



Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
FACULDADE DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS

ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR EM PLUMAS HIPOPICNAIS

BRUNO AVILA FARENZENA

Graduado em engenharia mecânica

ORIENTADOR: PROF. DR. JORGE HUGO SILVESTRINI

Dissertação de mestrado realizada no Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia de Materiais (PGETEMA) da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia e Tecnologia de Materiais.

Porto Alegre
10 DE MARÇO DE 2016



Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

FACULDADE DE ENGENHARIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS

ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR EM PLUMAS HIPOPICNAIS

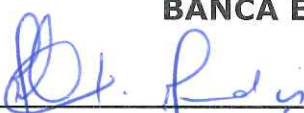
CANDIDATO: BRUNO AVILA FARENZENA

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia de Materiais da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.



DR. JORGE HUGO SILVESTRINI - ORIENTADOR

BANCA EXAMINADORA



**DR. MÁRCIO TEIXEIRA DE MENDONÇA - DIVISÃO DE PROPULSÃO AERONÁUTICA,
- ITA**



DR. RUBEM MÁRIO FIGUEIRÓ VARGAS - DO PGETEMA/FENG - PUCRS

"Existe uma teoria que diz que, se um dia alguém descobrir exatamente para que serve o Universo e por que ele está aqui, ele desaparecerá instantaneamente e será substituído por algo ainda mais estranho e inexplicável. Existe uma segunda teoria que diz que isso já aconteceu." (Guia do Mochileiro das Galaxias)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus pais, Carla Rejane Avila e Hélio Vilmar Farenzena, e meu irmão Guilherme Avila Farenzena pelo apoio incondicional durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Agradeço ao professor Jorge Hugo Silvestrini por oferecer a oportunidade de ingressar no mestrado e participar dos projetos de pesquisa realizados no LASET.

A equipe do LASET, pesquisadores e estagiário, que me ajudaram a dar continuidade ao trabalho.

Aos meus colegas e amigos Felipe Schuch, João Lempek e Ricardo Frantz pelo apoio nos mais variados assuntos.

O presente estudo foi alcançado em cooperação com a Hewlett-Packard Brasil Ltda. e com recursos provenientes da Lei de Informática (Lei nº 8.248, de 1991).

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	3
SUMÁRIO	4
LISTA DE FIGURAS	6
LISTA DE TABELAS	9
LISTA DE SÍMBOLOS	10
RESUMO	13
ABSTRACT	14
1. INTRODUÇÃO	15
2. OBJETIVOS	18
2.1. Objetivos específicos	18
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
3.1. O início de uma corrente de densidade	20
3.2. Teoria de estabilidade linear	21
3.2.1. Instabilidades em camadas de mistura	25
3.2.2. Instabilidades em <i>tanques</i>	28
4. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	30
4.1. Configuração do escoamento.	30
4.2. Lei de Stokes.	31
4.3. Equações governantes	32
4.4. Linearização	35
5. METODOLOGIA NUMÉRICA	39
5.1. Aproximação de Chebyshev	39
5.2. Transformação da malha	43
5.3. Algoritmo QZ.	45
6. RESULTADOS	46
6.1. Validação do código - Camada de mistura homogênea.	46
6.2. Influência da estratificação de densidade	48
6.3. Como as partículas afetam as instabilidades?	52
6.3.1. Qual é o modo dominante?	55
6.4. Qual a influência da dupla difusividade?	57
6.4.1. O modo transversal ($\alpha = 0$)	58

6.4.2. As instabilidades longitudinais ($\beta = 0$)	59
6.4.3. Qual é o modo dominante?	62
7. CONCLUSÕES	64
7.1. Em relação à estratificação de densidade	64
7.2. Em relação à presença de partículas	65
7.3. Em relação à dupla difusividade	65
8. PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS	66
Referências	67
APÊNDICE A. ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUÇÕES	71
APÊNDICE B. LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES	73

LISTA DE FIGURAS

1.1. Formação de tempestado na região meio-oeste dos Estados Unidos da América. Fonte: CRIENGLISH (2016).	16
1.2. Pluma do Rio Doce afetada pelo rompimento das barragens de mineração em Mariana - MG. Fonte: Folha Vitória (2015)..	17
3.1. Mecanismos de início de uma corrente de densidade: remobilização instantânea de material (a) e remobilização não-instantânea de material (b).	21
3.2. Classificação das correntes de densidade em função da relação entre as massas específicas. Correntes hipopicnais (a), correntes hiperpicnais (b) e correntes mesopicnais (c). Adaptado de Ungarish (2009).	22
3.3. Resposta linear a um impulso no plano (x_1, t) : estável (a), convectivamente instável (b) e absolutamente instável (c). Adaptado de Bagheri et al. (2009).	24
3.4. Configuração do escoamento de base em camadas de mistura estratificadas.	25
3.5. Desenvolvimento da instabilidade de <i>Kelvin-Helmholtz</i> . Adaptado de Martinez (2006).	26
3.6. Esquemático da instabilidade de <i>Holmboe</i> . Adaptado de Lawrence et al. (1991).	27
3.7. Esquemático da instabilidade de <i>Rayleigh-Taylor</i> . Adaptado de Burns e Meiburg (2015)..	29
3.8. Esquemático da instabilidade <i>fingering</i> . Adaptado de Burns e Meiburg (2015).	29
4.1. Desenho esquemático da configuração do escoamento. No lado esquerdo o perfil de velocidade e no lado direito os perfis de massa específica. A linha vermelha e pontilhada representa a massa específica da salinidade, a linha azul e pontilhada representa a massa específica das partículas em suspensão.	31
4.2. Esquema do balanço de forças atuantes em uma partícula esférica presente em um meio fluido segundo a lei de Stokes.	32
5.1. Comparação da convergência de uma solução utilizando um método espectral e um método de diferenças finitas.	40
5.2. Esquema da rotina para calcular uma matriz de derivação de ordem n utilizando o método descrito.	42
5.3. Exemplo de transformação dos pontos <i>CGL</i> utilizando a equação (5.19).	44
6.1. Teste de convergência da solução do problema. Resultados para $Re = 5000$, $m = 100$ e $\theta = 100$	47
6.2. Isolinhas de taxa de amplificação em função dos números de onda longitudinal e transversal. Resultados para $Re = 5000$	47

6.3. Taxas máximas de amplificação (a) e seus números de onda correspondentes (b) em função do número de Reynolds.	48
6.4. Isolinhas de taxa de amplificação em função dos números de onda longitudinal e transversal. Resultados para $Re = 5000$, $R_\rho = 1,5$ e $Ri_2 = 0,4$	49
6.5. Taxas máximas de amplificação (a) e seus números de onda correspondentes (b) em função da relação de densidades e número de Richardson salino.	50
6.6. Campos de perturbação do modo \mathcal{KH} para velocidade longitudinal (a), velocidade vertical (b), concentração de sedimentos (c) e concentração salina (d). Resultados $R_\rho = 2$ e $Ri_2 = 0,4$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1..	51
6.7. Campo de perturbação da vorticidade na direção transversal do modo \mathcal{KH} . Resultados $R_\rho = 2$ e $Ri_2 = 0,4$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1..	51
6.8. Teste de convergência da solução do problema. Resultados para $m = 100$, $\theta = 100$, $R_\rho = 2$ e $u_s = 2,5 \times 10^{-2}$	52
6.9. Isolinhas de taxa de amplificação em função dos números de onda transversal e longitudinal. Resultados para $R_\rho = 1,5$ e $u_s = 2,5 \times 10^{-2}$	53
6.10. Taxas máximas de amplificação (a), números de onda mais amplificados (b) e a velocidade de fase correspondente (c) em função da relação de densidade e velocidade de queda.	54
6.11. Campos de perturbação do modo \mathcal{KH} da concentração de sedimentos em função da velocidade de queda. Resultados para $R_\rho = 2$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1.	54
6.12. Campos de perturbação do modo SD para velocidade transversal (a), velocidade vertical (b), concentração de sedimentos (c) e concentração salina (d). Resultados para $R_\rho = 2,5$ e $u_s = 2,5 \times 10^{-2}$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1..	55
6.13. Campo de perturbação da vorticidade na direção transversal do modo SD . Resultados $R_\rho = 2$ e $Ri_2 = 0,4$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1..	56
6.14. Interface entre os modos \mathcal{KH} e SD em função da velocidade de queda e relação de densidade.	56
6.15. Teste de convergência da solução do problema. Resultados para $m = 100$, $\theta = 100$, $R_\rho = 2$, $Re = 7500$ e $\tau = 100$	57
6.16. Isolinhas de taxa de amplificação em função dos números de onda transversal e longitudinal. Resultados para $Re = 7500$, $\tau = 100$ e $R_\rho = 2$	58
6.17. Taxas máximas de amplificação (a) e seus números de onda correspondentes (b) em função do número de Reynolds. Resultados para $R_\rho = 2$ e $\tau = 100$	59

6.18. Taxas máximas de amplificação (a) e números de onda mais amplificados (b) em função da relações de densidades e difusividades. Resultados para $Re = 10^4$	59
6.19. Campos de perturbação do modo <i>Salt Sheet</i> para velocidade vertical (a), velocidade longitudinal (b) concentração de sedimentos (c) e concentração salina (d). Resultados para $Re = 10^4$, $\tau = 100$ e $R_\rho = 2$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1..	60
6.20. Fronteira de estabilidade e número de onda mais amplificado em função da relação de densidades e número de onda. Resultados para $Re = 7500$ e $\tau = 100$.	60
6.21. Taxas máximas de amplificação (a,b), seus números de onda correspondentes (c,d) e valor absoluto da velocidade de fase (e,f) em função da relação de densidade e número de Reynolds. Resultados para $\tau = 10$ (a,c,e), $\tau = 100$ (b,d,f), $Ri_2 = 0,4$ e $Sc_2 = 1$	61
6.22. Campos de perturbação do modo <i>DDI</i> para velocidade transversal (a,e), velocidade vertical (b,f) concentração de sedimentos (c,g) e concentração salina (d,h). Resultados para $Re = 7500$, $\tau = 100$ e $R_\rho = 3$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1.	62
6.23. Interface entre os modos mais amplificados <i>KH</i> e <i>Salt-sheets</i> em função das relações de densidades e difusividades. Resultados para $Re = 10^4$	63

LISTA DE TABELAS

3.2. Classificação da estabilidade linear modal quanto ao escoamento de base considerando um sistema de coordenadas cartesiano. Adaptado de Juniper et al. (2014).	23
6.3. Comparação dos resultados obtidos com os dados da literatura.	48
6.5. Relação entre Ri_2 e Ri_{1crit}	50

LISTA DE SÍMBOLOS

\tilde{g}	Aceleração gravitacional [m/s^2]
\tilde{g}'	Aceleração gravitacional reduzida de uma concentração [m/s^2]
m	Constante de truncamento do domínio
\tilde{d}_p	Diâmetro da partícula [N]
\tilde{x}_j	Eixo de coordenadas [m]
U	Escala de velocidade [m/s]
L	Escala de comprimento [m]
P	Escala de pressão [Pa]
\bar{q}_j	Estado de base de uma variável de estado do escoamento
\bar{u}_j	Estado de base do vetor campo de velocidade
\tilde{F}_d	Força de arrasto [N]
\tilde{F}_b	Força de empuxo [N]
\tilde{F}_p	Força peso [N]
\hat{p}	Função de amplitude da perturbação da pressão
\hat{q}_j	Função de amplitude da perturbação de uma variável de estado do escoamento
\hat{u}_j	Função de amplitude da perturbação do vetor campo de velocidade
\mathbf{I}	Matriz identidade
N	Número de pontos
Re	Número de Reynolds
Ri_ℓ	Número de Richardson
Sc_ℓ	Número de Schmidt
i	Número imaginário ($\sqrt{-1}$)
\mathcal{M}	Operador laplaciano

p'	Perturbação da pressão
q'_j	Perturbação de uma variável de estado do escoamento
u'_j	Perturbação do vetor campo de velocidade
p	Pressão
R_ρ	Relação de densidades
\tilde{t}	Tempo [s]
q_j	Variável de estado qualquer do escoamento
c	Velocidade de fase
u_s	Velocidade de queda das partículas
\tilde{g}_j	Vetor aceleração gravitacional [m/s^2]
\tilde{u}_j	Vetor campo de velocidade [m/s]
e_j^g	Vetor unitário na direção da gravidade
φ_ℓ	Campo de concentração
$\tilde{\gamma}_\ell$	Coeficiente de expansão de uma concentração [m^3]
θ	Constante de densidade de pontos
$\Delta\tilde{u}$	Diferença entre as velocidades do escoamento de base [m/s]
$\tilde{\kappa}$	Difusividade mássica [m^2/s]
Φ_ℓ	Escala de uma concentração [$1/m^3$]
δ_ρ	Espessura da camada de densidade [m]
δ_u	Espessura da camada de mistura [m]
δ_{φ_ℓ}	Espessura da camada de uma concentração [m]
$\bar{\varphi}_\ell$	Estado de base de um campo de concentração
$\hat{\varphi}_\ell$	Função de amplitude da perturbação de um campo de concentração
$\hat{\omega}_j$	Função de amplitude da perturbação do vetor campo de vorticidade
Θ	Função de fase
σ_r	Frequência angular

ρ	Massa específica
$\tilde{\rho}_c$	Massa específica da corrente [kg/m^3]
$\tilde{\rho}_a$	Massa específica do fluido ambiente [kg/m^3]
$\tilde{\rho}_0$	Massa específica do fluido limpo [kg/m^3]
α	Número de onda da direção x_1
β	Número de onda da direção x_3
φ'_ℓ	Perturbação de um campo de concentração
τ	Relação de difusividades
σ_i	Taxa de amplificação temporal
ω_j	Vetor campo de vorticidade
$\tilde{\nu}_0$	Viscosidade cinemática do fluido limpo [m^2/s]
$\tilde{\mu}_a$	Viscosidade dinâmica do fluido ambiente [$Pa.s$]
$\tilde{\mu}_0$	Viscosidade dinâmica do fluido limpo [$Pa.s$]

RESUMO

FARENZENA, Bruno Avila. **Análise de estabilidade linear em plumas hipopícnais**. Porto Alegre. 2016. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia de Materiais, PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL.

Correntes de densidade são iniciadas quando dois fluidos de diferentes densidades entram em contato, dando início a um movimento relativo entre ambos. Esta diferença de densidades pode ser causada por diferenças de temperaturas, concentração de salinidade, presença de partículas em suspensão, entre outros. Quando estes dois fluidos além de apresentarem diferentes densidades apresentam diferentes propriedades difusivas é dito que existe dupla difusividade. O objetivo deste estudo é investigar, através da teoria da estabilidade linear, como as instabilidades, que se desenvolvem em correntes de densidade sob efeitos de deposição de partículas em suspensão e de dupla difusividade, podem influenciar na transição a turbulência. Para cumprir este objetivo foi desenvolvido um código computacional através do ambiente Julia cuja validação foi realizada a partir dos resultados de um estudo presente na literatura. Posteriormente, resultados foram obtidos para as duas condições citadas anteriormente, onde foi constatado que existem valores críticos relacionados às dimensões das partículas a partir do qual o escoamento é sempre instável e também valores críticos da relação entre as propriedades difusivas onde a dupla difusividade não interfere no desenvolvimento das instabilidades.

Palavras-chave: Correntes de densidade, Teoria da estabilidade linear, Dupla difusividade

ABSTRACT

FARENZENA, Bruno Avila. **Linear stability analysis in hypopycnal plumes**. Porto Alegre. 2016. Master Thesis. Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia de Materiais, PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL.

Density currents initiate when two fluids of different densities come into contact, allowing relative movement between them. Differences in density usually are caused by temperature, salinity concentration, the presence of particles, among others. When these two fluids in addition to having different densities have different diffusive properties it is said that double diffusivity exists. This work aims at the investigation, through linear stability theory, of how the density currents instabilities that develop from particle deposition effects and double diffusivity can influence the transition to turbulence. A computer code, designed in `Julia` language, was initially validated with results available in the literature. Subsequently, results were obtained for the two conditions cited above, they show critical values related to the particle size at which the flow is always unstable and also on the relationship of critical values between diffusive properties where double diffusivity does not interfere with instabilities development.

Keywords: Density currents, Linear stability theory, Double diffusivity

1. INTRODUÇÃO

As correntes de densidade, também conhecidas como correntes de gravidade, ocorrem quando um fluido com determinada massa específica escoar preferencialmente na horizontal em um outro fluido com diferente massa específica. Algumas causas que normalmente estão associadas ao excesso de densidade de um fluido em relação ao outro são a diferença de temperatura, a concentração salina ou a presença de partículas sólidas em suspensão. Uma corrente de densidade é formada quando abrimos a porta de uma casa aquecida e o ar frio de fora escoar pelo chão sob o ar menos denso de dentro (SIMPSON, 1999; UNGARISH, 2009).

Em situações criadas pelo homem podemos observar correntes de densidade, por exemplo, na fabricação de vidros quando o vidro fundido escoar sobre o molde ou nos escapamentos dos automóveis. O primeiro estudo quantitativo de uma corrente de densidade foi realizado por Theodore von Kármán em 1940 motivado pela demanda do exército americano em avaliar *sobre quais circunstâncias de vento um gás venenoso solto iria se propagar para a frente atingindo o inimigo e não para trás causando danos nas tropas que soltaram o gás?* (HUPPERT, 2006).

Na natureza as correntes de densidade podem ser observadas em diversos casos, tais como: a formação de tempestades, causadas pelo deslocamento relativo entre grandes massas de ar quente e massas de ar frio (Figura 1.1.); as tempestades de areia, características de regiões arenosas e com baixa umidade, que transportam grandes quantidades de partículas de areia; as correntes oceânicas que se movem pela presença de gradientes na concentração salina e na temperatura da água (FRANCISCO, 2014); e quando um rio transportando sedimentos e matéria orgânica entra no oceano. Nesses casos o fluido da corrente normalmente possui composição química similar ao (e miscível com) o fluido ambiente (MEIBURG; KNELLER, 2010).

Os rios carregam mais de um terço das precipitações na terra para os oceanos, transportando grandes quantidades de água doce através de passagens estreitas ao longo da costa. Um bom exemplo disso seria o Rio Mississipi que drena aproximadamente 40% dos Estados Unidos em dois afluentes, cada um com menos de 1km de largura (HORNER-DEVINE et al., 2015). O encontro do rio com o oceano forma uma configuração de escoamento conhecida por *pluma de rio*.

O impacto dos materiais transportados por uma pluma de rio pode, do ponto de



Figura 1.1. Formação de tempestado na região meio-oeste dos Estados Unidos da América. Fonte: CRIENGLISH (2016).

vista ambiental, afetar os ecossistemas locais e por consequência a economia de uma região. Um exemplo de impacto negativo de uma pluma de rio em um ecossistema é o rompimento da barragem de mineração em Mariana - MG no dia 5 de novembro de 2015 (AMBIENTE, 2015) causando um enxurrada de lama que foi transportada até o oceano através do Rio Doce (Figura 1.2.).

O conhecimento dos mecanismos que levam à transição para o regime turbulento nestes escoamentos estratificados são importantes para melhor compreender de que forma a turbulência afeta o escoamento. Tendo como finalidade controlar os fenômenos nocivos ao meio ambiente, bem como entender de que maneira acelerar os processos que trazem benefícios a ele (MARTINEZ, 2006).

Estes mecanismos de transição à turbulência estão associados a perturbações do escoamento que fazem crescer instabilidades com diferentes configurações. Algumas dessas instabilidades que se desenvolvem em escoamentos estratificados foram muito estudadas no passado e são bem conhecidas na literatura, por exemplo as instabilidades de *Kelvin-Helmholtz*, *Rayleigh-Taylor* e *Holmboe*. Outras instabilidades não são muito conhecidas e estão associadas a estudos mais recentes, por exemplo as instabilidades causadas por efeitos de *dupla-difusividade*. Estes efeitos são causados pela interação entre dois fluidos com difusividade mássica ou térmica diferentes.

A análise de estabilidade linear pode ser uma ferramenta muito útil na previsão da ocorrência e dos tipos de instabilidades que se desenvolvem em escoamentos. A teoria



Figura 1.2. Pluma do Rio Doce afetada pelo rompimento das barragens de mineração em Mariana - MG. Fonte: Folha Vitória (2015).

da estabilidade linear é muito empregada no campo de escoamentos estratificados, abrangendo investigações com diferentes considerações de estratificação da densidade e perfis de velocidade (DRAZIN; REID, 2004).

