\text{unc}(N1,1));$$

$$\text{un2}(1,M1)=(\text{un2}(1,M)*\text{und}(1,M1)+\text{un2}(2,M1)*\text{una}(1,M1))/(\text{una}(1,M1)+\text{und}(1,M1));$$

$$\text{un2}(N1,M1)=(\text{un2}(N1,M)*\text{und}(N1,M1)+\text{un2}(N,M1)*\text{unb}(N1,M1))/(\text{und}(N1,M1)+\text{und}(N1,M1));$$

$$\text{un3}(1,1)=(\text{un3}(1,2)*\text{unc}(1,1)+\text{un3}(2,1)*\text{una}(1,1))/(\text{una}(1,1)+\text{unc}(1,1));$$

$$\text{un3}(N1,1)=(\text{un3}(N1,2)*\text{unc}(N1,1)+\text{un3}(N,1)*\text{unb}(N1,1))/(\text{unb}(N1,1)+\text{unc}(N1,1));$$

$$\text{un3}(1,M1)=(\text{un3}(1,M)*\text{und}(1,M1)+\text{un3}(2,M1)*\text{una}(1,M1))/(\text{una}(1,M1)+\text{und}(1,M1));$$

$$\text{un3}(N1,M1)=(\text{un3}(N1,M)*\text{und}(N1,M1)+\text{un3}(N,M1)*\text{unb}(N1,M1))/(\text{und}(N1,M1)+\text{und}(N1,M1));$$

$$\text{un4}(1,1)=(\text{un4}(1,2)*\text{unc}(1,1)+\text{un4}(2,1)*\text{una}(1,1))/(\text{una}(1,1)+\text{unc}(1,1));$$

$$\text{un4}(N1,1)=(\text{un4}(N1,2)*\text{unc}(N1,1)+\text{un4}(N,1)*\text{unb}(N1,1))/(\text{unb}(N1,1)+\text{unc}(N1,1));$$

$$\text{un4}(1,M1)=(\text{un4}(1,M)*\text{und}(1,M1)+\text{un4}(2,M1)*\text{una}(1,M1))/(\text{una}(1,M1)+\text{und}(1,M1));$$

$$\text{un4}(N1,M1)=(\text{un4}(N1,M)*\text{und}(N1,M1)+\text{un4}(N,M1)*\text{unb}(N1,M1))/(\text{und}(N1,M1)+\text{und}(N1,M1));$$

$$\text{un5}(1,1)=(\text{un5}(1,2)*\text{unc}(1,1)+\text{un5}(2,1)*\text{una}(1,1))/(\text{una}(1,1)+\text{unc}(1,1));$$

$$\text{un5}(N1,1)=(\text{un5}(N1,2)*\text{unc}(N1,1)+\text{un5}(N,1)*\text{unb}(N1,1))/(\text{unb}(N1,1)+\text{unc}(N1,1));$$

$$\text{un5}(1,M1)=(\text{un5}(1,M)*\text{und}(1,M1)+\text{un5}(2,M1)*\text{una}(1,M1))/(\text{una}(1,M1)+\text{und}(1,M1));$$

$$\text{un5}(N1,M1)=(\text{un5}(N1,M)*\text{und}(N1,M1)+\text{un5}(N,M1)*\text{unb}(N1,M1))/(\text{und}(N1,M1)+\text{und}(N1,M1));$$

$$\text{un6}(1,1)=(\text{un6}(1,2)*\text{unc}(1,1)+\text{un6}(2,1)*\text{una}(1,1))/(\text{una}(1,1)+\text{unc}(1,1));$$

$$\text{un6}(N1,1)=(\text{un6}(N1,2)*\text{unc}(N1,1)+\text{un6}(N,1)*\text{unb}(N1,1))/(\text{unb}(N1,1)+\text{unc}(N1,1));$$

$$\text{un6}(1,M1)=(\text{un6}(1,M)*\text{und}(1,M1)+\text{un6}(2,M1)*\text{una}(1,M1))/(\text{una}(1,M1)+\text{und}(1,M1));$$