2. OBJETIVOS

O presente estudo tem como objetivo melhor compreender as instabilidades que se desenvolvem na interface da água doce do rio, carregada de partículas em suspensão, com a água salgada do oceano. Esta configuração de escoamento está presente em plumas de rio e pode ser aproximada a uma camada de mistura estratificada. A abordagem utilizada para a compreensão destas instabilidades é a teoria da estabilidade linear que tem como finalidade analisar as perturbações presentes em um escoamento e quantificar suas características de amplificação ou amortecimento.

A maior parte dos estudos das perturbações em camadas de mistura estratificada não leva em consideração que os dois fluidos tem diferentes difusividade molecular ou partículas em suspensão, desta forma, esta pesquisa busca responder aos questionamentos inspiradores:

"Qual a sensibilidade aos efeitos de dupla difusividade e/ou de diferentes frações volumétricas de partículas em suspensão no desenvolvimento de instabilidades em uma camada de mistura estratificada?"

e

"Quais são as instabilidades predominantes nesta configuração de escoamento?"

2.1. Objetivos específicos

Os pontos listados abaixo servirão de guia no desenvolvimento do presente estudo com a finalidade de responder os questionamentos citados anteriormente:

- Desenvolver e validar um código computacional baseado em operadores diferenciais de Chebyshev (detalhado no Capítulo 5) com a finalidade de caracterizar as instabilidades presentes em diferentes configurações de escoamento;
- Analisar a influência dos efeitos de dupla-difusividade na configuração de camada de mistura estratificada (detalhada no Capítulo 4) e caracterizar as instabilidades presentes;
- Para a mesma configuração de escoamento, analisar a influência da presença de

partículas com diferentes granulometrias e caracterizar as instabilidades presentes;

- Em todos os casos estudados, definir quais são as instabilidades predominantes.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo serão apresentadas algumas características básicas de correntes de densidade, classificações referentes ao mecanismo que causa o início do fenômeno e a relação de densidades. Também serão apresentados conceitos e classificações da teoria da estabilidade linear e uma revisão de alguns estudos de perturbações em escoamentos estratificados.

3.1. O início de uma corrente de densidade

O início de uma corrente de densidade é mais facilmente compreendido ao ser relacionado com algum acontecimento natural, sendo utilizado o ambiente marinho como exemplo. Neste contexto, os eventos mais apontados como iniciadores de correntes de densidade são os deslizamentos de terra e as descargas de rios (MEIBURG; KNELLER, 2010). Estes fenômenos são caracterizados por causar excesso de densidade, de um fluido em relação ao outro, pela presença de partículas sólidas em suspensão. As características destes eventos dividem os mecanismos de início de uma corrente de densidade em dois grandes grupos: *remobilização instantânea de material* e *remobilização não-instantânea de material* (FRANCISCO, 2014).

A Figura 3.1. apresenta, através de sinais temporais de velocidade na direção do fluxo, os dois mecanismos de início de uma corrente de densidade de forma esquemática. A remobilização instantânea de material, referida na literatura como *surge-like flow*, está associada a um pulso onde é possível observar o deslocamento de uma quantidade limitada de material (Figura 3.1.a) que é transportada fazendo a corrente ter uma grande aceleração, porém, assim que o processo de sedimentação começa, a corrente sofre uma gradativa desaceleração devido a perda de material em suspensão. Este mecanismo é responsável pela formação de eventos de curta duração.

Enquanto a remobilização não-instantânea de material, também conhecida por *quasy-steady flow*, é caracterizada por escoamentos alimentados de forma contínua por um certo período de tempo (Figura 3.1.b). Estes escoamentos estão associados às cheias de rios, que transportam grandes quantidade de material para o ambiente marinho durante um tempo que pode ser de horas ou até anos, permitindo que a corrente alcance velocidades constantes mesmo após o início do processo de sedimentação devido à alimentação contínua.

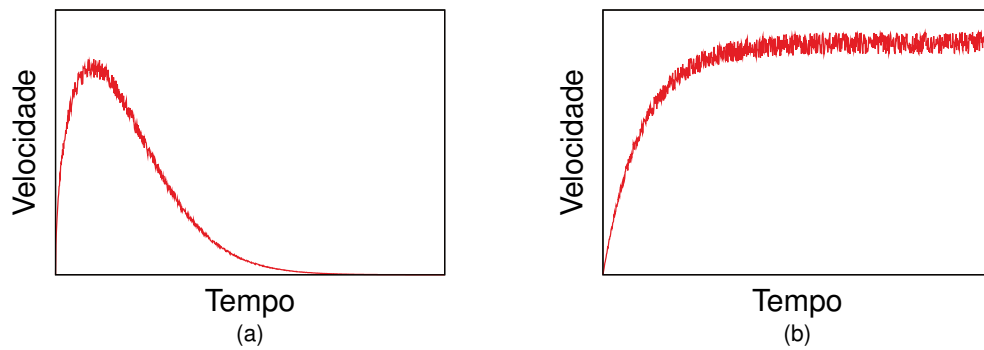


Figura 3.1. Mecanismos de início de uma corrente de densidade: remobilização instantânea de material (a) e remobilização não-instantânea de material (b).

Os escoamentos resultantes do mecanismo *quasy-steady flow* também são conhecidos como plumas e podem ser classificados pela relação entre as densidades da corrente ($\tilde{\rho}_c$) e do fluido ambiente ($\tilde{\rho}_a$). As plumas hipopicnais são aquelas em que a corrente possui densidade menor do que o fluido ambiente resultando em correntes que se espalham ao longo do topo do fluido ambiente (Figura 3.2.a). As plumas hiperpicnais acontecem quando a corrente possui densidade maior do que o fluido ambiente e resultam em correntes que escoam pelo fundo (Figura 3.2.b). As correntes mesopicnais acontecem quando o fluido ambiente possui uma estratificação na densidade (Figura 3.2.c). O foco do presente estudo são as plumas hipopicnais.

3.2. Teoria de estabilidade linear

Há pouco mais de um século, a estabilidade hidrodinâmica foi reconhecida como um dos problemas centrais na mecânica de fluidos. A estabilidade hidrodinâmica está preocupada com *como* e *quando* um escoamento laminar sujeito a uma perturbação desenvolve uma instabilidade e sofre uma eventual transição à turbulência. O entendimento deste questionamento em relação ao escoamento possui varias aplicações na engenharia, meteorologia e oceanografia (DRAZIN; REID, 2004). O modelo matemático utilizado neste estudo é baseado na decomposição

$$q_j(x_k, t) = \bar{q}_j(x_k) + q'_j(x_k, t), \quad (3.1)$$

onde q_j é uma quantidade qualquer do escoamento, \bar{q}_j uma parte estacionária, q'_j uma parte transiente, x_k são as coordenadas espaciais e t é o tempo. A parte estacionária resultante dessa decomposição pode ser, por exemplo, a solução para escoamento laminar, também chamada de *escoamento de base*, enquanto a parte transiente são as perturbações a serem estudadas.

A teoria da estabilidade linear é um ramo da estabilidade hidrodinâmica que se refere às perturbações infinitesimais que se desenvolvem em um escoamento de base.

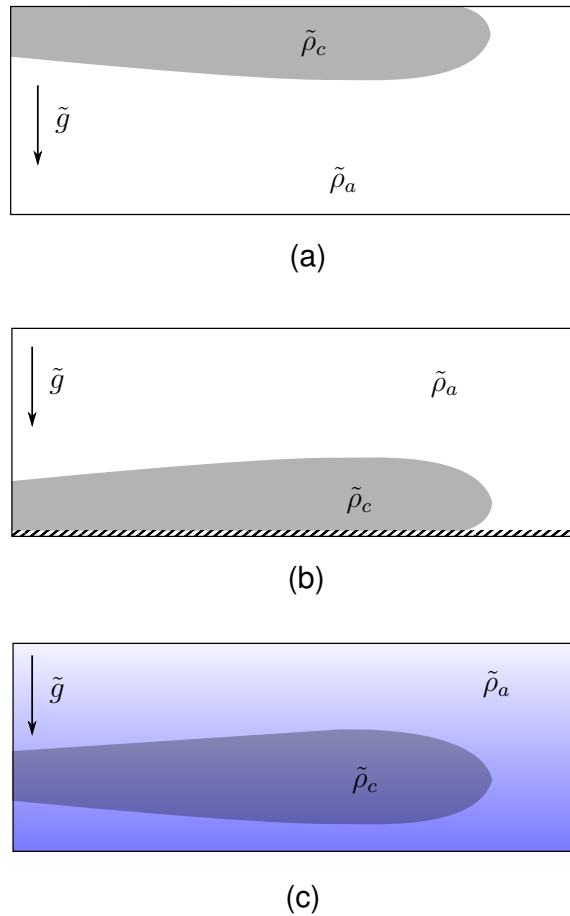


Figura 3.2. Classificação das correntes de densidade em função da relação entre as massas específicas. Correntes hipopícnais (a), correntes hiperpícnais (b) e correntes mesopícnais (c). Adaptado de Ungarish (2009)

As perturbações lineares tem a forma geral

$$q'_j(x_k, t) = \hat{q}_j(x_k, t) e^{i\Theta(x_k, t)}, \quad (3.2)$$

onde \hat{q}_j e Θ são quantidades complexas e representam amplitude e fase respectivamente. A amplitude é função das dimensões não-periódicas e a fase é função das dimensões periódicas. No caso da amplitude ser função do tempo, dizemos que tratamos um problema de estabilidade *não-modal* e quando apenas a fase é função do tempo chamamos de estabilidade *modal*, que é o foco deste trabalho. Um problema de estabilidade *não-modal* resulta na resolução de um problema de valor inicial enquanto um problema de estabilidade *modal* resulta na resolução de um problema de autovalores/autovetores.

Ao iniciar uma nova análise de estabilidade em um escoamento, a primeira consideração a ser feita é o número de direções homogêneas do escoamento de base. Neste caso as direções homogêneas são aquelas que o escoamento de base não apresenta dependência. A Tabela 3.2. apresenta as hipóteses sobre a homogeneidade do escoamento de base $\bar{q}_j(x_k)$, as funções de amplitude de e fase de uma pertur-

Tabela 3.2. Classificação da estabilidade linear modal quanto ao escoamento de base considerando um sistema de coordenadas cartesiano. Adaptado de Juniper et al. (2014)

Denominação	Escoamento de base	Amplitude	Fase
Local	$\bar{q}_j(x_2)$ e $\partial_{x_1}\bar{q}_j = \partial_{x_3}\bar{q}_j = 0$	$\hat{q}_j(x_2)$	$\alpha x_1 + \beta x_3 - \sigma t$
PSE	$\bar{q}_j(x_1^*, x_2);$ $\partial_{x_1}\bar{q}_j \ll \partial_{x_2}\bar{q}_j$ e $\partial_{x_3}\bar{q}_j = 0$	$\hat{q}_j(x_1^*, x_2)$	$\int^{x_1} \alpha(x_1') dx_1' + \beta x_3 - \sigma t$
BiGlobal	$\bar{q}_j(x_2, x_3)$ e $\partial_{x_1}\bar{q}_j = 0$	$\hat{q}_j(x_2, x_3)$	$\alpha x_1 - \sigma t$
PSE-3D	$\bar{q}_j(x_1^*, x_2, x_3)$ e $\partial_{x_1}\bar{q}_j \ll \partial_{x_2}\bar{q}_j, \partial_{x_3}\bar{q}_j$	$\hat{q}_j(x_1^*, x_2, x_3)$	$\int^{x_1} \alpha(x_1') dx_1' - \sigma t$
TriGlobal	$\bar{q}_j(x_1, x_2, x_3)$	$\hat{q}_j(x_1, x_2, x_3)$	σt

bação $q'_j(x_k, t)$ e suas respectivas nomenclaturas (JUNIPER et al., 2014). Tomando como exemplo o caso *Local* nesta tabela, α , β e σ são os parâmetros modais. Estes parâmetros são grandezas complexas e tem como significado:

- α_r e β_r são os números de onda nas direções x_1 e x_3 ;
- α_i e β_i são as taxas de amplificação ou amortecimento espacial de uma perturbação nas direções x_1 e x_3 ;
- σ_r é a frequência angular;
- σ_i é a taxa de amplificação ou amortecimento temporal de uma perturbação.

Com base no significado destes parâmetros, dois tipos de análises podem ser realizados: a aproximação espacial e a aproximação temporal. Na aproximação temporal as perturbações crescem com o tempo enquanto na aproximação espacial as perturbações crescem no espaço.

Quando é utilizada a aproximação temporal, α e β são números reais e σ é um número complexo. Desta forma:

- $\sigma_i < 0 \rightarrow$ o escoamento é estável;
- $\sigma_i = 0 \rightarrow$ o escoamento é neutralmente estável;
- $\sigma_i > 0 \rightarrow$ o escoamento é instável.

No caso da aproximação espacial, σ e α são números reais e β é um número complexo ou σ e β são números reais e α é um número complexo. Assim se:

- $\alpha_i > 0$ ou $\beta_i > 0 \rightarrow$ o escoamento é estável;
- $\alpha_i = 0$ ou $\beta_i = 0 \rightarrow$ o escoamento é neutralmente estável;
- $\alpha_i < 0$ ou $\beta_i < 0 \rightarrow$ o escoamento é instável.

Também podemos classificar uma perturbação quanto à maneira como ela se propaga. Dado um escoamento com direção predominante a jusante, o mesmo é dito *estável* quando uma perturbação (introduzida em uma localização qualquer do escoamento) é amortecida (Figura 3.3.a). O escoamento *convectivamente instável* (Figura 3.3.b) é caracterizada pelo crescimento de uma perturbação na direção a jusante ou montante e decrescimento da mesma no ponto onde foi introduzida. Enquanto um escoamento em que a perturbação permanece no seu ponto de introdução é caracterizado *absolutamente instável* (Figura 3.3.c). Em ambos os casos, o principal pressuposto é que o escoamento de base é paralelo. Ainda existe um terceiro caso chamado de *instabilidade global* que é análogo à instabilidade absoluta porém leva em consideração escoamento de base não-paralelo (THEOFILIS, 2003).

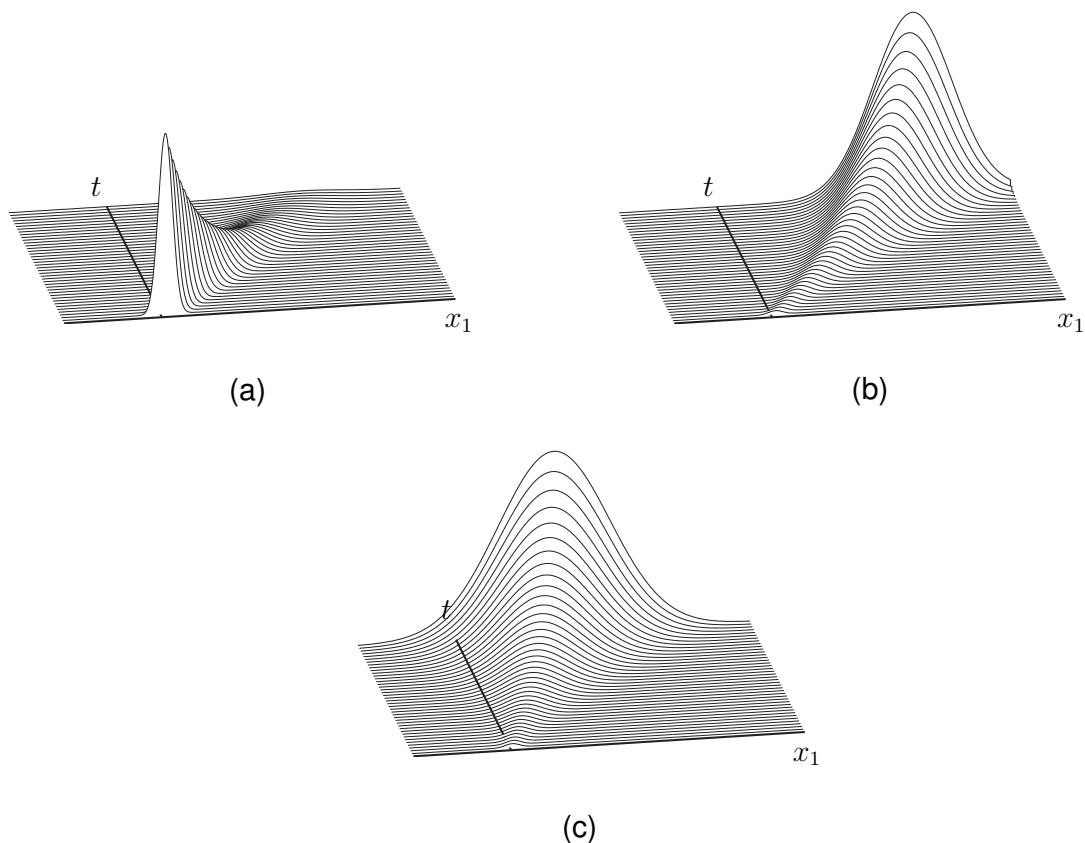


Figura 3.3. Resposta linear a um impulso no plano (x_1, t) : estável (a), convectivamente instável (b) e absolutamente instável (c). Adaptado de Bagheri et al. (2009).

No presente estudo, é relevante conhecer algumas instabilidades que se desenvolvem em duas configurações de escoamento de base. A primeira é a camada de

mistura e a segunda configuração é caracterizada por estratificação na densidade e todas as componentes da velocidade de base são nulas, chamada neste estudo por configuração *tanque*.

3.2.1. Instabilidades em camadas de mistura

A configuração do escoamento de base é baseada na hipótese de escoamentos paralelos, isto quer dizer que todas as grandezas do escoamento de base são função de apenas uma direção correspondendo ao caso *Local* da Tabela 3.2.. A camada de mistura homogênea ou estratificada pode ser aproximada pela Figura 3.4., podendo ser modelada matematicamente por segmentos de reta, pela função tangente hiperbólica ou pela função erro de Gauss. Algumas grandezas desse perfis são relevantes para melhor compreender estudos anteriores: a espessura da camada de mistura δ_u (Figura 3.4.a), a espessura do perfil de densidade δ_ρ (Figura 3.4.b) e o deslocamento d da interface do perfil de densidade em relação ao centro da camada de mistura (Figura 3.4.c). Na literatura podemos encontrar trabalhos que estudam a configuração $-u_1(x_2)$ e/ou $-\rho(x_2)$.

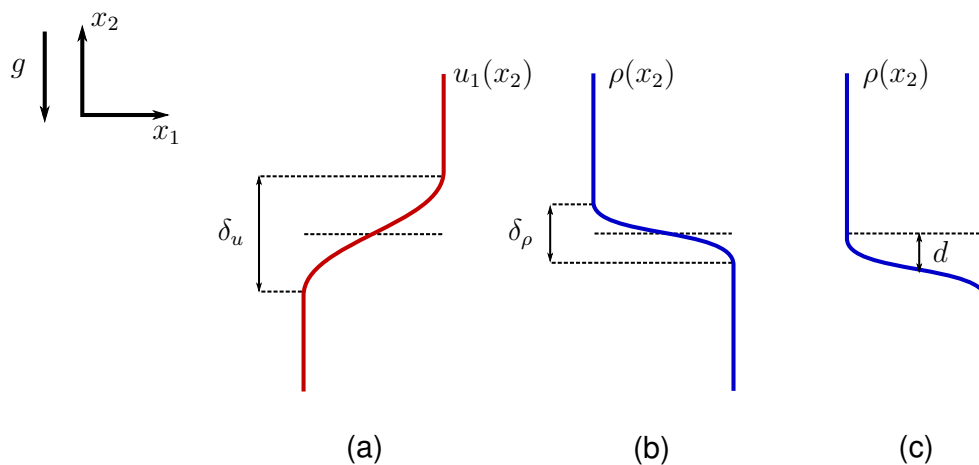


Figura 3.4. Configuração do escoamento de base em camadas de mistura estratificadas.

As primeiras descobertas sobre instabilidades em camadas de mistura datam do final do século 19 com estudos teóricos de von Helmholtz sobre escoamentos cisalhantes homogêneos. Posteriormente, Kelvin estendeu o estudo de Helmholtz para escoamentos cisalhantes com diferentes densidades entre as camadas, também chamados de escoamentos cisalhantes estratificados. A instabilidade caracterizada nestes estudos, cujo desenvolvimento esta esquematizado na Figura 3.5., foi nomeada a partir do nome dos autores: "*Kelvin-Helmholtz*", denotada no presente estudo por \mathcal{KH} (DRAZIN; REID, 2004).