$$\text{un6}(N1,M1)=(\text{un6}(N1,M)*\text{und}(N1,M1)+\text{un6}(N,M1)*\text{unb}(N1,M1))/(\text{und}(N1,M1)+\text{und}(N1,M1));$$

$$\text{un7}(1,1)=(\text{un7}(1,2)*\text{unc}(1,1)+\text{un7}(2,1)*\text{una}(1,1))/(\text{una}(1,1)+\text{unc}(1,1));$$

$$\text{un7}(N1,1)=(\text{un7}(N1,2)*\text{unc}(N1,1)+\text{un7}(N,1)*\text{unb}(N1,1))/(\text{unb}(N1,1)+\text{unc}(N1,1));$$

$$\text{un7}(1,M1)=(\text{un7}(1,M)*\text{und}(1,M1)+\text{un7}(2,M1)*\text{una}(1,M1))/(\text{una}(1,M1)+\text{und}(1,M1));$$

$$\text{un7}(N1,M1)=(\text{un7}(N1,M)*\text{und}(N1,M1)+\text{un7}(N,M1)*\text{unb}(N1,M1))/(\text{und}(N1,M1)+\text{und}(N1,M1));$$

$$\text{un8}(1,1)=(\text{un8}(1,2)*\text{unc}(1,1)+\text{un8}(2,1)*\text{una}(1,1))/(\text{una}(1,1)+\text{unc}(1,1));$$

$$\text{un8}(N1,1)=(\text{un8}(N1,2)*\text{unc}(N1,1)+\text{un8}(N,1)*\text{unb}(N1,1))/(\text{unb}(N1,1)+\text{unc}(N1,1));$$

$$\text{un8}(1,M1)=(\text{un8}(1,M)*\text{und}(1,M1)+\text{un8}(2,M1)*\text{una}(1,M1))/(\text{una}(1,M1)+\text{und}(1,M1));$$

$$\text{un8}(N1,M1)=(\text{un8}(N1,M)*\text{und}(N1,M1)+\text{un8}(N,M1)*\text{unb}(N1,M1))/(\text{und}(N1,M1)+\text{und}(N1,M1));$$

$$\text{un9}(1,1)=(\text{un9}(1,2)*\text{unc}(1,1)+\text{un9}(2,1)*\text{una}(1,1))/(\text{una}(1,1)+\text{unc}(1,1));$$

$$\text{un9}(N1,1)=(\text{un9}(N1,2)*\text{unc}(N1,1)+\text{un9}(N,1)*\text{unb}(N1,1))/(\text{unb}(N1,1)+\text{unc}(N1,1));$$

$$\text{un9}(1,M1)=(\text{un9}(1,M)*\text{und}(1,M1)+\text{un9}(2,M1)*\text{una}(1,M1))/(\text{una}(1,M1)+\text{und}(1,M1));$$

$$\text{un9}(N1,M1)=(\text{un9}(N1,M)*\text{und}(N1,M1)+\text{un9}(N,M1)*\text{unb}(N1,M1))/(\text{und}(N1,M1)+\text{und}(N1,M1));$$

$$\text{un10}(1,1)=(\text{un10}(1,2)*\text{unc}(1,1)+\text{un10}(2,1)*\text{una}(1,1))/(\text{una}(1,1)+\text{unc}(1,1));$$

$$\text{un10}(N1,1)=(\text{un10}(N1,2)*\text{unc}(N1,1)+\text{un10}(N,1)*\text{unb}(N1,1))/(\text{unb}(N1,1)+\text{unc}(N1,1));$$

$$un10(1,M1)=(un10(1,M)*und(1,M1)+un10(2,M1)*una(1,M1))/(una(1,M1)+und(1,M1));$$

$$un10(N1,M1)=(un10(N1,M)*und(N1,M1)+un10(N,M1)*unb(N1,M1))/(und(N1,M1)+und(N1,M1));$$

$$un11(1,1)=(un11(1,2)*unc(1,1)+un11(2,1)*una(1,1))/(una(1,1)+unc(1,1));$$

$$un11(N1,1)=(un11(N1,2)*unc(N1,1)+un11(N,1)*unb(N1,1))/(unb(N1,1)+unc(N1,1));$$

$$un11(1,M1)=(un11(1,M)*und(1,M1)+un11(2,M1)*una(1,M1))/(una(1,M1)+und(1,M1));$$

$$un11(N1,M1)=(un11(N1,M)*und(N1,M1)+un11(N,M1)*unb(N1,M1))/(und(N1,M1)+und(N1,M1));$$

$$un12(1,1)=(un12(1,2)*unc(1,1)+un12(2,1)*una(1,1))/(una(1,1)+unc(1,1));$$

$$un12(N1,1)=(un12(N1,2)*unc(N1,1)+un12(N,1)*unb(N1,1))/(unb(N1,1)+unc(N1,1));$$

$$un12(1,M1)=(un12(1,M)*und(1,M1)+un12(2,M1)*una(1,M1))/(una(1,M1)+und(1,M1));$$

$$un12(N1,M1)=(un12(N1,M)*und(N1,M1)+un12(N,M1)*unb(N1,M1))/(und(N1,M1)+und(N1,M1));$$

onde un1, un2, un3, un4, un5, un6, un7, un8, un9, un10, un11 e un12 são as matrizes onde estão armazenadas as distribuições de potencial elétrico calculadas para os doze padrões de injeção de corrente elétrica no domínio.

Posteriormente são determinados os valores da variável de interesse nos pontos internos do domínio. A diferença entre o algoritmo iterativo SOR e o algoritmo iterativo de Gauss-Seidel está justamente nessa parte do algoritmo, ou seja, no cálculo do potencial para um ponto do domínio em uma determinada iteração $k+1$. Para Gauss-Seidel, o valor da variável de interesse é calculado através dos valores do potencial nos pontos vizinhos. Por sua vez, os valores da matriz de potencial vão sendo atualizadas durante a iteração $k+1$. Assim sendo, ao ser aproximado o valor do potencial no ponto i,j na iteração $k+1$, este valor já é utilizado na mesma iteração para aproximar o valor do potencial nos pontos vizinhos a i,j . No SOR, o potencial para um ponto i,j do domínio, em uma determinada iteração $k+1$, é aproximado através do cálculo da média entre o valor do potencial na iteração anterior k e o valor calculado utilizando o método de Gauss-Seidel na iteração $k+1$ (Cunha, 2003). Matematicamente, utilizando o estêncil de cinco pontos em um domínio com condutividade constante, a equação que aproxima o valor do

laplaciano do potencial em i,j para o algoritmo de Gauss-Seidel é a aproximação clássica de cinco pontos por diferenças finitas:

$$u_{i,j}^{k+1} = \left[\frac{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j}^a) + (\sigma_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-1,j}^a) + (\sigma_{i,j+\frac{1}{2}} u_{i,j+1}^a) + (\sigma_{i,j-\frac{1}{2}} u_{i,j-1}^a)}{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j} + \sigma_{i-\frac{1}{2},j} + \sigma_{i,j+\frac{1}{2}} + \sigma_{i,j-\frac{1}{2}})} \right]$$

onde a pode ser igual a k ou $k+1$.

Para o SOR, considerando estêncil de cinco pontos para o laplaciano, a equação é a seguinte:

$$u_{i,j}^{k+1} = (1-w)u_{i,j}^k + w \left[\frac{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j}^a) + (\sigma_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-1,j}^a) + (\sigma_{i,j+\frac{1}{2}} u_{i,j+1}^a) + (\sigma_{i,j-\frac{1}{2}} u_{i,j-1}^a)}{(\sigma_{i+\frac{1}{2},j} + \sigma_{i-\frac{1}{2},j} + \sigma_{i,j+\frac{1}{2}} + \sigma_{i,j-\frac{1}{2}})} \right]$$

onde w é o parâmetro de relaxação e pode assumir valores entre 1 e 2.