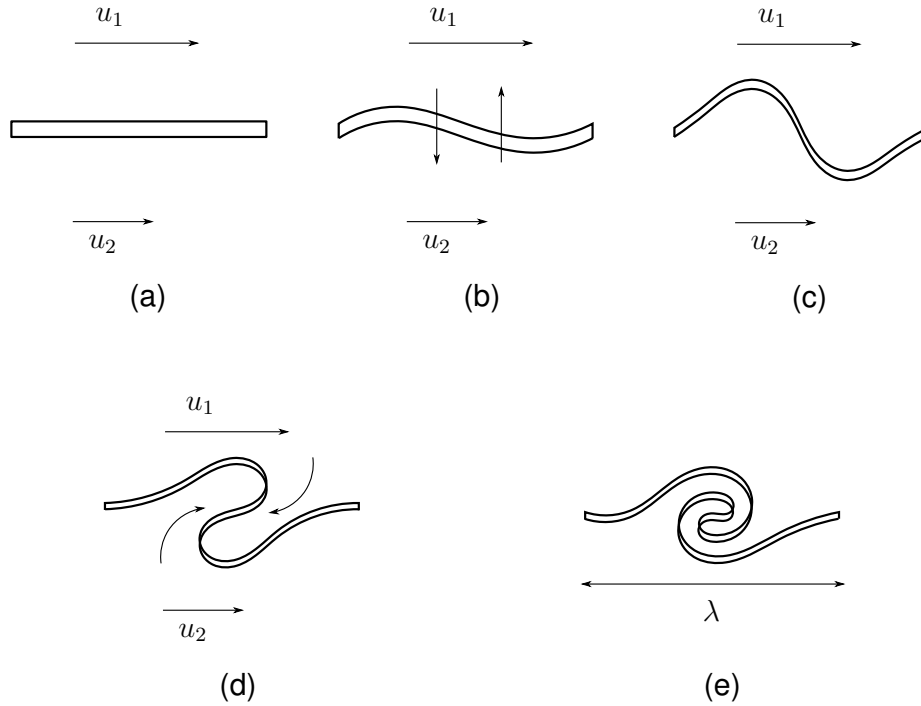


Figura 3.5. Desenvolvimento da instabilidade de *Kelvin-Helmholtz*. Adaptado de Martinez (2006).

Muitos avanços nos estudos das instabilidades em camadas de mistura homogênea e estratificada foram feitos a partir do século XX. Betchov e Szewczyk (1963) realizaram um estudo numérico no caso homogêneo a partir da equação de Orr-Sommerfeld

$$[\bar{u}_1(x_2) - c] \left(\frac{d^2 \hat{\phi}}{dx_2^2} - \alpha^2 \hat{\phi} \right) - \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx_2^2} \hat{\phi} = -\frac{i}{\alpha Re} \left(\frac{d^4 \hat{\phi}}{dx_2^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \hat{\phi}}{dx_2^2} + \alpha^4 \hat{\phi} \right), \quad (3.3)$$

com $c = \sigma/\alpha$ e $\hat{\phi}$ sendo uma função de amplitude que depende da direção x_2 , e descobriu que o número de Reynolds, acima de um valor crítico, não exerce influência no desenvolvimento da instabilidade \mathcal{KH} , validando a hipótese de instabilidade não viscosa ($Re \rightarrow \infty$). Esta hipótese é utilizada em grande parte dos estudos de estabilidade linear em escoamentos livres e simplifica a equação (3.3) resultando em

$$[\bar{u}_1(x_2) - c] \left(\frac{d^2 \hat{\phi}}{dx_2^2} - \alpha^2 \hat{\phi} \right) - \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx_2^2} \hat{\phi} = 0, \quad (3.4)$$

também conhecida como equação de Rayleigh. Michalke (1964) resolveu (3.4), estudou a instabilidade \mathcal{KH} em termos de autofunções e definiu o seu comprimento de onda mais amplificado λ (Figura 3.5.e) em função da espessura da camada de mistura. Este comprimento corresponde à $7,07\delta_u$.

Os primeiros estudos de estabilidade em camadas de mistura estratificadas foram realizados por Taylor (1931) e Goldstein (1931) que introduziram um termo de

estratificação na equação de Rayleigh levando em consideração que as variações de densidade são importantes apenas no termo de empuxo. A equação resultante é denominada equação de *Taylor-Goldstein* e tem a forma

$$[\bar{u}_1(x_2) - c] \left(\frac{d^2 \hat{\phi}}{dx_2^2} - \alpha^2 \hat{\phi} \right) - \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx_2^2} \hat{\phi} - Ri \frac{d\bar{\rho}}{dx_2} \frac{\hat{\phi}}{\bar{u}_1(x_2) - c} = 0, \quad (3.5)$$

onde Ri é o número Richardson global, definido por:

$$Ri = \frac{\tilde{g}'L}{U^2}, \quad (3.6)$$

onde \tilde{g}' é a aceleração gravitacional reduzida ($\tilde{g}' = \tilde{g}\Delta\tilde{\rho}/\tilde{\rho}$), L e U são, respectivamente, o comprimento e a velocidade característicos do escoamento. Este número adimensional possibilita estabelecer uma relação entre as forças inerciais e as forças de empuxo. No caso de δ_u ser aproximadamente igual à δ_ρ e d ser nulo, a instabilidade predominante é \mathcal{KH} e a estratificação tende a estabilizar o escoamento, isto é, a taxa de amplificação da perturbação decresce em função de Ri (MILES, 1961; HOWARD, 1961).

Em alguns contextos geofísicos, pode ser relevante considerar o caso em que $\delta_u \gg \delta_\rho$. Esta configuração foi primeiramente estudada teoricamente por Holmboe (1962), que previu a existência de um segundo modo de instabilidade: a instabilidade de *Holmboe*, denotada por \mathcal{H} . Este modo de instabilidade consiste em um par de ondas com mesma intensidade que viajam em sentidos opostos (Figura 3.6.).

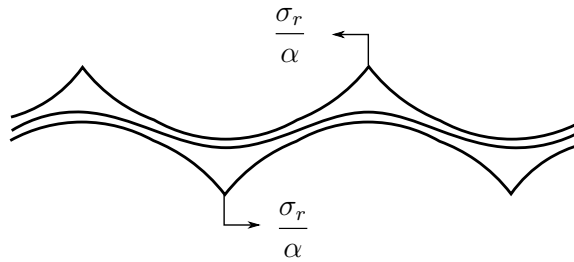


Figura 3.6. Esquemático da instabilidade de *Holmboe*. Adaptado de Lawrence et al. (1991).

Hazel (1972) conduziu estudos numéricos e encontrou valores críticos de número de Richardson a partir dos quais o escoamento é estável e que a instabilidade \mathcal{H} pode desenvolver como uma função da relação R , definida como a relação entre a espessura da camada de mistura e a espessura da camada de densidade. Lawrence et al. (1991) e Haigh e Lawrence (1999) estudaram, numericamente e experimentalmente, o deslocamento d da interface do perfil de densidade (Figura 3.4.c) em relação ao centro da camada de mistura considerando valores elevados de R e concluíram que

para valores não nulos de d , a instabilidade \mathcal{H} se separa em uma onda mais amplificada e outra onda menos amplificada.

Negretti et al. (2008) investigaram a influência da declividade na interface de instabilidade e seus resultados demonstram que um aumento da declividade tem um efeito similar, na estabilidade do escoamento, ao de aumentar a relação R . Khavasi et al. (2014) introduziram a presença de partículas em suspensão na análise com $R = 1$ e concluíram que partículas com diâmetro menor do que $20\mu m$ não mudam as características de estabilidade do escoamento, porém partículas mais grossas tendem a deixar o escoamento mais instável e com a possibilidade de existir um outro modo de perturbação que não foi caracterizado.

Para estudar os efeitos de dupla difusividade, motivado por problemas de oceanologia, Smyth e Kimura (2007) separaram o perfil de densidade em duas grandezas: a temperatura e a concentração de salinidade. Essa separação resulta em dois diferentes efeitos de difusividade. A partir de suas análises, concluíram que as instabilidades duplo-difusivas tem taxas de amplificação significativas podendo representar o modo de instabilidade mais amplificado mesmo para condições em que o escoamento seria estável. Os comprimentos de onda característicos destas instabilidades podem ser dez até mil vezes menor em relação à instabilidade \mathcal{KH} .

3.2.2. Instabilidades em *tanques*

Esta configuração leva em consideração o escoamento de base com todas as componentes do campo de velocidades nulas e estratificação no campo de densidade. Ela foi primeiramente estudada por Lord Rayleigh (DRAZIN; REID, 2004), tendo como base a equação

$$c \left(\frac{d^2 \hat{\phi}}{dx_2^2} - \alpha^2 \hat{\phi} \right) - Ri \frac{d\bar{\rho}}{dx_2} \frac{\hat{\phi}}{c} = 0, \quad (3.7)$$

conhecida na literatura como equação de *Rayleigh-Taylor*. Esta equação modela o crescimento de uma instabilidade de mesmo nome dos autores da equação. Tal instabilidade, esquematizada pela Figura 3.7., é causada por efeitos de empuxo e é caracterizada por ser um modo não oscilatório, ou seja, velocidade de fase nula, e formar estruturas semelhantes a cogumelos e acontecer quando $\rho_1 > \rho_2$ (Figura 3.7.).

Quando os dois fluidos, além apresentar densidades diferentes, apresentam diferentes propriedades difusivas passamos ao domínio da dupla difusividade. Um sistema com esta característica pode tornar um escoamento instável mesmo quando $\rho_1 < \rho_2$ e estabilizar um escoamento onde $\rho_1 > \rho_2$. Na ausência de camada de mistura, a dupla difusividade pode causar a ocorrência de uma instabilidade de estrutura

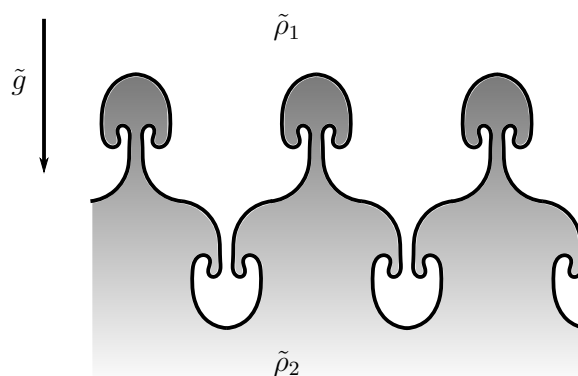


Figura 3.7. Esquemático da instabilidade de *Rayleigh-Taylor*. Adaptado de Burns e Meiburg (2015).

refinada esquematizada pela Figura 3.8.. Esse fenômeno foi primeiramente observado em ambientes marinhos onde existem diferenças de temperatura e salinidade e função disso é conhecido pelo nome de *salt fingers* ou *fingering* (KUNDU; COHEN, 2010).

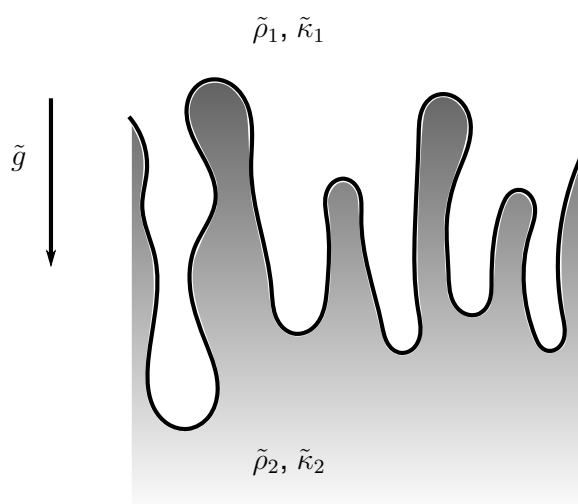


Figura 3.8. Esquemático da instabilidade *fingering*. Adaptado de Burns e Meiburg (2015).

Burns e Meiburg (2012) estudaram a dupla difusividade em um sistema onde um fluido carregado com partículas em suspensão é colocado sobre um fluido com concentração salina e considerou o deslocamento da interface do perfil de salinidade. Eles concluíram que enquanto as partículas se depositam mais rápido do que a interface salina se desloca, as instabilidades mais amplificadas são aquelas causadas por efeitos duplo-difusivos (*fingering*). Caso contrário o modo de instabilidade predominante é o de *Rayleigh-Taylor*.

4. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, serão apresentados a configuração do escoamento a ser estudado, o modelo de velocidade de queda utilizado para simular o comportamento das partículas em suspensão e as equações gerais do problema. Posteriormente, estas equações serão linearizadas com a finalidade de formular o problema em função das perturbações.

4.1. Configuração do escoamento

Considerando o estudo de um fluido ilimitado com um perfil de densidade verticalmente estratificado que é assumido como um função da concentração de partículas em suspensão $\tilde{\varphi}_1$ e da concentração salina $\tilde{\varphi}_2$ ¹ com a forma

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 \left(1 + \sum_{\ell=1}^2 \tilde{\gamma}_\ell \tilde{\varphi}_\ell \right), \quad (4.1)$$

onde $\tilde{\rho}_0$ é a massa específica do fluido limpo (sem a presença de partículas ou salinidade) e $\tilde{\gamma}_\ell$ são coeficientes de expansão das concentrações de partículas e salinidade que tem a forma geral

$$\tilde{\gamma}_\ell = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{\varphi}_\ell} \right). \quad (4.2)$$

A configuração do escoamento a ser estudada está esquematizada na Figura 4.1., no lado esquerdo a distribuição da velocidade no sentido do escoamento e no lado direito a distribuição de massa específica. Nesta segunda distribuição, $\tilde{\rho}_1$ é a massa específica adicionada pelas partículas e $\tilde{\rho}_2$ é a massa específica adicionada pela salinidade, essas duas quantidades são definidas pelo termo $\tilde{\rho}_0 \tilde{\gamma}_\ell \tilde{\varphi}_\ell$ em (4.1).

No presente estudo, a configuração de escoamento de base é modelada em termos de perfis tangente hiperbólica porque isso permite uma comparação mais direta com resultados de estudos anteriores. Os perfis dimensionais de velocidade na direção do escoamento, concentrações de partículas e salinidade são definidos por:

$$\bar{u}_1(x_2) = \frac{\Delta \tilde{u}}{2} \left[a + \tanh \left(\frac{2x_2}{\delta_u} \right) \right], \quad (4.3a)$$

¹no presente estudo os símbolos com $\tilde{(\cdot)}$ sobre-escrito representam quantidades dimensionais

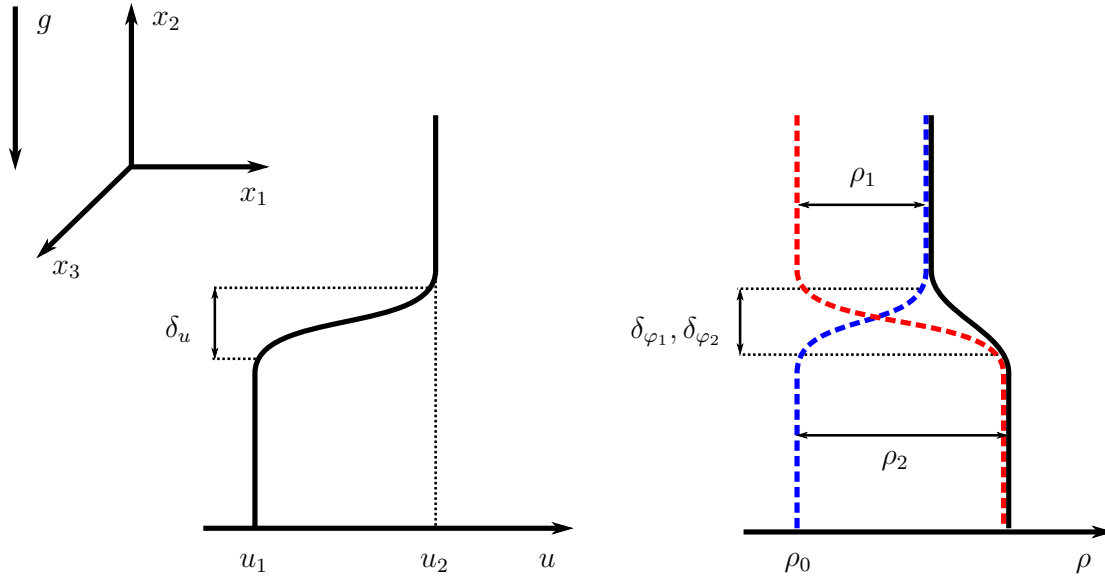


Figura 4.1. Desenho esquemático da configuração do escoamento. No lado esquerdo o perfil de velocidade e no lado direito os perfis de massa específica. A linha vermelha e pontilhada representa a massa específica da salinidade, a linha azul e pontilhada representa a massa específica das partículas em suspensão.

$$\bar{\varphi}_1(x_2) = \frac{\tilde{\varphi}_{1max}}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{2x_2}{\delta_{\varphi_1}} \right) \right] \quad (4.3b)$$

e

$$\bar{\varphi}_2(x_2) = -\frac{\tilde{\varphi}_{2max}}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{2x_2}{\delta_{\varphi_2}} \right) \right], \quad (4.3c)$$

onde a é uma advecção média adimensional, $\Delta\tilde{u}$ é a diferença entre u_2 e u_1 (Figura 4.1.) e δ_u , δ_{φ_1} e δ_{φ_2} são as espessuras dos perfis da camada de mistura (Figura 4.1.), concentração de partículas e concentração salina respectivamente. As outras componentes da velocidade são consideradas nulas.

4.2. Lei de Stokes

Assumindo que uma partícula de sedimento possa ser aproximada, geometricamente, por uma esfera sólida, ao cair em um fluido de menor densidade ela tende a acelerar até alcançar uma velocidade de queda \tilde{u}_s . Esta velocidade é dependente do peso da esfera \tilde{F}_p , das forças de empuxo \tilde{F}_b e forças de arrasto \tilde{F}_d (Figura 4.2.), sendo que o balanço de forças tem a forma,

$$\tilde{F}_p = \tilde{F}_b + \tilde{F}_d, \quad (4.4)$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{\pi}{6} \tilde{d}_p^3 \tilde{\rho}_p \tilde{g} = \frac{\pi}{6} \tilde{d}_p^3 \tilde{\rho}_a \tilde{g} + 3\pi \tilde{\mu}_a \tilde{d}_p \tilde{u}_s, \quad (4.5)$$

onde \tilde{d}_p é o diâmetro da partícula, $\tilde{\rho}_p$ é a massa específica da partícula ($\tilde{\rho}_0 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\varphi}_1$), $\tilde{\mu}_a$ é a viscosidade dinâmica do fluido ambiente, \tilde{g} é a aceleração gravitacional e $\tilde{\rho}_a$ é a massa específica do fluido ambiente. Isolando \tilde{u}_s , tem-se a velocidade de queda segundo a lei de Stokes,

$$\tilde{u}_s = \frac{\tilde{d}_p^2 \tilde{g}}{18 \tilde{\mu}_a} (\tilde{\rho}_p - \tilde{\rho}_a). \quad (4.6)$$

Este modelo de velocidade de queda resulta em uma boa aproximação quando aplicado a partículas de pequeno diâmetro ($\tilde{d}_p < 0,1mm$) e devem estar em baixas concentrações para que a floculação se torne desprezível (JULIEN, 1998).

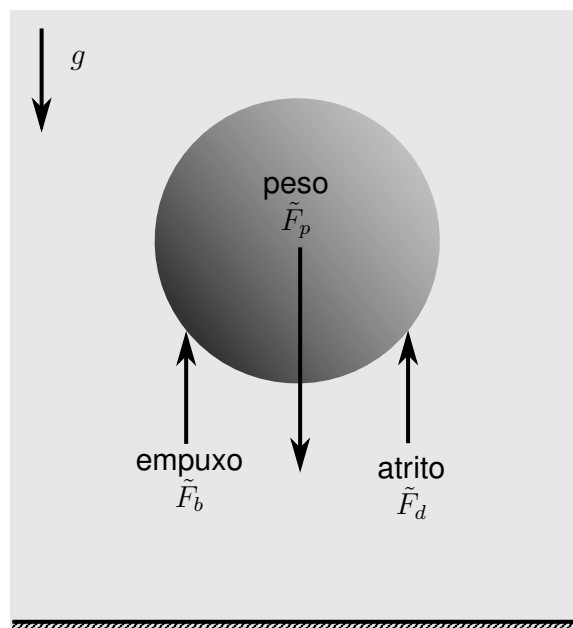


Figura 4.2. Esquema do balanço de forças atuantes em uma partícula esférica presente em um meio fluido segundo a lei de Stokes.

4.3. Equações governantes

Nesta seção, serão apresentadas as equações gerais que regem os fenômenos a serem estudados neste trabalho: o conjunto de equações composto pela equação da continuidade, equações de Navier-Stokes e as equações correspondentes ao transporte dos escalares associados ao problema. Todas estas equações serão apresentadas em sua forma dimensional para, posteriormente, serem adimensionalizadas.

Considerando um escoamento incompressível em um fluido ilimitado, com um estratificação da densidade conforme descrito anteriormente. A equação da continuidade é dada por

$$\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} = 0 \quad (4.7)$$

e as equações de Navier-Stokes

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_k} \right) = \tilde{\mu}_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_j} + \tilde{\rho} \tilde{g}_j, \quad (4.8)$$

onde \tilde{u}_j é o vetor das velocidades do fluido, $\tilde{\rho}$ a massa específica, $\tilde{\mu}_0$ a viscosidade dinâmica do fluido limpo, p a pressão e \tilde{g}_j é o vetor aceleração gravitacional que, neste caso, está sendo considerada na direção $-x_2$ (Figura 4.1.). As concentrações de partículas e de salinidade estão associadas às equações de transporte escalar

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{u}_j + \tilde{u}_s e_j^g) \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{x}_j} = \tilde{\kappa}_1 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j} \quad (4.9)$$

e

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial \tilde{x}_j} = \tilde{\kappa}_2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_2}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j}, \quad (4.10)$$

onde e_j^g é o vetor unitário na direção gravitacional e $\tilde{\kappa}_\ell$ ($\ell = 1, 2$) é a difusividade molecular correspondente ao escalar considerado. A equação (4.10) não possui um termo de sedimentação (modelado pela velocidade de queda u_s) porque esta sendo considerado o domínio das pequenas concentrações.

Em ambientes oceânicos típicos, a massa específica da água salgada é aproximadamente 3% à 4% maior do que a massa específica da água doce (BURNS; MEIBURG, 2012), o que nos permite utilizar a aproximação de Boussinesq. Esta aproximação diz que quando a diferença de densidades entre o fluido da corrente e o fluido ambiente é relativamente pequena ($\rho_c/\rho_a \approx 1$), as variações de massa específica são importantes apenas no termo gravitacional da equação (4.8) (UNGARISH, 2009). Desta forma, o termo $\tilde{\rho}$ do lado esquerdo de (4.8) pode ser substituído por $\tilde{\rho}_0$ e consideramos que as variações de $\tilde{\rho}$ apenas no último termo à direita da equação

$$\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_k} = \tilde{\nu}_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k} - \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0} \tilde{g}_j, \quad (4.11)$$

onde $\tilde{\nu}_0$ é a viscosidade cinemática do fluido limpo. Substituindo (4.1) em (4.11), a equação pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_k} = \tilde{\nu}_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k} - \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_j} + \tilde{g}_j \left(1 + \sum_{\ell=1}^2 \tilde{\gamma}_\ell \tilde{\varphi}_\ell \right). \quad (4.12)$$

Para adimensionalizar (4.7), (4.9), (4.10) e (4.12), são necessários cinco valores característicos: a velocidade U , o comprimento L , a pressão P , a concentração de sedimentos Φ_1 e a concentração salina Φ_2 . Estes valores foram retirados da configuração do escoamento descrita anteriormente (Equações 4.3a, 4.3b e 4.3c) e são definidos por:

$$U = \frac{\Delta \tilde{u}}{2}, \quad L = \frac{\delta_u}{2}, \quad P = \frac{4\tilde{p}}{\tilde{\rho}_0 \Delta \tilde{u}^2}, \quad \Phi_1 = \frac{\tilde{\varphi}_{1max}}{2}, \quad \text{e} \quad \Phi_2 = \frac{\tilde{\varphi}_{2max}}{2}. \quad (4.13)$$

Substituindo esses valores característicos nas equações dimensionais da continuidade, Navier-Stokes, transporte escalar da concentração de partículas e transporte escalar da concentração salina, nas equações (4.7), (4.12), (4.9) e (4.10) respectivamente, obtém-se as equações adimensionais

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_j} + Ri_0 e_j^g + Ri_2 \left(\frac{1}{R_\rho} \varphi_1 + \varphi_2 \right) e_j^g. \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + (u_j + u_s e_j^g) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} = \frac{1}{\tau Re Sc_2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (4.16)$$

e

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} = \frac{1}{Re Sc_2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (4.17)$$

sendo $u_s = 2\tilde{u}_s/\Delta\tilde{u}$ a velocidade de queda adimensional, Re o número de Reynolds, Ri_ℓ o número de Richardson de uma grandeza, Sc_ℓ o número de Schmidt de uma grandeza, R_ρ a relação de densidades e τ a relação de difusividades. Estes números adimensionais serão descritos a seguir. O detalhamento desta adimensionalização é apresentado no Apêndice A.

Como consequência da adimensionalização das equações, três grupos adimensionais surgem. O número de Reynolds que fornece uma relação entre as forças inerciais e as forças viscosa, definido por

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\Delta\tilde{u}\delta_u}{4\tilde{\nu}_0}. \quad (4.18)$$

O número de Richardson relaciona as forças de empuxo com as forças inerciais, expresso por

$$Ri_0 = \frac{\tilde{g}L}{U^2} = 2 \frac{\tilde{g}\delta_u}{\Delta\tilde{u}^2} \quad \text{e} \quad Ri_\ell = 2 \frac{\tilde{g}'_\ell \delta_u}{\Delta\tilde{u}^2} \quad (4.19)$$

com $\ell = 1$ e 2 , onde \tilde{g}'_ℓ é a aceleração gravitacional reduzida, definida como

$$\tilde{g}'_\ell = \tilde{g}\tilde{\gamma}_\ell \Phi_\ell = \tilde{g}\tilde{\gamma}_\ell \frac{\tilde{\varphi}_{\ell max}}{2}. \quad (4.20)$$

O outro grupo adimensional é o número Schmidt definido como a relação entre a difusividade dos campos de velocidades e de concentrações

$$Sc_\ell = \frac{\tilde{\nu}_0}{\tilde{\kappa}_\ell}. \quad (4.21)$$

O números adimensionais R_ρ e τ são definidos pela relação entre propriedades físicas das partículas e da salinidade. O primeiro é a relação de densidades definida como

$$R_\rho = \frac{\tilde{\gamma}_2 \tilde{\varphi}_{2max}}{\tilde{\gamma}_1 \tilde{\varphi}_{1max}} = \frac{Ri_2}{Ri_1}, \quad (4.22)$$

e o segundo é a relação de difusividades moleculares expressa por

$$\tau = \frac{\tilde{\kappa}_2}{\tilde{\kappa}_1} = \frac{Sc_1}{Sc_2}. \quad (4.23)$$

4.4. Linearização

Para realizar o estudo das perturbações no sistema de equações apresentado, primeiramente deve-se linearizar este sistema com a finalidade de obter equações em que as perturbações estejam explícitas. Esta linearização é feita em três etapas:

1. Decomposição das variáveis do escoamento em uma parte estacionária e uma parte transiente (Equação 3.1). A parte estacionária pode ser a solução do escoamento laminar, também chamado de escoamento de base, e a parte transiente são as perturbações.
2. Subtração das equações resultantes da decomposição com as equações para o escoamento de base. Esta subtração é possível porque o escoamento de base é uma solução do sistema de equações.
3. Eliminação dos termos de segunda ordem. Assumindo que as perturbações são infinitesimais, os produtos entre perturbações podem ser desprezados.

Aplicando esta metodologia em (4.14), (4.15), (4.16) e (4.17), obtemos as equações linearizadas da continuidade, Navier-Stokes, transporte escalar da concentração de partículas e transporte escalar da concentração salina

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4.24a)$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} + u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial p'}{\partial x_j} + Ri_2 \left(\frac{1}{R_\rho} \varphi'_1 + \varphi'_2 \right) e_j^g, \quad (4.24b)$$

$$\frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} + u'_j \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial x_j} + (\bar{u}_j + u_s e_j^g) \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x_j} = \frac{1}{\tau Re Sc_2} \frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.24c)$$

e

$$\frac{\partial \varphi'_2}{\partial t} + u'_j \frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \varphi'_2}{\partial x_j} = \frac{1}{ReSc_2} \frac{\partial^2 \varphi'_2}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (4.24d)$$

O detalhamento da aplicação destes três passos de linearização das equações é apresentado no Apêndice B.

O escoamento de base, apresentado anteriormente, é definido por (4.3a), (4.3b) e (4.3c). A partir deste escoamento de base é possível afirmar que os coeficientes das equações (4.24a), (4.24b), (4.24c) e (4.24d) não são função de x_1 , x_3 e t . Portanto pode-se buscar solução na forma

$$q'_j(x_j, t) = \hat{q}_j(x_2) e^{i(\alpha x_1 + \beta x_3 - \sigma t)}. \quad (4.25)$$

Substituindo o modelo da perturbação nas equações linearizadas e rearranjando os termos, obtemos as equações de Orr-Sommerfeld

$$i\alpha \hat{u}_1 + \frac{d\hat{u}_2}{dx_2} + i\beta \hat{u}_3 = 0, \quad (4.26a)$$

$$i(\alpha \bar{u}_1 - \sigma) \hat{u}_1 + \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} \hat{u}_2 = -i\alpha \hat{p} + \frac{1}{Re} \mathcal{M} \hat{u}_1, \quad (4.26b)$$

$$i(\alpha \bar{u}_1 - \sigma) \hat{u}_2 = -\frac{d\hat{p}}{dx_2} - Ri_2 \left(\frac{1}{R_p} \hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 \right) + \frac{1}{Re} \mathcal{M} \hat{u}_2, \quad (4.26c)$$

$$i(\alpha \bar{u}_1 - \sigma) \hat{u}_3 = -i\beta \hat{p} + \frac{1}{Re} \mathcal{M} \hat{u}_3, \quad (4.26d)$$

$$i(\alpha \bar{u}_1 - \sigma) \hat{\varphi}_1 + \frac{d\bar{\varphi}_1}{dx_2} \hat{u}_2 - u_s \frac{d\hat{\varphi}_1}{dx_2} = \frac{1}{\tau ReSc_2} \mathcal{M} \hat{\varphi}_1, \quad (4.26e)$$

e

$$i(\alpha \bar{u}_1 - \sigma) \hat{\varphi}_2 + \frac{d\bar{\varphi}_2}{dx_2} \hat{u}_2 = \frac{1}{ReSc_2} \mathcal{M} \hat{\varphi}_2, \quad (4.26f)$$

com \mathcal{M} sendo o operador laplaciano, definido por

$$\mathcal{M} = \frac{d^2}{dx_2^2} - \alpha^2 - \beta^2. \quad (4.27)$$

Com a finalidade de eliminar o termo de pressão das equações acima e diminuir o número de equações a serem resolvidas, o problema pode ser reescrito em termos da componente vertical da velocidade (\hat{u}_2), da componente normal da vorticidade

($\hat{\omega}_2 = i\beta\hat{u}_1 - i\alpha\hat{u}_3$) e dos escalares $\hat{\varphi}_1$ e $\hat{\varphi}_2$. Para isso, deve-se primeiramente multiplicar (4.26b) por $i\beta$ e subtrair de (4.26d) multiplicada por $i\alpha$, resultando em uma equação para ω_2 :

$$i(\alpha\bar{u}_1 - \sigma)\hat{\omega}_2 + i\beta\frac{d\bar{u}_1}{dx_2}\hat{u}_2 = \frac{1}{Re}\mathcal{M}\hat{\omega}_2. \quad (4.28)$$

Este passo é equivalente à fazer o rotacional ($\nabla \times$) das equações de quantidade de movimento e considerar apenas a componente ω_2 . O segundo passo consiste em multiplicar (4.26b) e (4.26d) por $i\alpha$ e $i\beta$, respectivamente, e somar as duas equações. Com o auxílio de (4.26a) uma expressão para o termo de pressão em função de \hat{u}_2 e suas derivadas pode ser obtido. Esta expressão é posteriormente substituída em (4.26c) para eliminar o termo $d\hat{p}/dx_2$, resultando na equação

$$i(\alpha\bar{u}_1 - \sigma)\mathcal{M}\hat{u}_2 = -i\alpha\frac{d^2\bar{u}_1}{dx_2^2} - (\alpha^2 + \beta^2)Ri_2 \left(\frac{1}{R_\rho}\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 \right) + \frac{1}{Re}\mathcal{M}^2\hat{u}_2. \quad (4.29)$$

O problema formulado pelas equações (4.28), (4.29), (4.26e) e (4.26f) é um problema de autovalores/autovalores generalizado. Este problema pode ser reescrito na forma matricial

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{q}} = \sigma\mathbf{B}\hat{\mathbf{q}}, \quad (4.30)$$

com a matriz \mathbf{A} definida por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \beta\frac{d\bar{u}_1}{dx_2}\mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & \mathcal{K}\frac{Ri_2}{R_\rho}\mathbf{I} & \mathcal{K}Ri_2\mathbf{I} \\ 0 & -i\frac{d\bar{\varphi}_1}{dx_2}\mathbf{I} & A_{33} & 0 \\ 0 & -i\frac{d\bar{\varphi}_2}{dx_2}\mathbf{I} & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

matriz \mathbf{B} definida por

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

e $\hat{\mathbf{q}}^T = \{\hat{\omega}_2, \hat{u}_2, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2\}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade, $\mathcal{K} = \alpha^2 + \beta^2$ e os A_{ii} definidos abaixo:

- $A_{11} = \alpha\bar{u}_1\mathbf{I} + \frac{i}{Re}\mathcal{M}$;

- $A_{22} = \alpha \bar{u}_1 \mathcal{M} - \alpha \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx_2^2} \mathbf{I} + \frac{i}{Re} \mathcal{M}^2;$
- $A_{33} = \alpha \bar{u}_1 \mathbf{I} + i u_s \mathcal{D} + \frac{i}{\tau Re Sc_2} \mathcal{M};$
- $A_{44} = \alpha \bar{u}_1 \mathbf{I} + \frac{i}{Re Sc_2} \mathcal{M}.$

Com \mathcal{D} sendo a derivada de primeira ordem em relação à x_2 .

As condições de contorno para os autovetores são condições de contorno de Dirichlet do tipo $\hat{q}(+\infty) = \hat{q}(-\infty) = 0$, uma vez que temos um fluido ilimitado e as instabilidades se desenvolvem próximas à região de gradiente não nulo do perfil tangente hiperbólica.

Este problema, formulado por (4.30), tem um campo de parâmetros a serem explorados dado que a taxa de amplificação depende da combinação de números de onda longitudinal e transversal, número de Reynolds, número de Richardson da salinidade, relação de densidades, número de Schmit da salinidade, relação de difusividades, velocidade de queda das partículas e os parâmetros do escoamento de base (a , δ_u , δ_{φ_1} e δ_{φ_2}).

5. METODOLOGIA NUMÉRICA

Para resolução do problema formulado no capítulo anterior é necessário discretizar a componente normal da vorticidade, a componente vertical da velocidade, o campo concentração de partículas, o campo concentração salina e suas derivadas e resolver o problema de autovalores através de um algoritmo. Neste capítulo serão apresentados os métodos adotados para realizar essas tarefas.

5.1. Aproximação de Chebyshev

A expansão de uma função f em termos de uma série infinita de funções ortogonais $\{\phi_j\}$,

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}_j \phi_j, \quad (5.1)$$

fundamentam muitos métodos numéricos de aproximação. A precisão da aproximação e a eficiência da sua implementação são fatores decisivos na aplicabilidade destes métodos. O resultados mais conhecidos destas aproximações são aqueles para funções periódicas expandidas em séries de Fourier. O decaimento do j -ésimo coeficiente da expansão acontece quando existem coeficientes suficientes para representar todas as estruturas da função. O decaimento rápido subsequente dos coeficientes implica que uma série de Fourier truncada depois de alguns termos representa uma aproximação extremamente boa da função. Essa característica é conhecida por *precisão espectral* (CANUTO et al., 1988).

A propriedade de *precisão espectral* também pode ser encontrada em funções não periódicas desde que as funções de expansão sejam propriamente escolhidas. As autofunções resultantes de problemas singulares de Sturm-Liouville permitem *precisão espectral* na expansão de qualquer função contínua. No caso de expansão em séries finitas a função é expandida em pontos de quadratura também conhecidos como pontos de colocação (CANUTO et al., 1988). A Figura 5.1. exemplifica a convergência de uma solução utilizando um método que possui a propriedade de *precisão espectral*, sendo possível observar um comportamento diferente quando comparado à utilização de um método de diferenças finitas.

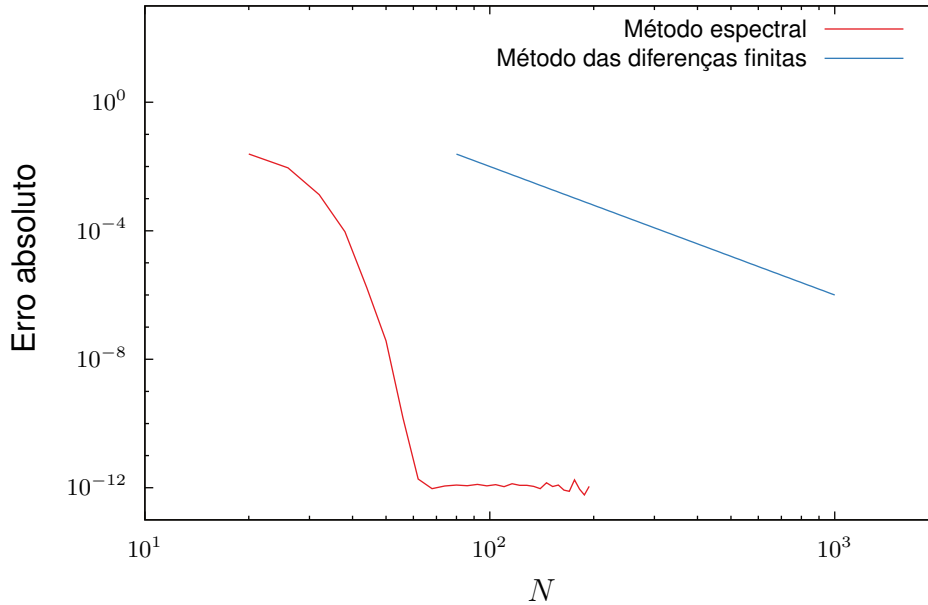


Figura 5.1. Comparação da convergência de uma solução utilizando um método espectral e um método de diferenças finitas.

Os polinômios de Chebyshev são autofunções de um problema de Sturm-Liouville singular utilizados em funções não periódicas caracterizados por funções cosseno depois de uma troca de variável independente na forma

$$T_j(\hat{y}) = \cos(j\theta) \quad \text{com} \quad \theta = \arccos(\hat{y}). \quad (5.2)$$

Pelo método recursivo pode ser obtida a relação entre os polinômios de grau j com os polinômios de grau $j + 1$ e $j - 1$, definida por

$$T_{j+1}(\hat{y}) = 2\hat{y}T_j(\hat{y}) - T_{j-1}(\hat{y}) \quad \text{com} \quad j \geq 1, \quad (5.3)$$

onde $T_0(\hat{y}) = 1$. A aproximação de uma função e suas derivadas por expansão em polinômios de Chebyshev possui a propriedade de *precisão espectral*.

A discretização da função de corrente, do campo concentração de partículas, do campo concentração salina e suas derivadas, utilizada no presente estudo, é realizada com o método de Chebyshev através da colocação Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL)

$$\hat{y}_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right) \quad \text{com} \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (5.4)$$

O algoritmo empregado para computar as matrizes de derivação foi adaptado para a linguagem Julia (BEZANSON et al., 2014) a partir do pacote de funções do ambiente computacional Matlab desenvolvido por Weideman e Reddy (2000) e conta com algumas otimizações propostas no trabalho de Baltensperger e Trummer (2003) para diminuir os erros associados à derivação numérica.

Estas matrizes são computadas em duas etapas: primeiramente são calculados todos os termos que não pertencem à diagonal principal e posteriormente são calculados os termos da diagonal principal.