Utilizando o método SOR o potencial é aproximado nos pontos internos do domínio da seguinte maneira:

for i=2:N

for j=2:M

un1(i,j)=(w1)*un1(i,j)+w*(((una(i,j)*un1(i+1,j)+unb(i,j)*un1(i-1,j)+unc(i,j)*un1(i,j+1)+und(i,j)*un1(i,j-1))/(una(i,j)+unb(i,j)+unc(i,j)+und(i,j))));

un2(i,j)=(w1)*un2(i,j)+w*(((una(i,j)*un2(i+1,j)+unb(i,j)*un2(i-1,j)+unc(i,j)*un2(i,j+1)+und(i,j)*un2(i,j-1))/(una(i,j)+unb(i,j)+unc(i,j)+und(i,j))));

un3(i,j)=(w1)*un3(i,j)+w*(((una(i,j)*un3(i+1,j)+unb(i,j)*un3(i-1,j)+unc(i,j)*un3(i,j+1)+und(i,j)*un3(i,j-1))/(una(i,j)+unb(i,j)+unc(i,j)+und(i,j))));

un4(i,j)=(w1)*un4(i,j)+w*(((una(i,j)*un4(i+1,j)+unb(i,j)*un4(i-1,j)+unc(i,j)*un4(i,j+1)+und(i,j)*un4(i,j-1))/(una(i,j)+unb(i,j)+unc(i,j)+und(i,j))));

un5(i,j)=(w1)*un5(i,j)+w*(((una(i,j)*un5(i+1,j)+unb(i,j)*un5(i-1,j)+unc(i,j)*un5(i,j+1)+und(i,j)*un5(i,j-1))/(una(i,j)+unb(i,j)+unc(i,j)+und(i,j))));

```

un6(i,j)=(w1)*un6(i,j)+w*[((una(i,j)*un6(i+1,j)+unb(i,j)*un6(i-
1,j)+unc(i,j)*un6(i,j+1)+und(i,j)*un6(i,j-1))/(una(i,j)+unb(i,j)+unc(i,j)+und(i,j)))]);

un7(i,j)=(w1)*un7(i,j)+w*[((una(i,j)*un7(i+1,j)+unb(i,j)*un7(i-
1,j)+unc(i,j)*un7(i,j+1)+und(i,j)*un7(i,j-1))/(una(i,j)+unb(i,j)+unc(i,j)+und(i,j)))]);

un8(i,j)=(w1)*un8(i,j)+w*[((una(i,j)*un8(i+1,j)+unb(i,j)*un8(i-
1,j)+unc(i,j)*un8(i,j+1)+und(i,j)*un8(i,j-1))/(una(i,j)+unb(i,j)+unc(i,j)+und(i,j)))]);

un9(i,j)=(w1)*un9(i,j)+w*[((una(i,j)*un9(i+1,j)+unb(i,j)*un9(i-
1,j)+unc(i,j)*un9(i,j+1)+und(i,j)*un9(i,j-1))/(una(i,j)+unb(i,j)+unc(i,j)+und(i,j)))]);

un10(i,j)=(w1)*un10(i,j)+w*[((una(i,j)*un10(i+1,j)+unb(i,j)*un10(i-
1,j)+unc(i,j)*un10(i,j+1)+und(i,j)*un10(i,j-1))/(una(i,j)+unb(i,j)+unc(i,j)+und(i,j)))]);

un11(i,j)=(w1)*un11(i,j)+w*[((una(i,j)*un11(i+1,j)+unb(i,j)*un11(i-
1,j)+unc(i,j)*un11(i,j+1)+und(i,j)*un11(i,j-1))/(una(i,j)+unb(i,j)+unc(i,j)+und(i,j)))]);

un12(i,j)=(w1)*un12(i,j)+w*[((una(i,j)*un12(i+1,j)+unb(i,j)*un12(i-
1,j)+unc(i,j)*un12(i,j+1)+und(i,j)*un12(i,j-1))/(una(i,j)+unb(i,j)+unc(i,j)+und(i,j)))]);

end

end

end