Os termos que não pertencem à diagonal principal de uma matriz de derivação (no domínio da colocação *CGL*) de ordem n , denotada por \hat{D}^n , são calculados utilizando a equação

$$\hat{D}_{kj}^n = n \mathcal{Z}_{kj} \left(\mathcal{C}_{kj} \hat{D}_{kk}^{n-1} - \hat{D}_{kj}^{n-1} \right) \quad \text{com } k \neq j, \quad (5.5)$$

onde $\hat{D}^0 = \mathbf{I}$. A matriz \mathcal{C}_{kj} é definida por

$$\mathcal{C}_{kj} = \frac{w_j}{w_k}, \quad (5.6)$$

onde w_k e w_j são os pesos associados a cada posição \hat{y}_k e \hat{y}_j . Estes pesos são calculados pela equação

$$w_k = \prod_{l=0, l \neq k}^N \frac{1}{\hat{y}_k - \hat{y}_l}, \quad (5.7)$$

porém, no caso da colocação *CGL* eles tem uma forma simplificada

$$w_k = (-1)^k \quad \text{com } k = 1, 2, \dots, N-1, \quad w_0 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad w_N = \frac{(-1)^N}{2}. \quad (5.8)$$

A matriz \mathcal{Z}_{kj} é definida por

$$\mathcal{Z}_{kj} = \frac{1}{\hat{y}_k - \hat{y}_j} \quad \text{com } k \neq j, \quad (5.9)$$

mas de acordo com o trabalho de Baltensperger e Trummer (2003) a diferença entre as posições \hat{y}_k e \hat{y}_j pode ser substituída por um produto de funções seno utilizando identidades trigonométricas (ver Eq. 5.4). Essa substituição resulta em

$$\mathcal{Z}_{kj} = \frac{1}{2 \sin \left[\frac{(k+j)\pi}{2N} \right] \sin \left[\frac{(k-j)\pi}{2N} \right]} \quad \text{com } k \neq j \quad (5.10)$$

e melhora a precisão no canto esquerdo da parte superior da matriz, porém, isso não acontece no canto direito da parte inferior da matriz.

Com a finalidade de obter o mesmo ganho de precisão no canto do esquerdo da parte superior da matriz que no canto direito da parte inferior da matriz, é possível aproveitar a propriedade de simetria

$$\mathcal{Z}_{N-k, N-j} = -\mathcal{Z}_{kj}. \quad (5.11)$$

Essa otimização é referida na literatura como *Flipping trick* (BALTENSBERGER; TRUMMER, 2003) e consiste em calcular a metade superior da matriz e depois "virar" a matriz por meio da relação (5.11).

Os termos que pertencem à diagonal principal da matriz de derivação são calculados a partir dos termos que não pertencem à diagonal principal através da propriedade chamada na literatura de *Negative sum trick* (BALTENSBERGER; TRUMMER, 2003). Esta propriedade diz que em cada linha da matriz o termo da diagonal principal é igual ao oposto da soma dos demais termos, conforme a equação

$$\mathcal{D}_{kk}^n = - \sum_{j=0, j \neq k}^N \mathcal{D}_{kj}^n. \quad (5.12)$$

A Figura 5.2. apresenta o esquema da rotina computacional necessária para calcular uma matriz de derivação de ordem n com base no método descrito acima.

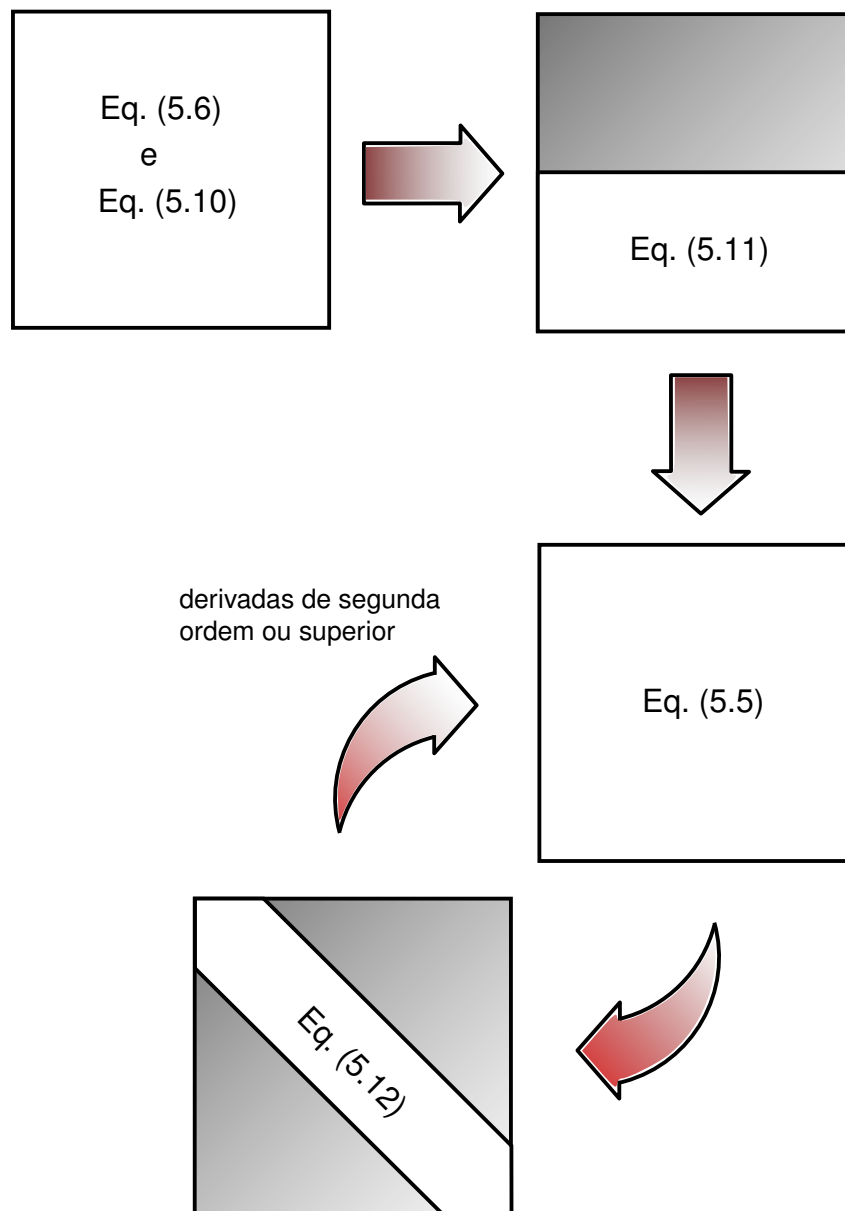


Figura 5.2. Esquema da rotina para calcular uma matriz de derivação de ordem n utilizando o método descrito.

5.2. Transformação da malha

Com a finalidade de lidar com as regiões de fortes gradientes presentes na interface do escoamento de base, torna-se necessário utilizar uma função de transformação de malha nos pontos *CGL*. Posteriormente o domínio de cálculo deve ser truncado em uma distância suficientemente grande para garantir uma influência desprezível dos limites, em que se aplicam as condições de contorno. Finalmente as matrizes de derivação devem ser transformadas nas novas coordenadas.

A função utilizada neste trabalho, introduzida por Berrut e Mittelmann (2004), consiste em refinar a malha em uma ou mais localizações e é descrita em sua maneira mais geral pela equação

$$\hat{y}_j = \eta + \frac{1}{\lambda} \sum_{q=1}^Q \arctan [\theta_q (\bar{x}_2 - \phi_q)], \quad (5.13)$$

onde \hat{y}_j são os pontos *CGL*, \bar{x}_2 os pontos resultantes desta função, Q é número de localizações que se pretende refinar a malha, θ_q é a densidade de pontos associados a uma localização ϕ_q , λ e η são constantes que asseguram que os \bar{x}_2 continuem em domínio ortogonal. Essas constantes são definidas, respectivamente, por:

$$\lambda = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \quad (5.14)$$

e

$$\eta = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 + \xi_2}, \quad (5.15)$$

com ξ_1 e ξ_2 sendo valores constantes relacionados com os parâmetros θ_q e ϕ_q através das equações

$$\xi_1 = \sum_{q=1}^Q \arctan [\theta_q (1 + \phi_q)] \quad (5.16)$$

e

$$\xi_2 = \sum_{q=1}^Q \arctan [\theta_q (1 - \phi_q)]. \quad (5.17)$$

É possível observar que (5.13) transforma os pontos da colocação *CGL* em uma outra distribuição de pontos no intervalo $[-1; 1]$, por este motivo é necessário passar essa distribuição resultante para o domínio real. Isso é feito por meio de uma interpolação linear, também utilizada por Burns e Meiburg (2012), descrita por

$$x_2 = \bar{x}_2 \left(\frac{L_+ + L_-}{2} \right) + \left(\frac{L_+ - L_-}{2} \right) \quad (5.18)$$

onde x_2 é o domínio real, L_+ é o comprimento da origem até o ponto máximo de x_2 e L_- é o comprimento da origem até o ponto mínimo de x_2 .

No presente estudo, será considerado um domínio simétrico ($L_+ = L_-$) e com refinamento da malha apenas na posição $x_2 = 0$. A função de transformação de malha resultante destas considerações é

$$x_2 = L_+ \bar{x}_2 = \frac{m\delta_u}{2\theta} \tan(\lambda \hat{y}), \quad (5.19)$$

onde m é a constante de truncamento do domínio e $\delta_u/2$ é o comprimento característico do escoamento. Os valores de m e θ devem ser determinados a partir de testes de convergência. A Figura 5.3. exemplifica a transformação dos pontos *CGL* em uma distribuição no intervalo $[-m\delta_u/2; m\delta_u/2]$ e com um refinamento de malha na posição $x_2 = 0$ utilizando (5.19).

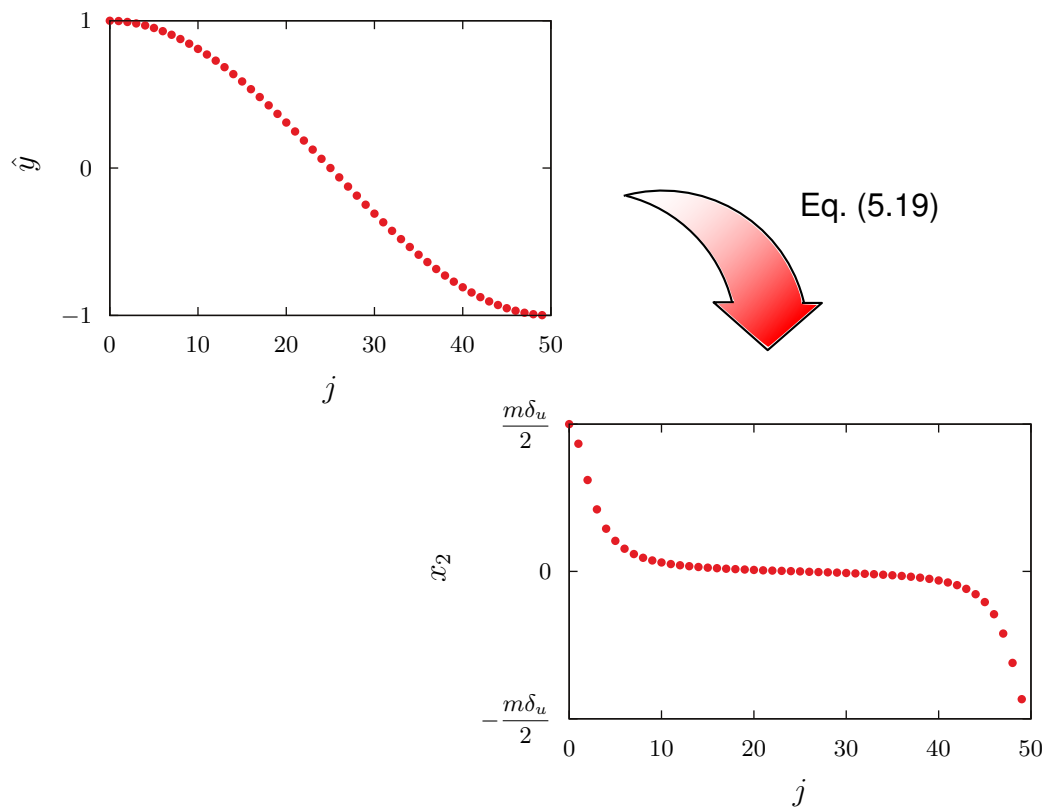


Figura 5.3. Exemplo de transformação dos pontos *CGL* utilizando a equação (5.19).

As matrizes de derivação resultantes das equações (5.5), (5.11) e (5.12) são transformadas nas novas coordenadas utilizando a regra da cadeia. Este procedimento resulta nas equações

$$\mathcal{D} = \hat{\mathcal{D}} \frac{d\hat{y}}{dx_2}, \quad (5.20)$$

$$\mathcal{D}^2 = \hat{\mathcal{D}}^2 \left(\frac{d\hat{y}}{dx_2} \right)^2 + \hat{\mathcal{D}} \frac{d^2\hat{y}}{dx_2^2} \quad (5.21)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^4 = & \hat{\mathcal{D}}^4 \left(\frac{d\hat{y}}{dx_2} \right)^4 + \hat{\mathcal{D}}^3 \left(6 \frac{d^2\hat{y}}{dx_2^2} \frac{d\hat{y}}{dx_2} \right) \\ & + \hat{\mathcal{D}}^2 \left[3 \left(\frac{d^2\hat{y}}{dx_2^2} \right)^2 + 4 \frac{d^3\hat{y}}{dx_2^3} \frac{d\hat{y}}{dx_2} \right] + \hat{\mathcal{D}} \frac{d^4\hat{y}}{dx_2^4} \end{aligned} \quad (5.22)$$

para a transformação das matrizes de derivação de primeira, segunda e quarta ordem respectivamente, onde \mathcal{D}^n é a matriz de derivação de ordem n no domínio real e $\hat{\mathcal{D}}^n$ é a matriz de derivação de ordem n no domínio da colocação *CGL*.

5.3. Algoritmo QZ

O algoritmo QZ tem como finalidade de resolver problemas de autovalores generalizados de um par de matrizes (A, B) (ANDERSON et al., 1999). Este método é fundamentado na decomposição generalizada de Schur que tem a forma

$$A = QSZ, \quad e \quad B = QTZ, \quad (5.23)$$

onde Q e Z são matrizes unitárias e S e T são matrizes triangulares superiores. Para as matrizes S e T existem autovalores λ_S e λ_T que estão relacionados com os autovalores de (4.30) pela relação

$$\sigma = \frac{\lambda_S}{\lambda_T}. \quad (5.24)$$

Por convenção, $\sigma = \infty$ quando $\lambda_T = 0$ (ANDERSON et al., 1999).

Esse algoritmo é implementado no código computacional a partir da função `eig` do ambiente computacional `Julia` (BEZANSON et al., 2014), esta função é baseada no pacote de algebra linear `LAPACK` (ANDERSON et al., 1999).

6. RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados de todas as análises realizadas. Foram estudadas a influência da concentração salina, da presença de partículas no escoamento e da dupla difusividade.

Para todas as análises alguns parâmetros foram considerados contantes, tais como os parâmetros do escoamento de base (δ_u , δ_{φ_1} , δ_{φ_2} e a). As espessuras das camadas de mistura, concentração de partículas e concentração salina são consideradas com o valor igual a 2 porque o presente estudo não leva em consideração a instabilidade de *Holmboe*. Segundo o trabalho de Ortiz et al. (2002), a advecção média a no caso temporal atua como um efeito Doppler na frequência e afeta apenas a velocidade de fase ($c_r = \sigma_r/\alpha$). Por essa razão este parâmetro é considerado com o valor igual a 0.

6.1. Validação do código - Camada de mistura homogênea

Os resultados apresentados a seguir objetivam validar o código computacional desenvolvido e implementado no ambiente computacional `julia`. Para essa finalidade foi utilizado o caso de instabilidade linear temporal em camadas de mistura homogêneas ($R_\rho = 1$, $\tau = 1$ e $u_s = 0$). Primeiramente, foi realizado um teste de convergência da solução levando em consideração um número de Reynolds fixo e apenas números de onda longitudinais ($\beta = 0$). Posteriormente, foi realizada uma análise levando em consideração $\beta \neq 0$ objetivando confirmar o teorema de *Squire* (SQUIRE, 1933). Este teorema garante que para escoamentos incompressíveis e paralelos livres e parietais, para cada perturbação tridimensional instável, existe uma perturbação bidimensional mais instável, isto é, com maior taxa de amplificação. Finalmente os resultados obtidos foram comparados com o trabalho de Betchov e Szewczyk (1963), que leva em consideração variações do número de Reynolds e comprimentos de onda longitudinais.

A Figura 6.1. apresenta o resultado do teste de convergência da solução do problema de camada de mistura homogênea, onde σ_{i_e} é a taxa de amplificação para $N = 210$. É possível observar que a solução converge a partir de $N \approx 70$. Em função deste resultado foi adotado 90 pontos para realizar as análises.

Na Figura 6.2. é possível observar que a taxa de amplificação (isolinhas) decresce conforme o número de onda transversal cresce, confirmando o teorema de

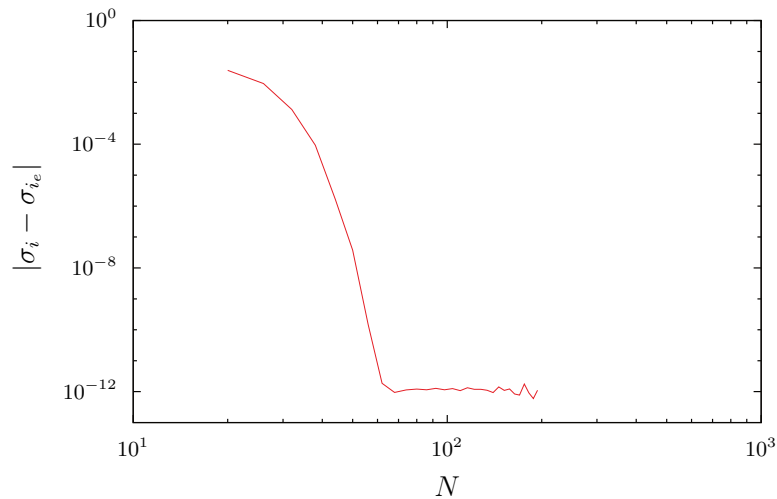


Figura 6.1. Teste de convergência da solução do problema. Resultados para $Re = 5000$, $m = 100$ e $\theta = 100$.

Squire para o caso de camada de mistura homogênea. Desta forma podemos afirmar que o modo mais amplificado é bidimensional.

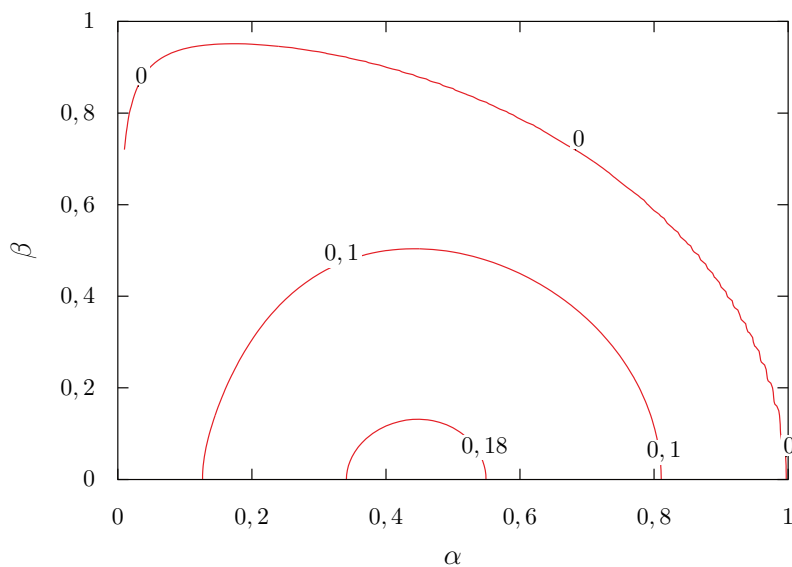


Figura 6.2. Isolinhas de taxa de amplificação em função dos números de onda longitudinal e transversal. Resultados para $Re = 5000$.

A Figura 6.3. apresenta os resultados obtidos para a máxima taxa de amplificação (ver Figura 6.3.a) e o número de onda mais amplificado (ver Figura 6.3.b) em função do número de Reynolds. O comportamento observado em ambas curvas sugere que as forças viscosas não tem grande importância no desenvolvimento de instabilidades apresentando uma convergência de taxa de amplificação e número de onda mais amplificado a partir de um número de Reynolds aproximadamente igual a 1000.

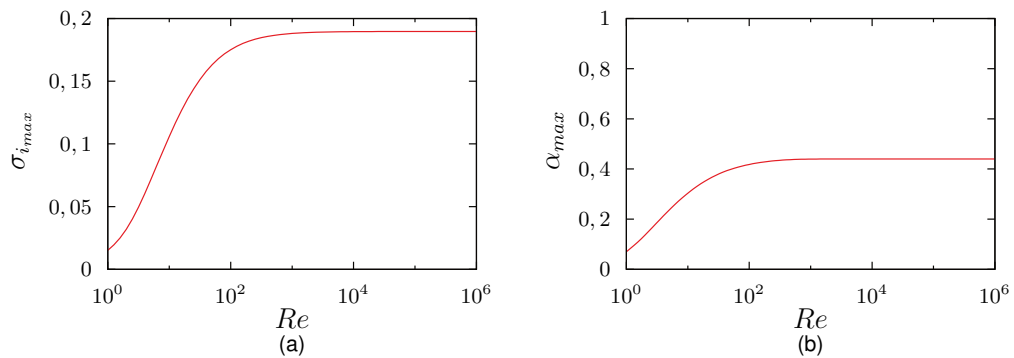


Figura 6.3. Taxas máximas de amplificação (a) e seus números de onda correspondentes (b) em função do número de Reynolds.

Tabela 6.3. Comparação dos resultados obtidos com os dados da literatura.

	Presente estudo	Literatura	Erro absoluto
$\sigma_{i_{max}}$	0,1897	0,1897	0
α_{max}	0,4449	0,4446	3×10^{-4}

Os valores que as curvas de taxa de amplificação e número de onda mais amplificado convergem são de 0,1897 e 0,4449, respectivamente, e a velocidade de fase é aproximadamente igual à advecção média para todos os valores de números de Reynolds, caracterizando o modo de perturbação de *Kelvin-Helmholtz*. A comparação entre os valores de $\sigma_{i_{max}}$ e α_{max} presentes na literatura e os resultados obtidos (considerando $Re = 10^6$) estão sumarizados na Tabela 6.3.. A taxa de amplificação tem boa concordância com o valor da literatura, apresentado um erro absoluto nulo. Enquanto o número de onda mais amplificado apresenta um erro absoluto de 3×10^{-4} .

6.2. Influência da estratificação de densidade

Esta análise tem como finalidade investigar como a estratificação influencia o desenvolvimento das instabilidades. No problema formulado em (4.30), a estratificação é caracterizada pelo número de Richardson da salinidade e a relação de densidades, quando este segundo parâmetro tem valores diferentes de uma unidade, lembrando que $R_p = Ri_2/Ri_1$. Por ser um estudo de correntes hipopícnais, será considerado valores sempre maiores que a unidade, isto é, o fluido com concentração salina é mais denso que o fluido com partículas em suspensão. Porém ainda não serão considerados os efeitos de dupla difusividade ($\tau = 1$) e efeitos de deposição das partículas ($u_s = 0$).

Este caso apresenta as mesmas características de convergência da solução que a camada de mistura homogênea. Por este motivo foram adotados 90 pontos para realizar as outras análises. Também foi realizada uma análise preliminar levando em consideração números de onda longitudinais, com resultados apresentados na

Figura 6.4., onde observa-se que a taxa de amplificação decresce com o aumento do número de onda transversal. Neste caso o teorema de *Squire* é confirmado e podemos considerar $\beta = 0$ para as demais análises.

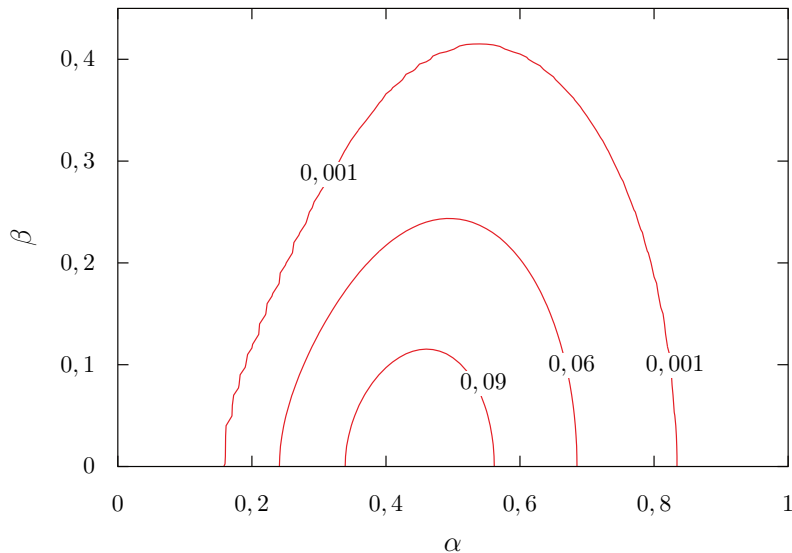


Figura 6.4. Isolinhas de taxa de amplificação em função dos números de onda longitudinal e transversal. Resultados para $Re = 5000$, $R_\rho = 1,5$ e $Ri_2 = 0,4$.

Posteriormente foram realizadas análises com números de Richardson da salinidade 0,3, 0,4 e 0,5 em função da relação de densidade e número de onda longitudinal. O número de Reynolds é constante nesta análise uma vez que os efeitos viscosos não tem influência no desenvolvimento de instabilidades para esta configuração de escoamento, conforme foi visto anteriormente. O valor $Re = 5000$ foi adotado.

A Figura 6.5. apresenta os resultados obtidos levando em consideração os parâmetros descritos acima. Na Figura 6.5.a temos as taxas máxima de amplificação e na Figura 6.5.b os números de onda mais amplificados, ambos em função da relação de densidade e do número de Richardson da salinidade.

Nas curvas de taxa de amplificação é possível observar um decrescimento de 0,1897 em $R_\rho = 1$ (caso homogêneo) até zero significando que existem valores críticos de relação de densidade a partir dos quais o escoamento é estável. Esses valores críticos encontrados são de 2, 2,6667 e 6 para os valores de número de Richardson da salinidade de 0,5, 0,4 e 0,3, respectivamente. Convertendo estes valores críticos de relação de densidades em número de Richardson da concentração de sedimentos com a equação

$$R_{1_{crit}} = \frac{Ri_2}{R_{\rho_{crit}}} \quad (6.1)$$

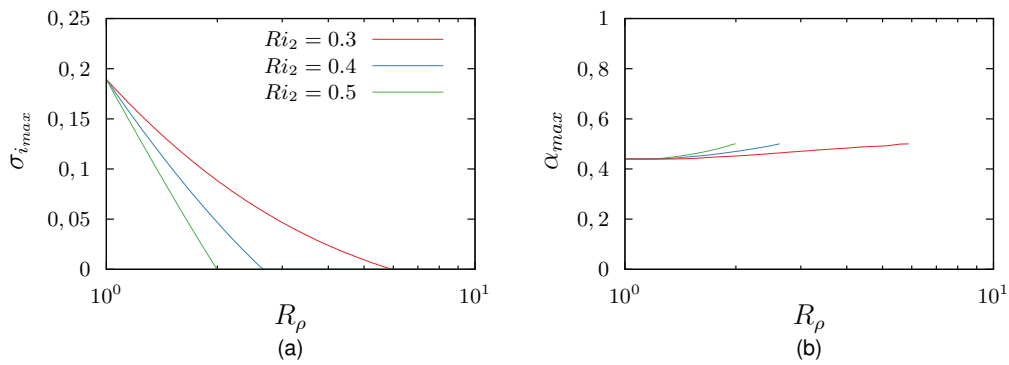


Figura 6.5. Taxas máximas de amplificação (a) e seus números de onda correspondentes (b) em função da relação de densidades e número de Richardson salino.

é possível observar uma diferença constante de 0,25 entre Ri_2 e Ri_{1crit} . A Tabela 6.5. apresenta este comportamento para diferentes valores de número de Richardson da salinidade considerados.

Tabela 6.5. Relação entre Ri_2 e Ri_{1crit} .

Ri_2	$R_{\rho crit}$	Ri_{1crit}	$Ri_2 - Ri_{1crit}$
0,3	6	0,05	0,25
0,4	2,6667	0,15	0,25
0,5	6	0,25	0,25

Nas curvas de número de onda mais amplificado observa-se um crescimento de 0,4449 no caso homogêneo até aproximadamente 0,5 para a relação de densidade crítica. Números de onda para relações de densidade além do valor crítico não foram considerados porque o escoamento é estável. A velocidade de fase não foi apresentada, pois apresenta o mesmo comportamento do caso homogêneo.

A Figura 6.6. apresenta os campos de perturbação obtidos a partir dos autovetores correspondentes ao modo mais amplificado, nesse caso o modo \mathcal{KH} , para uma relação de densidade igual a dois e número de Richardson da salinidade igual a 0,4. O eixo x_1 está em normalizado em função do comprimento de onda transversal

$$\lambda = \frac{2\pi L}{\alpha} = \frac{\pi \delta_u}{\alpha}, \quad (6.2)$$

para a combinação de parâmetros desta figura $\lambda \approx 6,68\delta_u$. Nas Figuras 6.6.a, 6.6.b, 6.6.c e 6.6.d, as linhas pretas são isolinhas positivas e as linhas cinzas e pontilhadas são isolinhas negativas.

É possível observar estruturas centradas em $x_2 = 0$ que é a posição com máximo gradiente do escoamento de base (equações 4.3a, 4.3b e 4.3c). Os campos de perturbação da concentração de sedimentos (Figura 6.6.c) e salinidade (Figura 6.6.d) possuem a mesma forma porém são defasados em meio comprimento de onda. A

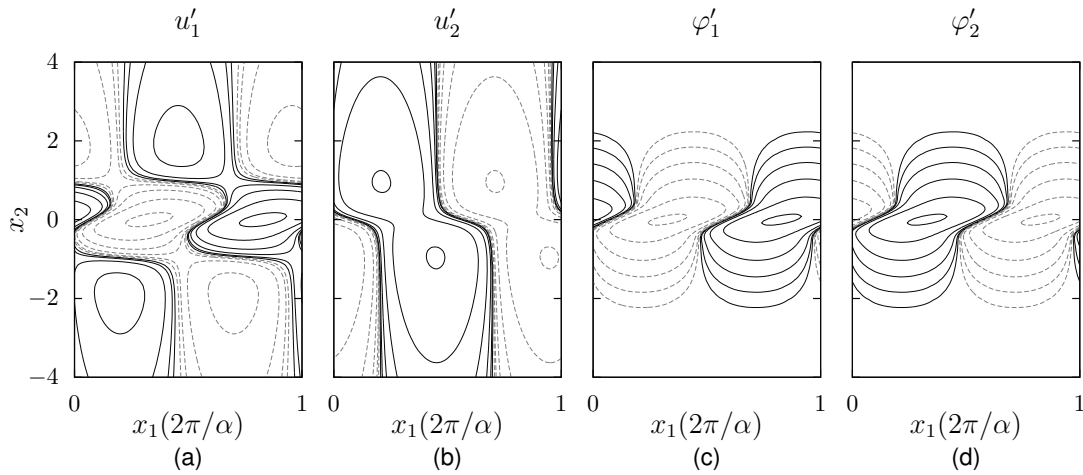


Figura 6.6. Campos de perturbação do modo \mathcal{KH} para velocidade longitudinal (a), velocidade vertical (b), concentração de sedimentos (c) e concentração salina (d). Resultados $R_\rho = 2$ e $Ri_2 = 0,4$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1.

Figura 6.7. apresenta o campo de perturbação da vorticidade (Figura 6.7.a) na direção transversal e o campo total da mesma componente de vorticidade (Figura 6.7.b), definida por

$$\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (6.3)$$

O campo total é composto pela soma de um campo de perturbação com o escoamento de base. Nesta figura observa-se a presença de vórtices no sentido anti-horário centrados na região de máximo gradiente do escoamento de base ($x_2 = 0$). Este sentido de rotação dos vórtices é determinado pela presença apenas de isolinhas negativas no campo total (Figura 6.7.b).

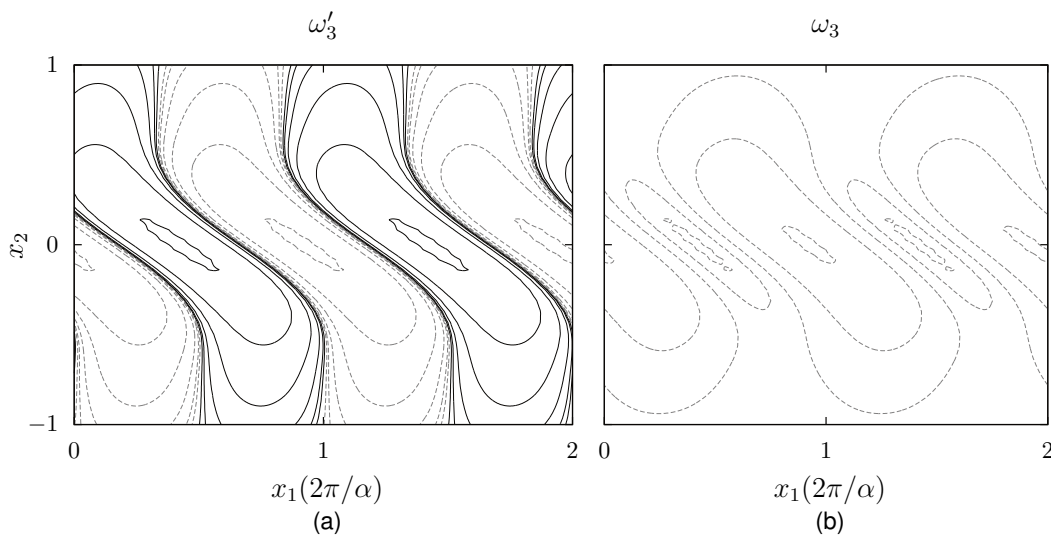


Figura 6.7. Campo de perturbação da vorticidade na direção transversal do modo \mathcal{KH} . Resultados $R_\rho = 2$ e $Ri_2 = 0,4$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1.

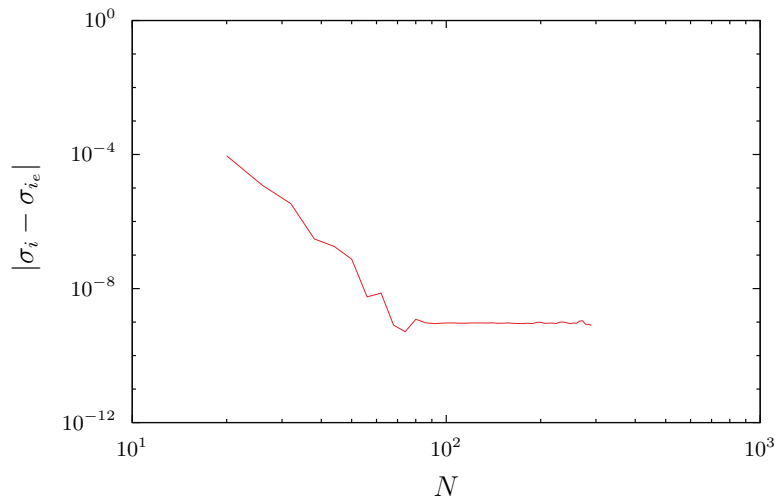


Figura 6.8. Teste de convergência da solução do problema. Resultados para $m = 100$, $\theta = 100$, $R_\rho = 2$ e $u_s = 2,5 \times 10^{-2}$.

Esses resultados sugerem, de maneira geral, que maiores números de Richardson da salinidade tendem a amortecer o escoamento diminuindo o valor crítico da relação de densidade, e que nesta configuração, o modo de perturbação mais amplificado é o modo de *Kelvin-Helmholtz*.

6.3. Como as partículas afetam as instabilidades?

A influência das partículas é caracterizada pela velocidade de queda modelada pela lei de Stokes. Porém, não serão considerados os efeitos duplo-difusivos ($\tau = 1$). Os efeitos viscosos, assim como nos outros casos anteriores, não tem importância quando o número de Reynolds excede um valor crítico. Os valores de parâmetros fixados nessa investigação, além da relação de difusividades, são número de Reynolds igual a 5000, número de Richardson da salinidade igual a 0,4.

Um novo teste de convergência da solução foi realizado uma vez que há um novo parâmetro sendo considerado no problema. A Figura 6.8. apresenta o resultado obtido nesse teste, onde σ_{i_e} é a taxa de amplificação para $N = 300$. É possível observar que este caso tem características de convergência diferente dos casos anteriores. A solução converge em aproximadamente 100 pontos, desta forma foi adotado $N = 120$ para realizar as análises.

Posteriormente ao teste de convergência foi realizada uma análise com o objetivo de validar o teorema de *Squire*, ou seja, foram considerados números de onda longitudinais. Novamente foi observado, com auxílio da Figura 6.9., que a taxa de amplificação decresce para valores de β maiores que zero e que os modos mais amplificados acontecem para um número de onda transversal nulo.

A Figura 6.10. apresenta os resultados obtidos com os parâmetros definidos an-

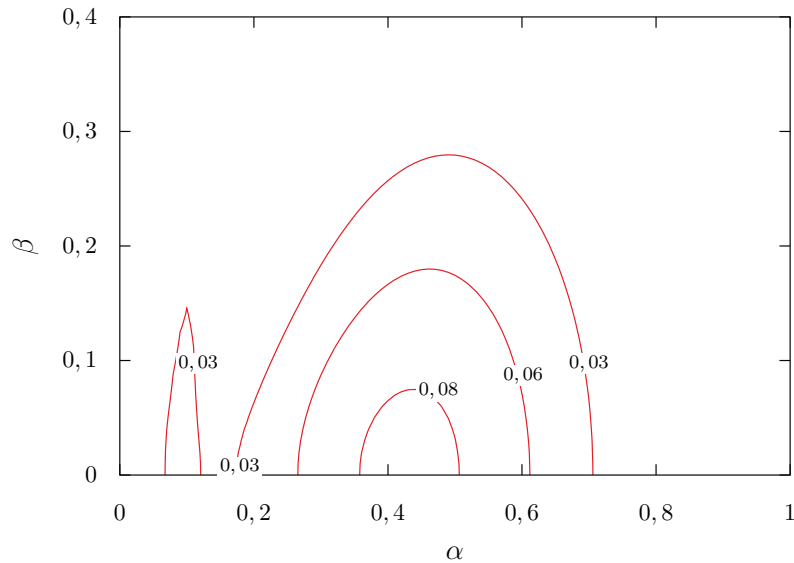


Figura 6.9. Isolinhas de taxa de amplificação em função dos números de onda transversal e longitudinal. Resultados para $R_\rho = 1,5$ e $u_s = 2,5 \times 10^{-2}$.

teriormente. Nas curvas da velocidade de fase é possível observar uma alteração para o modo \mathcal{KH} . Quando a velocidade de queda é nula (condição do tópico 6.2), a velocidade de fase é aproximadamente igual ao valor da advecção média do escoamento de base. Porém, conforme a velocidade de queda das partículas aumenta, a velocidade de fase decresce de forma proporcional à u_s (Figura 6.10.c). As taxas máximas de amplificação e número de onda mais amplificado do modo \mathcal{KH} permanecem iguais aos encontrados anteriormente. As discontinuidades presentes nas curvas de número de onda mais amplificado (Figura 6.10.b) e velocidade de fase (Figura 6.10.c) acontecem porque existe uma mudança do modo predominante, caracterizado pela taxa de amplificação.

É possível observar que um outro modo é mais amplificado que o modo \mathcal{KH} para uma faixa de relação de densidades quando a velocidade de queda assumi valores maiores que 10^{-2} . Esse modo, que não consta na literatura, possui um número de onda característico aproximadamente cinco vezes menor que o do modo \mathcal{KH} e velocidade de fase em torno de -1 . No presente estudo este modo será chamado de *SD* (*Settling-Driven*).

A Figura 6.11. mostra como o campo de concentração de sedimentos é deformado em função da velocidade de queda das partículas. Assim como na Figura 6.6., o eixo x_1 está em normalizado em função do comprimento de onda, as linhas pretas são isolinhas positivas e as linhas cinzas e pontilhadas são isolinhas negativas.