```

Na sequência, o potencial elétrico em cada um dos eletrodos é aproximado, para cada um dos padrões de injeção de corrente:

```
for C=1:4
```

```
potencial (1,C)=(un1(1,6*C-3)+ un1(1,6*C-2)+ un1(1,6*C-1))/3;
```

```
potencial (2,C)= (un1(6*C-3,1)+ un1(6*C-2,1)+ un1(6*C-1,1))/3;
```

```
potencial (3,C)=(un1(N+1,6*C-3)+ un1(N+1,6*C-2)+ un1(N+1,6*C-1))/3;
```

```
potencial (4,C)= (un1(6*C-3,M+1)+ un1(6*C-2,M+1)+ un1(6*C-1,M+1))/3;
```

$$\text{potencial2 (1,C)}=(\text{un2}(1,6^*C-3)+ \text{un2}(1,6^*C-2)+ \text{un2}(1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial2 (2,C)}= (\text{un2}(6^*C-3,1)+ \text{un2}(6^*C-2,1)+ \text{un2}(6^*C-1,1))/3;$$

$$\text{potencial2 (3,C)}=(\text{un2}(N+1,6^*C-3)+ \text{un2}(N+1,6^*C-2)+ \text{un2}(N+1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial2 (4,C)}= (\text{un2}(6^*C-3,M+1)+ \text{un2}(6^*C-2,M+1)+ \text{un2}(6^*C-1,M+1))/3;$$

$$\text{potencial3 (1,C)}=(\text{un3}(1,6^*C-3)+ \text{un3}(1,6^*C-2)+ \text{un3}(1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial3 (2,C)}= (\text{un3}(6^*C-3,1)+ \text{un3}(6^*C-2,1)+ \text{un3}(6^*C-1,1))/3;$$

$$\text{potencial3 (3,C)}=(\text{un3}(N+1,6^*C-3)+ \text{un3}(N+1,6^*C-2)+ \text{un3}(N+1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial3 (4,C)}= (\text{un3}(6^*C-3,M+1)+ \text{un3}(6^*C-2,M+1)+ \text{un3}(6^*C-1,M+1))/3;$$

$$\text{potencial4 (1,C)}=(\text{un4}(1,6^*C-3)+ \text{un4}(1,6^*C-2)+ \text{un4}(1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial4 (2,C)}= (\text{un4}(6^*C-3,1)+ \text{un4}(6^*C-2,1)+ \text{un4}(6^*C-1,1))/3;$$

$$\text{potencial4 (3,C)}=(\text{un4}(N+1,6^*C-3)+ \text{un4}(N+1,6^*C-2)+ \text{un4}(N+1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial4 (4,C)}= (\text{un4}(6^*C-3,M+1)+ \text{un4}(6^*C-2,M+1)+ \text{un4}(6^*C-1,M+1))/3;$$

$$\text{potencial5 (1,C)}=(\text{un5}(1,6^*C-3)+ \text{un5}(1,6^*C-2)+ \text{un5}(1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial5 (2,C)}= (\text{un5}(6^*C-3,1)+ \text{un5}(6^*C-2,1)+ \text{un5}(6^*C-1,1))/3;$$

$$\text{potencial5 (3,C)}=(\text{un5}(N+1,6^*C-3)+ \text{un5}(N+1,6^*C-2)+ \text{un5}(N+1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial5 (4,C)}= (\text{un5}(6^*C-3,M+1)+ \text{un5}(6^*C-2,M+1)+ \text{un5}(6^*C-1,M+1))/3;$$

$$\text{potencial6 (1,C)}=(\text{un6}(1,6^*C-3)+ \text{un6}(1,6^*C-2)+ \text{un6}(1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial6 (2,C)}= (\text{un6}(6^*C-3,1)+ \text{un6}(6^*C-2,1)+ \text{un6}(6^*C-1,1))/3;$$

$$\text{potencial6 (3,C)}=(\text{un6}(N+1,6^*C-3)+ \text{un6}(N+1,6^*C-2)+ \text{un6}(N+1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial6 (4,C)}= (\text{un6}(6^*C-3,M+1)+ \text{un6}(6^*C-2,M+1)+ \text{un6}(6^*C-1,M+1))/3;$$