Como foi visto, a velocidade de queda não altera as taxas de amplificação e o número de onda do modo \mathcal{KH} . Desta forma, as deformações no campo de perturbação da concentração de sedimentos continuam caracterizando uma instabilidade de

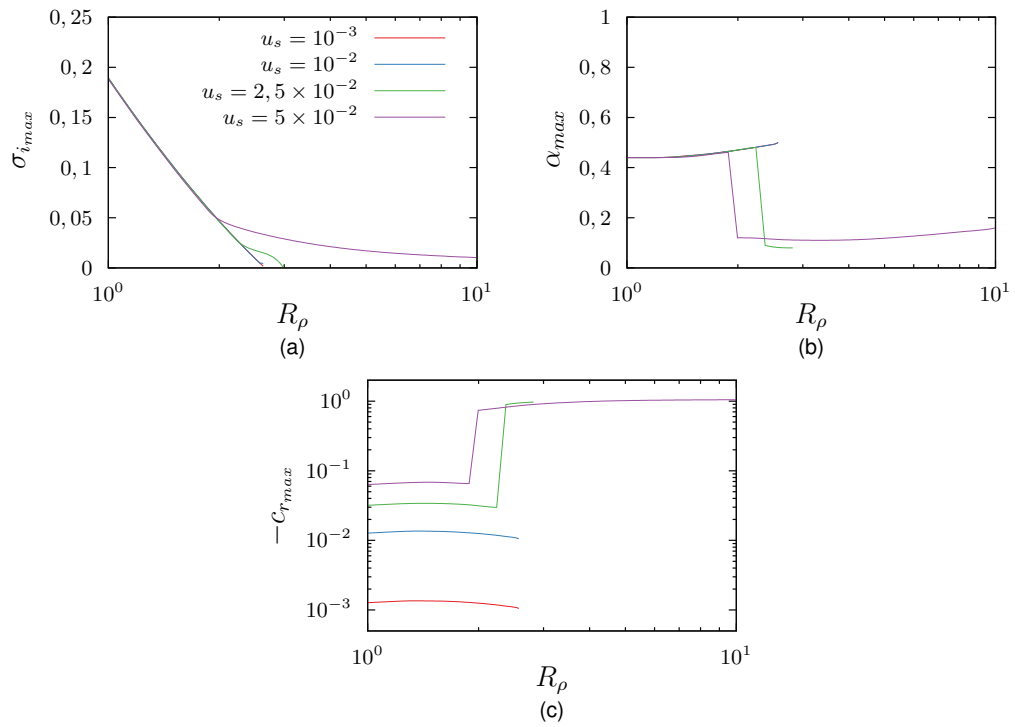


Figura 6.10. Taxas máximas de amplificação (a), números de onda mais amplificados (b) e a velocidade de fase correspondente (c) em função da relação de densidade e velocidade de queda.

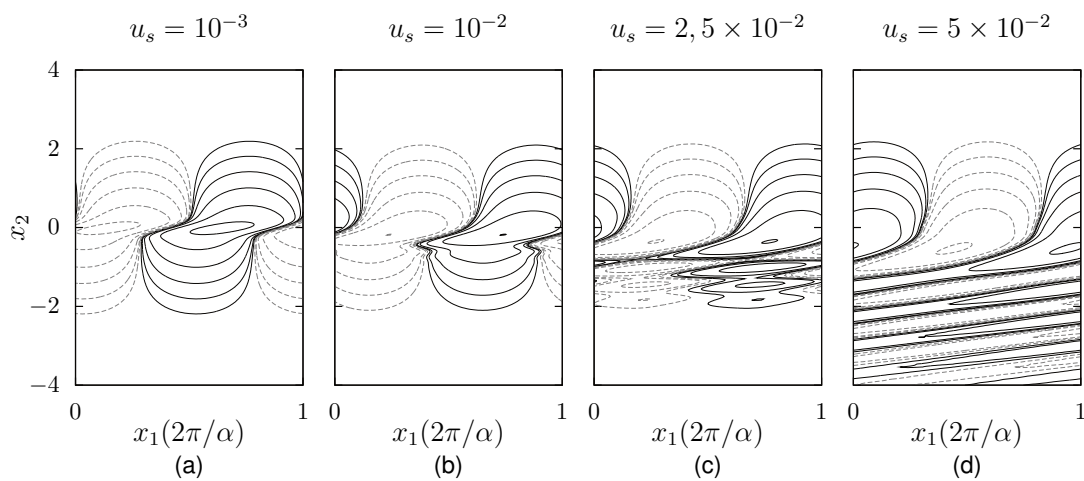


Figura 6.11. Campos de perturbação do modo \mathcal{KH} da concentração de sedimentos em função da velocidade de queda. Resultados para $R_\rho = 2$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1.

Kelvin-Helmholtz, porém, com o aumento da velocidade de queda o escoamento pode estar mais propício a desenvolver instabilidades secundárias. De forma qualitativa, é possível observar este fenômeno nos trabalhos de Henniger et al. (2010) e Henniger e Kleiser (2012) que realizaram simulações numéricas diretas em uma configuração de escoamento de base semelhante à que esta sendo tratada e neste trabalhos. É possível observar que posteriormente ao desenvolvimento dos vórtices \mathcal{KH} é iniciado o desenvolvimento de instabilidades de *Rayleigh-Taylor* causadas pelos efeitos de deposição das partículas.

A Figura 6.12. apresenta os campos de perturbação do modo SD , seguindo o mesmo padrão da Figura 6.6.. É possível observar estruturas descentradas e assimetrias e assim como no modo \mathcal{KH} , os campos de concentração de sedimentos e salinidade apresentam uma defasagem de meio comprimento de onda.

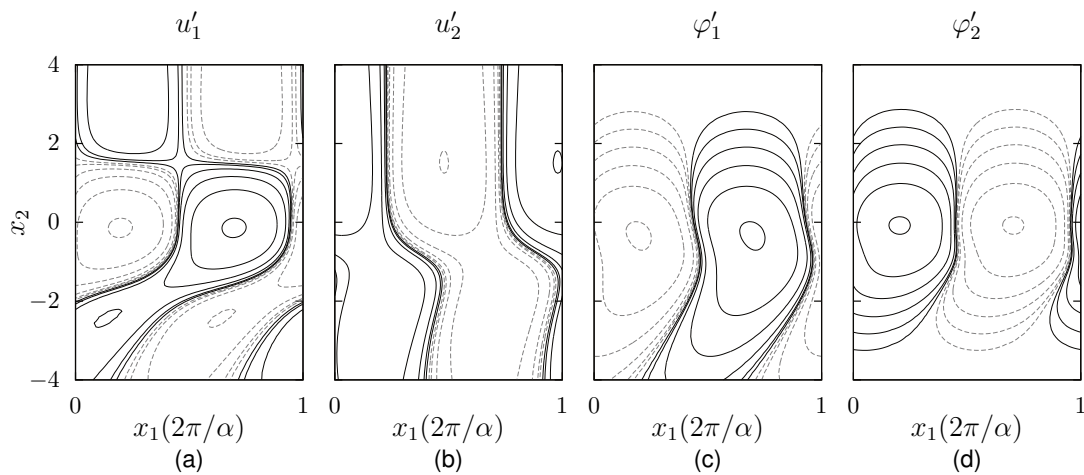


Figura 6.12. Campos de perturbação do modo SD para velocidade transversal (a), velocidade vertical (b), concentração de sedimentos (c) e concentração salina (d). Resultados para $R_\rho = 2.5$ e $u_s = 2,5 \times 10^{-2}$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1.

A Figura 6.13. apresenta o campo de perturbação e campo total da vorticidade na direção transversal do modo SD calculado a partir da equação (6.3). É possível observar um mecanismo diferente de formação de vórtices quando comparado ao modo \mathcal{KH} . Neste caso, observa-se a presença vórtices contra-rotativos na região inferior do domínio onde o gradiente de velocidade do escoamento de base tende à tornar-se nulo ($x_2 \approx -1$). A característica contra-rotativa destes vórtices é definida pela alternância de isolinhas positivas e negativas no campo total (Figura 6.13.b).

6.3.1. Qual é o modo dominante?

O modo dominante, para esse caso, é apresentado na Figura 6.14. em função da velocidade de queda e da relação de densidades. Para cada par de u_s e R_ρ é possível

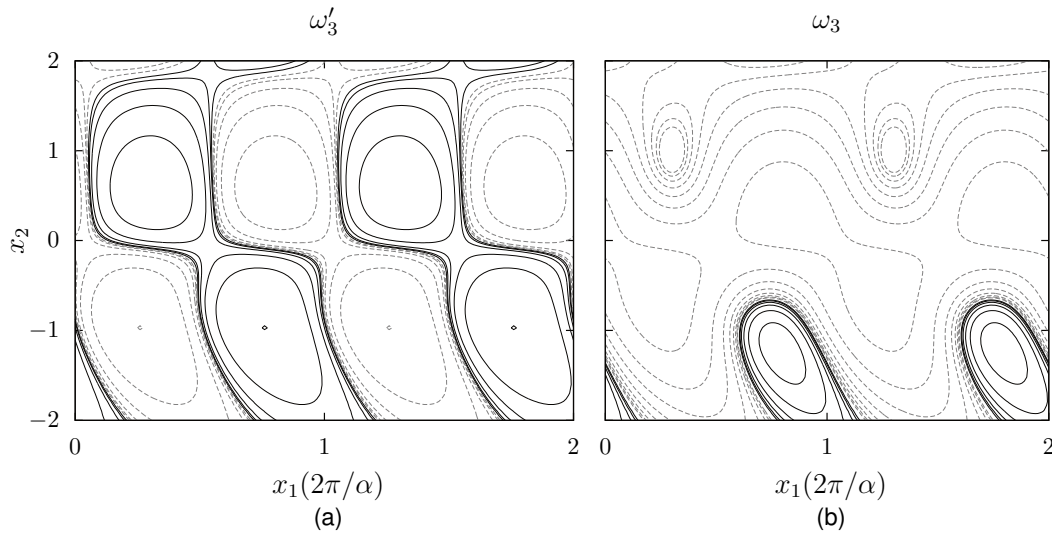


Figura 6.13. Campo de perturbação da vorticidade na direção transversal do modo SD . Resultados $R_\rho = 2$ e $Ri_2 = 0,4$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1.

saber se existe o crescimento de instabilidades \mathcal{KH} ou SD ou se o escoamento é estável. Observam-se dois valores importantes de velocidade de queda, o primeiro que é de aproximadamente $2,24 \times 10^{-2}$ a partir do qual o modo SD pode se tornar o modo mais amplificado. E o segundo, aproximadamente $3,55 \times 10^{-2}$, é o valor em que o escoamento se torna incondicionalmente instável. Também podemos observar que enquanto a velocidade de queda é menor do que $2,24 \times 10^{-2}$, o valor crítico de relação de densidade se mantém conforme previsto quando a velocidade de queda foi considerada nula ($R_{\rho_{crit}} = 2,6667$ para $Ri_2 = 0,4$).

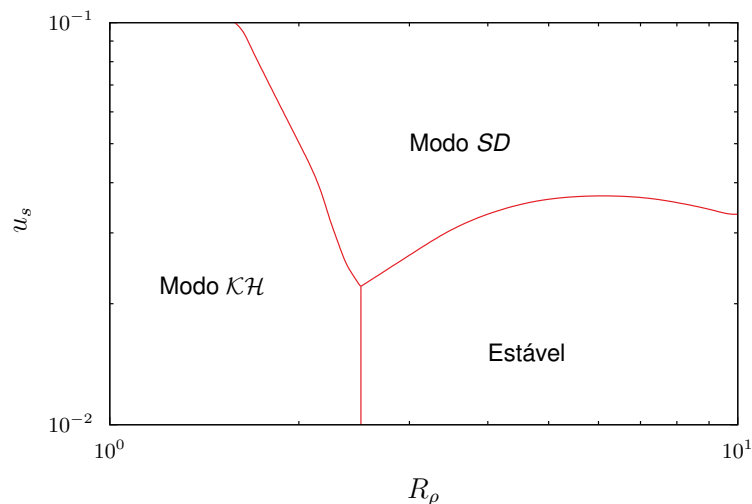


Figura 6.14. Interface entre os modos \mathcal{KH} e SD em função da velocidade de queda e relação de densidade.

6.4. Qual a influência da dupla difusividade?

Para responder essa pergunta, foi considerado que o fluido com sedimentos em suspensão possui uma difusividade molecular menor do que a do fluido com concentração salina ($\tilde{\kappa}_1 < \tilde{\kappa}_2$), resultando em valores de relação de difusividades maiores do que uma unidade. As análises realizadas levaram em consideração um número de Richardson da salinidade de 0,4, número de Schmidt da salinidade igual a um e não foram considerados os efeitos de deposição das partículas ($u_s = 0$).

A Figura 6.15. apresenta o resultado do teste de convergência da solução quando a dupla difusividade é considerada. Observa-se que a solução converge para aproximadamente 290 pontos. Isto quer dizer que para estudar os efeitos duplo-difusivos são necessários três vezes mais pontos no domínio em relação aos casos estudados anteriormente. Para realizar as análises envolvendo dupla difusividade foram utilizados 300 pontos.

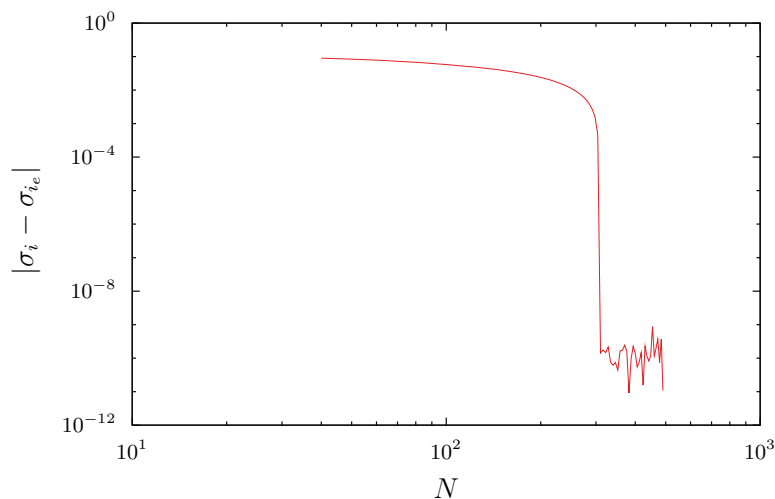


Figura 6.15. Teste de convergência da solução do problema. Resultados para $m = 100$, $\theta = 100$, $R_\rho = 2$, $Re = 7500$ e $\tau = 100$.

Levando em consideração o número de onda transversal, conforme apresentado na Figura 6.16., podemos constatar que com a presença da dupla-difusividade o teorema de *Squire* é válido, porém, também existe um outro modo de instabilidade na direção transversal que é mais amplificada quando $\alpha = 0$. A presença desta instabilidade transversal torna necessária a realização das análises também considerando números de onda transversais. A seguir as análises serão realizadas separadamente nos domínios transversal e longitudinal e posteriormente serão comparados. É necessário enfatizar que uma instabilidade transversal que se desenvolva bidimensionalmente, quando somada ao escoamento de base, torna o escoamento tridimensional.

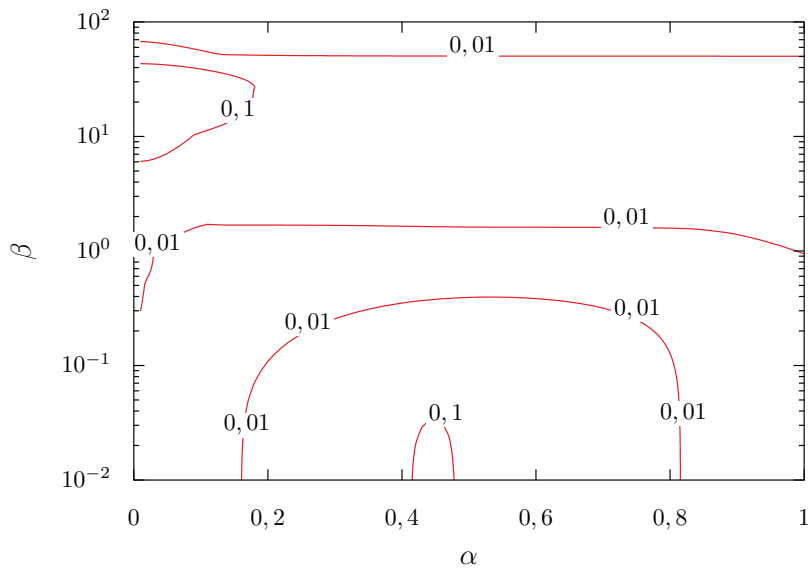


Figura 6.16. Isolinhas de taxa de amplificação em função dos números de onda transversal e longitudinal. Resultados para $Re = 7500$, $\tau = 100$ e $R_\rho = 2$.

6.4.1. O modo transversal ($\alpha = 0$)

A instabilidade causada por efeitos duplo-difusivos torna-se direcional na presença do cisalhamento, formando ângulos retos com o escoamento de base quando possuem sua máxima taxa de amplificação ($\alpha = 0$). Isto quer dizer que esta instabilidade é fortemente amortecida com o crescimento de α . Esta característica faz com que a instabilidade tome a forma de vórtices longitudinais ou, conforme é chamada na literatura, *salt sheets* (SMYTH; KIMURA, 2007).

Para caracterizá-la, primeiramente foi realizada uma análise com a finalidade de verificar a dependência deste modo de instabilidade com o número de Reynolds. A Figura 6.17. apresenta as curvas de taxa de amplificação e número de onda mais amplificado em função de Re para $R_\rho = 2$ e $\tau = 100$. É possível observar que, assim como nos casos anteriores, a taxa de amplificação deste modo tende a convergir para um valor conforme o número de Reynolds aumenta, porém esse comportamento não é observado para o número de onda mais amplificado. Maiores números de Reynolds tendem a gerar perturbação com menores comprimentos de onda transversais.

A Figura 6.18. apresenta o comportamento da taxa amplificação máxima (Figura 6.18.a) e número de onda transversal mais amplificado (Figura 6.18.b) quando consideramos variações das relações de densidades e difusividades. É possível observar para relações de densidades menores do que 10 que $\sigma_{i_{max}}$ não sofre grandes variações para relações de difusividades maiores do que 50. Porém, para valores de R_ρ maiores que 10 a relação de difusividades tem grande influência sobre a relação de

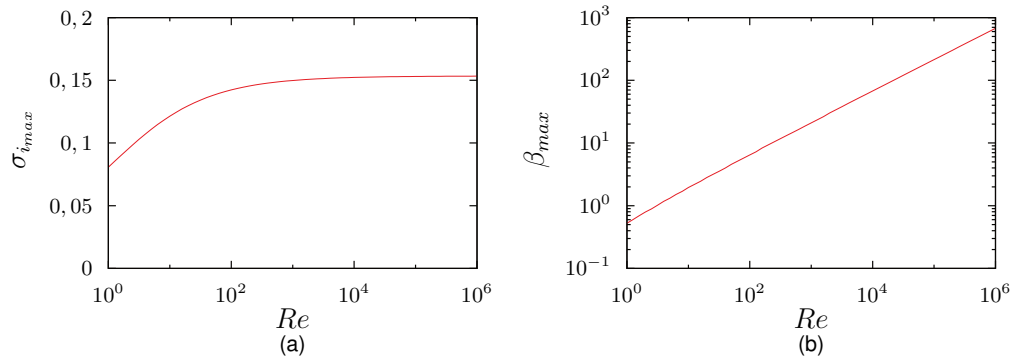


Figura 6.17. Taxas máximas de amplificação (a) e seus números de onda correspondentes (b) em função do número de Reynolds. Resultados para $R_\rho = 2$ e $\tau = 100$.

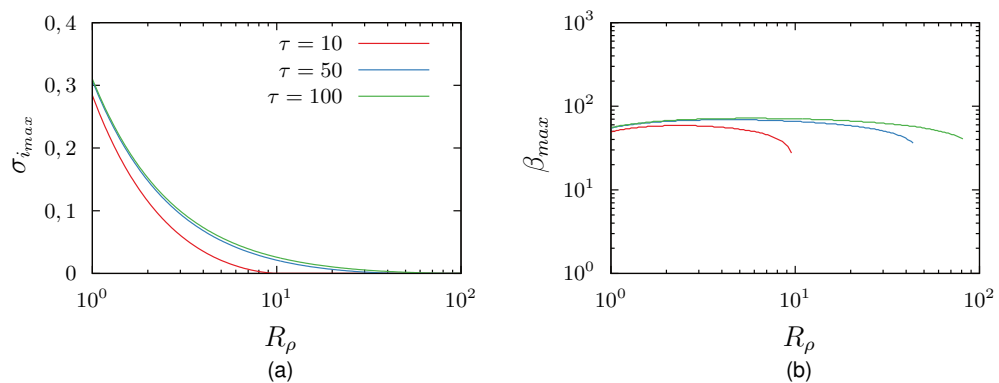


Figura 6.18. Taxas máximas de amplificação (a) e números de onda mais amplificados (b) em função da relações de densidades e difusividades. Resultados para $Re = 10^4$

densidades crítica. O número de onda transversal mais amplificado não tem grandes variações com esses dois parâmetros, desta forma pode-se concluir que o número de Reynolds é o principal parâmetro que regula o comprimento de onda desta instabilidade. A velocidade de fase não foi apresentada porque este é um modo não oscilatório, ou seja, possui frequência nula.