$$\text{potencial7 (1,C)}=(\text{un7}(1,6^*C-3)+ \text{un7}(1,6^*C-2)+ \text{un7}(1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial7 (2,C)}= (\text{un7}(6^*C-3,1)+ \text{un7}(6^*C-2,1)+ \text{un7}(6^*C-1,1))/3;$$

$$\text{potencial7 (3,C)}=(\text{un7}(N+1,6^*C-3)+ \text{un7}(N+1,6^*C-2)+ \text{un7}(N+1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial7 (4,C)}= (\text{un7}(6^*C-3,M+1)+ \text{un7}(6^*C-2,M+1)+ \text{un7}(6^*C-1,M+1))/3;$$

$$\text{potencial8 (1,C)}=(\text{un8}(1,6^*C-3)+ \text{un8}(1,6^*C-2)+ \text{un8}(1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial8 (2,C)}= (\text{un8}(6^*C-3,1)+ \text{un8}(6^*C-2,1)+ \text{un8}(6^*C-1,1))/3;$$

$$\text{potencial8 (3,C)}=(\text{un8}(N+1,6^*C-3)+ \text{un8}(N+1,6^*C-2)+ \text{un8}(N+1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial8 (4,C)}= (\text{un8}(6^*C-3,M+1)+ \text{un8}(6^*C-2,M+1)+ \text{un8}(6^*C-1,M+1))/3;$$

$$\text{potencial9 (1,C)}=(\text{un9}(1,6^*C-3)+ \text{un9}(1,6^*C-2)+ \text{un9}(1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial9 (2,C)}= (\text{un9}(6^*C-3,1)+ \text{un9}(6^*C-2,1)+ \text{un9}(6^*C-1,1))/3;$$

$$\text{potencial9 (3,C)}=(\text{un9}(N+1,6^*C-3)+ \text{un9}(N+1,6^*C-2)+ \text{un9}(N+1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial9 (4,C)}= (\text{un9}(6^*C-3,M+1)+ \text{un9}(6^*C-2,M+1)+ \text{un9}(6^*C-1,M+1))/3;$$

$$\text{potencial10 (1,C)}=(\text{un10}(1,6^*C-3)+ \text{un10}(1,6^*C-2)+ \text{un10}(1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial10 (2,C)}= (\text{un10}(6^*C-3,1)+ \text{un10}(6^*C-2,1)+ \text{un10}(6^*C-1,1))/3;$$

$$\text{potencial10 (3,C)}=(\text{un10}(N+1,6^*C-3)+ \text{un10}(N+1,6^*C-2)+ \text{un10}(N+1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial10 (4,C)}= (\text{un10}(6^*C-3,M+1)+ \text{un10}(6^*C-2,M+1)+ \text{un10}(6^*C-1,M+1))/3;$$

$$\text{potencial11 (1,C)}=(\text{un11}(1,6^*C-3)+ \text{un11}(1,6^*C-2)+ \text{un11}(1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial11 (2,C)}= (\text{un11}(6^*C-3,1)+ \text{un11}(6^*C-2,1)+ \text{un11}(6^*C-1,1))/3;$$

$$\text{potencial11 (3,C)}=(\text{un11}(N+1,6^*C-3)+ \text{un11}(N+1,6^*C-2)+\text{un11}(N+1,6^*C-1))/3;$$

$$\text{potencial11 (4,C)}= (\text{un11}(6^*C-3,M+1)+ \text{un11}(6^*C-2,M+1)+ \text{un11}(6^*C-1,M+1))/3;$$

$$\text{potencial12 (1,C)}=(\text{un12}(1,6^*C-3)+ \text{un12}(1,6^*C-2)+ \text{un12}(1,6^*C-1))/3;$$

```

potencial12 (2,C)= (un12(6*C-3,1)+ un12(6*C-2,1)+ un12(6*C-1,1))/3;
potencial12 (3,C)=(un12(N+1,6*C-3)+ un12(N+1,6*C-2)+ un12(N+1,6*C-1))/3;
potencial12 (4,C)= (un12(6*C-3,M+1)+ un12(6*C-2,M+1)+ un12(6*C-1,M+1))/3;
end

```

As matrizes $potencial^k(c,d)$ armazenam os valores de potencial elétrico calculados para cada eletrodo, para todos os padrões de injeção de corrente.

A partir dos dados armazenados nas matrizes $potencial^k(c,d)$, são calculados os valores das ddp's para pares de eletrodos adjacentes dispostos no contorno. Esse cálculo é realizado para todos os padrões de injeção de corrente e armazenados nas matrizes $ddp^k(c,d)$, como mostrado a seguir:

```

for i=1:3
ddp1(1,i)=potencial(1,i+1)-potencial(1,i);
ddp1(2,i)=potencial(2,i+1)-potencial(2,i);
ddp1(3,i)=potencial(3,i+1)-potencial(3,i);
ddp1(4,i)=potencial(4,i+1)-potencial(4,i);
ddp2(1,i)=potencial2(1,i+1)-potencial2(1,i);
ddp2(2,i)=potencial2(2,i+1)-potencial2(2,i);
ddp2(3,i)=potencial2(3,i+1)-potencial2(3,i);
ddp2(4,i)=potencial2(4,i+1)-potencial2(4,i);
ddp3(1,i)=potencial3(1,i+1)-potencial3(1,i);
ddp3(2,i)=potencial3(2,i+1)-potencial3(2,i);
ddp3(3,i)=potencial3(3,i+1)-potencial3(3,i);

```

ddp3(4,i)=potencial3(4,i+1)-potencial3(4,i);

ddp4(1,i)=potencial4(1,i+1)-potencial4(1,i);

ddp4(2,i)=potencial4(2,i+1)-potencial4(2,i);

ddp4(3,i)=potencial4(3,i+1)-potencial4(3,i);

ddp4(4,i)=potencial4(4,i+1)-potencial4(4,i);

ddp5(1,i)=potencial5(1,i+1)-potencial5(1,i);

ddp5(2,i)=potencial5(2,i+1)-potencial5(2,i);

ddp5(3,i)=potencial5(3,i+1)-potencial5(3,i);

ddp5(4,i)=potencial5(4,i+1)-potencial5(4,i);

ddp6(1,i)=potencial6(1,i+1)-potencial6(1,i);

ddp6(2,i)=potencial6(2,i+1)-potencial6(2,i);

ddp6(3,i)=potencial6(3,i+1)-potencial6(3,i);

ddp6(4,i)=potencial6(4,i+1)-potencial6(4,i);

ddp7(1,i)=potencial7(1,i+1)-potencial7(1,i);

ddp7(2,i)=potencial7(2,i+1)-potencial7(2,i);

ddp7(3,i)=potencial7(3,i+1)-potencial7(3,i);

ddp7(4,i)=potencial7(4,i+1)-potencial7(4,i);

ddp8(1,i)=potencial8(1,i+1)-potencial8(1,i);

ddp8(2,i)=potencial8(2,i+1)-potencial8(2,i);

ddp8(3,i)=potencial8(3,i+1)-potencial8(3,i);

ddp8(4,i)=potencial8(4,i+1)-potencial8(4,i);

ddp9(1,i)=potencial9(1,i+1)-potencial9(1,i);

ddp9(2,i)=potencial9(2,i+1)-potencial9(2,i);

ddp9(3,i)=potencial9(3,i+1)-potencial9(3,i);

ddp9(4,i)=potencial9(4,i+1)-potencial9(4,i);

ddp10(1,i)=potencial10(1,i+1)-potencial10(1,i);

ddp10(2,i)=potencial10(2,i+1)-potencial10(2,i);

ddp10(3,i)=potencial10(3,i+1)-potencial10(3,i);

ddp10(4,i)=potencial10(4,i+1)-potencial10(4,i);

ddp11(1,i)=potencial11(1,i+1)-potencial11(1,i);

ddp11(2,i)=potencial11(2,i+1)-potencial11(2,i);

ddp11(3,i)=potencial11(3,i+1)-potencial11(3,i);

ddp11(4,i)=potencial11(4,i+1)-potencial11(4,i);

ddp12(1,i)=potencial12(1,i+1)-potencial12(1,i);

ddp12(2,i)=potencial12(2,i+1)-potencial12(2,i);

ddp12(3,i)=potencial12(3,i+1)-potencial12(3,i);

ddp12(4,i)=potencial12(4,i+1)-potencial12(4,i);

end

APÊNDICE II

Para fazer a solução do problema direto da TIE, foi implementado o algoritmo, mostrado a seguir, escrito em linguagem matlab:

%Problema inverso

```

contador2=0; (computa o número de novas distribuições de condutividade aceitas,
durante o processo iterativo)
contador=0; (armazena o número total de iterações)
c(1:N1,1:M1)=5; (Matriz de condutividade na iteração k+1)
c1(1:N1,1:M1)=5; (Matriz de condutividade na iteração k)
c_menor(1:N1,1:M1)=5; (Armazena a distribuição de condutividade que apresentou
o menor valor para função objetivo)
errok=2000; (Valor da função objetivo na iteração k)
erro_menor=2000; (Menor valor da função objetivo)
L2=0.1; (valor inicial do passo)
T=5;(Parâmetro de controle)
A= fspecial('gaussian', 10, 5); (Matriz do filtro gaussiano)
dc=1*randn(N+1,M+1); (Matriz com números aleatórios)
dc = imfilter(dc,A); (filtragem de altas frequências da matriz de números aleatórios)
b=0.9999;(Taxa de relaxação do parâmetro de controle)

for contador=1:3500
T=b*T;
w2=contador2/(contador); (Porcentagem de distribuições de condutividade aceitas)
L=L2;
(Cálculo do tamanho do passo L)
if w2>0.6
L=L2*(1+100*(w2-0.6)/0.4);
endif w2<0.4
L=L2/(1+100*(0.4-w2)/0.6);
end

c=c+(L*c.*dc); (Cálculo da distribuição de condutividade na iteração atual)
c=abs(c);
(Mantendo todos os valores de condutividade dentro de um intervalo específico)
for i=1:N1
for j=1:M1
if c(i,j)>=5
c(i,j)=5;
end
if c(i,j)<=2
c(i,j)=2;

```



```

end
end
end
(armazenando a matriz de condutividade k+1 como a matriz de condutividade k)
c1=c;
problema_direto (solução do problema direto)
errok1=0;
(cálculo do valor da função objetivo na iteração atual k+1)
for i=1:4
for j=1:3
errok1=errok1 + ((ddp(i,j)- ddpt1 (i,j))^2+(ddp2(i,j)- ddpt12 (i,j))^2+(ddp3(i,j)-
ddpt13 (i,j))^2+(ddp4(i,j)- ddpt14 (i,j))^2+(ddp5(i,j)- ddpt15 (i,j))^2+(ddp6(i,j)-
ddpt16 (i,j))^2+(ddp7(i,j)- ddpt17 (i,j))^2+(ddp8(i,j)- ddpt18 (i,j))^2+(ddp9(i,j)-
ddpt19 (i,j))^2+(ddp10(i,j)- ddpt110 (i,j))^2+(ddp11(i,j)- ddpt111
(i,j))^2+(ddp12(i,j)- ddpt112 (i,j))^2);
end
end

(Condições de seleção da nova distribuição de condutividade)
e=errok1-errok;
P=exp(-(e/T));
aleatorio2 = rand (1,1);

if (e)<=0
dc=1*randn(N+1,M+1);
errop=erroa
contador2=contador2+1;
dc = imfilter(dc,A);
end

if (errok1)>(errok) & aleatorio2<P
errok1=errok
contador2=contador2+1;
dc=1*randn(N+1,M+1);
dc = imfilter(dc,A);
c=c_menor;
end

if (errok1)>(errok) & aleatorio2>P
c(i,j)= c1(i,j);
dc=1*randn(N+1,M+1);
dc = imfilter(dc,A);
end

if erro_menor>erroa
erro_menor=erroa;
c_menor=c;
rand('seed',round(10000*rand(1)))end

```