A Figura 6.19. apresenta a forma característica deste modo com o eixo x_3 em termos de comprimentos de onda transversais, onde as linhas pretas são isolinhas positivas e as linhas cinzas e pontilhadas são isolinhas negativas. Observa-se estruturas centradas em $x_2 = 0$, o campo de perturbação da componente longitudinal da velocidade (Figura 6.19.b) apresenta um cisalhamento na região de interface. Da mesma forma que o modo \mathcal{KH} , os campos de perturbação da concentração de sedimentos (Figura 6.19.c) e salinidade (Figura 6.19.d) possuem a mesma forma porém são defasados em meio comprimento de onda. gadfly julia

6.4.2. As instabilidades longitudinais ($\beta = 0$)

Quando são considerados apenas os números de onda longitudinais ($\beta = 0$), além do modo \mathcal{KH} um segundo modo causado por efeitos duplo-difusivos ganha

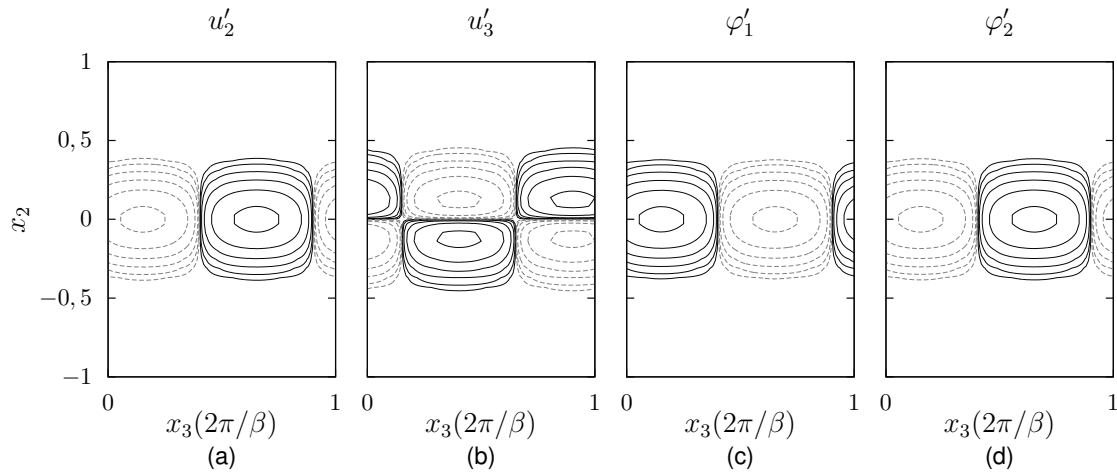


Figura 6.19. Campos de perturbação do modo *Salt Sheet* para velocidade vertical (a), velocidade longitudinal (b) concentração de sedimentos (c) e concentração salina (d). Resultados para $Re = 10^4$, $\tau = 100$ e $R_\rho = 2$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1.

importância. Este modo, denotado por *DDI* (duplo-difusivo longitudinal), tem como característica principal, entre outras, um número de onda com duas ou até três ordens de grandeza maior do que o típico 0,444 do modo *KH*. Esta diferença entre os números de onda dos dois modos justifica as discontinuidades na curva de número de onda mais amplificado, conforme pode ser observado no diagrama de estabilidade apresentado na Figura 6.20..

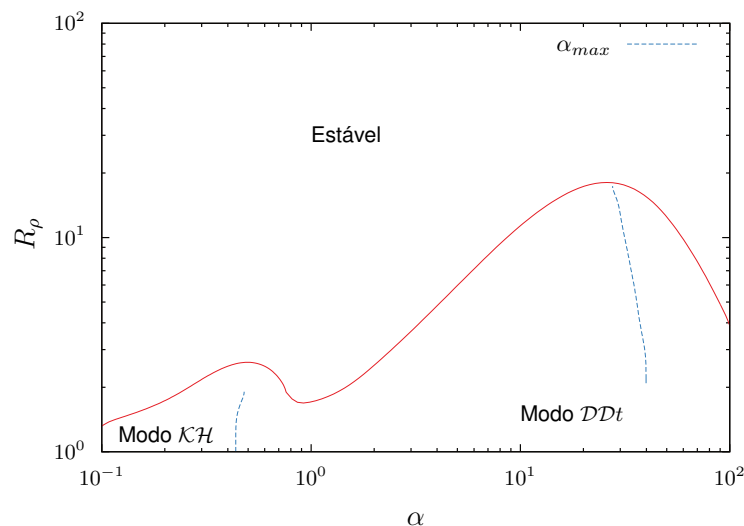


Figura 6.20. Fronteira de estabilidade e número de onda mais amplificado em função da relação de densidades e número de onda. Resultados para $Re = 7500$ e $\tau = 100$.

A Figura 6.21. apresenta as taxas máximas de amplificação, números de onda mais amplificados e o valor absoluto da velocidade de fase. As curvas de velocidade de fase estão em termos de valor absoluto porque para cada combinação de parâmetros existe uma curva positiva e outra negativa. Na coluna à esquerda os resultados com

$\tau = 10$ e na coluna à direita os resultados com $\tau = 100$. A partir destes resultados é possível observar que o modo *DDI* possui uma dependência com o número de Reynolds e também é um modo oscilatório (Figuras 6.21.e e 6.21.f) composto por um par de ondas de mesma intensidade que viajam em direções opostas. Conforme o crescimento do número de Reynolds ou da relação de difusividades este modo vai se tornando o modo mais amplificado para faixas de relação de densidades cada vez maiores (Figuras 6.21.c e 6.21.d).

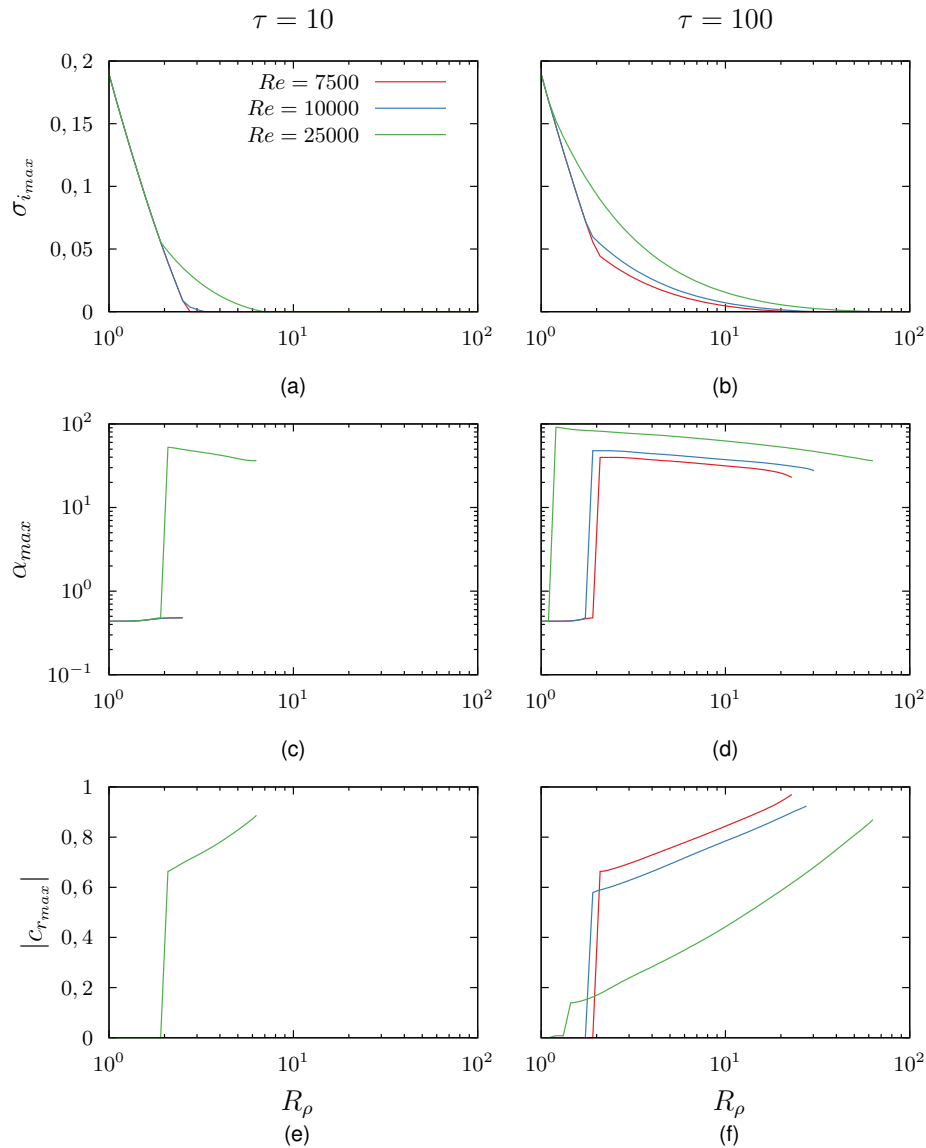


Figura 6.21. Taxas máximas de amplificação (a,b), seus números de onda correspondentes (c,d) e valor absoluto da velocidade de fase (e,f) em função da relação de densidade e número de Reynolds. Resultados para $\tau = 10$ (a,c,e), $\tau = 100$ (b,d,f), $Ri_2 = 0,4$ e $Sc_2 = 1$.

A Figura 6.22. apresenta os campos de perturbação do modo *DDI* da velocidade longitudinal, velocidade vertical, concentrações de sedimentos e salinidade. A linha inferior é uma aumento dos campos de perturbação com a finalidade de melhor observar

os campos de perturbação. Da mesma forma que na Figura 6.6., o eixo x_1 esta normalizado em função do comprimento de onda longitudinal e as linhas pretas são isolinhas positivas enquanto as linhas cinzas e pontilhadas são isolinhas negativas.

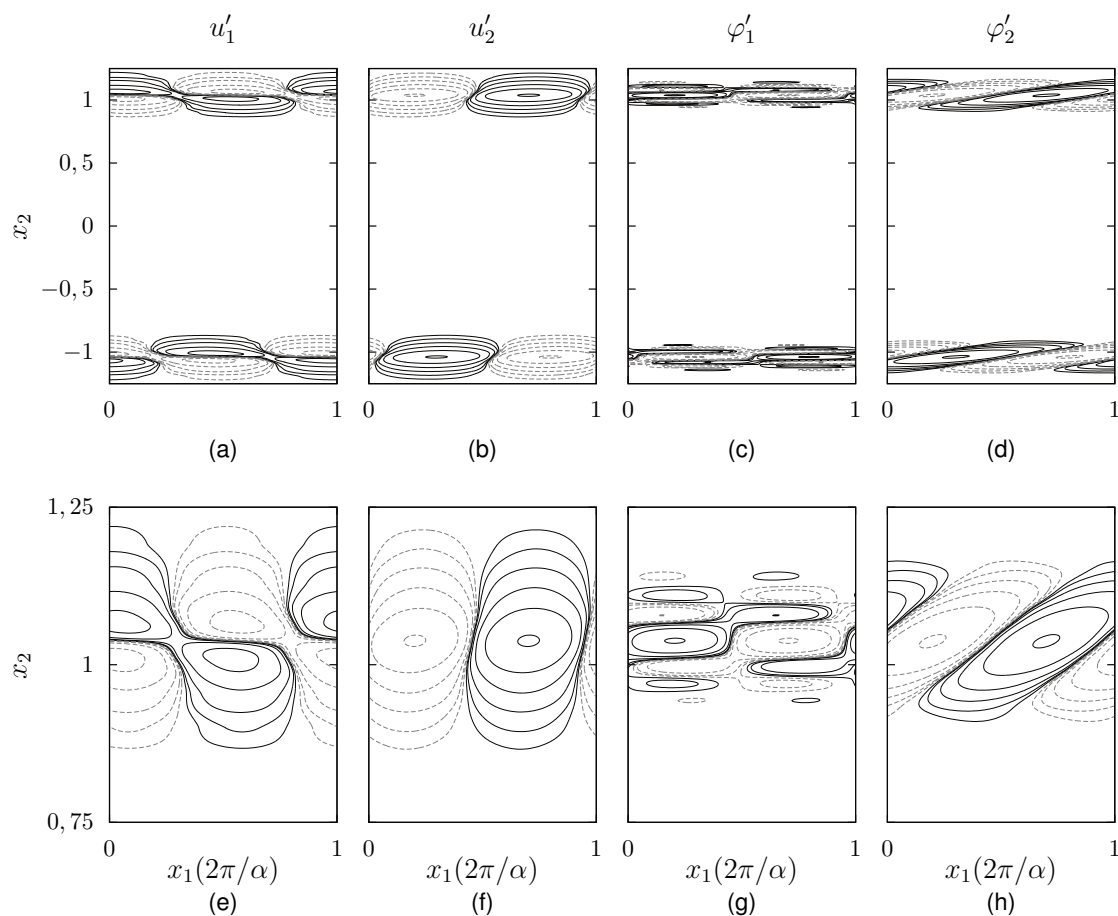


Figura 6.22. Campos de perturbação do modo DDI para velocidade transversal (a,e), velocidade vertical (b,f) concentração de sedimentos (c,g) e concentração salina (d,h). Resultados para $Re = 7500$, $\tau = 100$ e $R_\rho = 3$. Isolinhas em escala logarítmica entre 0,01 e 1.

Por ser composto por um par de ondas com mesma intensidade que viajam em direções opostas, este modo resulta em uma estrutura descentrada e anti-simétrica, que se forma próxima à região em que o gradiente do escoamento de base tende a ser nulo. Segundo Smyth e Kimura (2007), o modo DDI é uma instabilidade do tipo *fingering* que se torna oscilatória devido a interação de efeitos duplo-difusivos com o cisalhamento da camada de mistura.

6.4.3. Qual é o modo dominante?

Para esta finalidade, primeiramente foi considerado uma análise com variação do número de Reynolds e as relações de densidades e difusividades porém foi observado que para qualquer combinação destes parâmetros, o modo *Salt-sheets* ($\alpha = 0$) é sempre mais amplificado que o modo DDI . Como as taxas de amplificação dos modos

\mathcal{KH} e *Salt-sheets* não sofrem variações para números de Reynolds maiores do 10^4 , este parâmetro foi retirado da análise. Resultando em uma interface entre os modos e a região estável que é função apenas de R_ρ e τ , conforme a Figura 6.23..

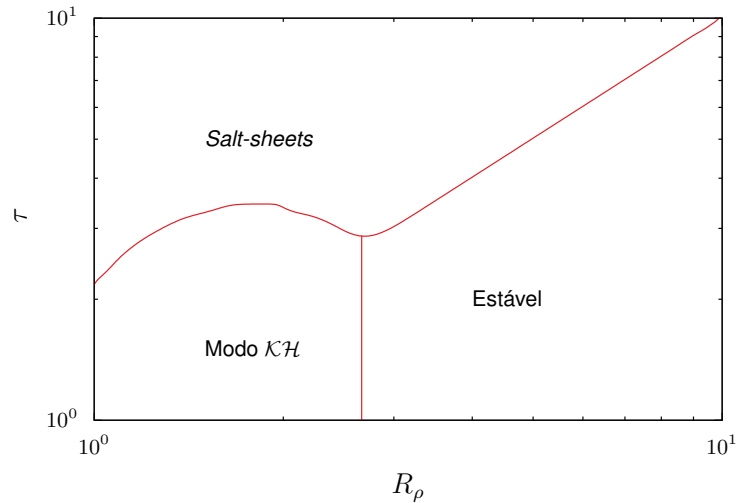


Figura 6.23. Interface entre os modos mais amplificados \mathcal{KH} e *Salt-sheets* em função das relações de densidades e difusividades. Resultados para $Re = 10^4$.

Nesta figura é possível observar que existe um valor mínimo da relação de densidades a partir do qual a dupla difusividade deve ser considerada que é de 2,176. Também observa-se que a interface entre os modos instáveis é uma função de R_ρ e τ e que a dupla difusividade tendem a desestabilizar o escoamento em condições em que normalmente seria estável, conforme dito em Kundu e Cohen (2010).

7. CONCLUSÕES

A teoria da estabilidade linear modal foi empregada ao longo deste estudo objetivando melhor compreender as instabilidades que se desenvolvem em correntes de densidade do tipo pluma hipopicnal. Resultados foram obtidos levando em consideração os efeitos da estratificação, efeitos de sedimentação e efeitos duplo-difusivos. Para esta finalidade, um código computacional baseado em operadores diferenciais de Chebyshev e algoritmo QZ foi desenvolvido e validado com o caso de camada de mistura homogênea.

A investigação consistiu em analisar a validade do *teorema de Squire*, as taxas máximas de amplificação, seus números de onda e velocidades de fase correspondentes, a identificação dos modos de instabilidade presentes em cada situação e a definição das condições sob as quais cada modo é o mais amplificado. O parecer geral das características citadas anteriormente de cada caso estudado estão apresentados a seguir.

7.1. Em relação à estratificação de densidade

Os resultados das análises neste caso permitiram verificar a validade do *teorema de Squire* e que os modos de instabilidade mais amplificados são os longitudinais. Da mesma forma que no caso de camada de mistura homogênea foi observado que os efeitos viscosos não tem grande influência no desenvolvimento de instabilidades deixando de alterar suas características a partir de um valor crítico de número de Reynolds que é de aproximadamente 1000. Isto quer dizer que a viscosidade tem um efeito estabilizante no escoamento.

Maiores concentrações salinas tendem a amortecer o escoamento, isso foi observado com o decréscimo dos valores críticos de relação de densidades em função do crescimento do número de Richardson da salinidade. O modo de instabilidade mais amplificado foi identificado como \mathcal{KH} apresentando variações de até 12,6% no seu comprimento de onda, em relação ao caso homogêneo, em função do aumento da relação de densidades.

7.2. Em relação à presença de partículas

A presença das partículas, caracterizada pela velocidade de queda modelada pela lei de Stokes, altera as características de convergência da solução obtida através do código computacional sendo necessário utilizar uma maior resolução. Da mesma forma que no caso anterior, o *teorema de Squire* é verificado, os modos de instabilidade mais amplificados são transversais. Também foi observado que os efeitos viscosos não tem grande influência no desenvolvimento de instabilidades conforme o tópico anterior.

Estes efeitos de sedimentação não alteram as taxas de amplificação e comprimentos de onda característicos do modo \mathcal{KH} porém causam uma deformação em sua amplitude e uma alteração na velocidade de fase proporcional à velocidade de queda das partículas. Tal transformação pode propiciar o escoamento a desenvolver instabilidades secundárias. Desta forma, torna-se necessário realizar um estudo mais detalhado de instabilidade secundária com a finalidade de melhor compreender este efeito que as partículas causam no modo \mathcal{KH} .

Também foi observado um outro modo de instabilidade que pode ser o modo mais amplificado para velocidades de queda maiores do que $2,24 \times 10^{-2}$. Esta instabilidade, denotada no presente estudo por SD , é caracterizada por um comprimento de onda até cinco vezes maior do que o modo \mathcal{KH} e velocidade de fase aproximadamente igual à -1 torna o escoamento incondicionalmente instável para velocidades de queda maiores do que $3,55 \times 10^{-2}$.

7.3. Em relação à dupla difusividade

A inclusão dos efeitos duplo-difusivos foi levada em consideração quando que o fluido com concentração salina possui menor número de Schmidt do que o fluido com concentração de sedimentos, ou seja, a relação de difusividades é sempre maior do que uma unidade. Neste caso foi observado uma situação bem diferenciada em relação aos casos anteriores, tais como a importância dos efeitos viscosos e a presença de instabilidades transversais mais amplificadas.

Durante as análises, três modos de instabilidade foram identificados: um modo longitudinal conhecido na literatura como *Salt-sheets*, o modo DDt e o modo \mathcal{KH} . Foi observado que o primeiro modo é sempre mais amplificado do que o segundo e que existe uma combinação das relações de densidades e difusividades para definir a fronteira entre o modo \mathcal{KH} e os *Salt-sheets*. Concluiu-se que o valor mínimo da relação de difusividades a partir do qual a dupla difusividade deve ser considerada é de 2,176.

8. PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS

A partir desta dissertação, alguns desdobramentos dos tópicos abordados são interessantes para futuras pesquisas. Podemos citar:

- Um estudo de instabilidades secundárias do modo \mathcal{KH} levando em consideração os efeitos de deposição das partículas;
- Análises que levem em consideração a variação das espessuras da camada de mistura e das quantidades escalares;
- Uma abordagem para a modelagem da velocidade de queda das partículas que leve em consideração a estratificação do fluido ambiente e quais as diferenças podem representar nas características de estabilidade;
- A inclusão de mais do que um tamanho de grão no escoamento, visto que um escoamento real pode apresentar muito mais tipos diferentes de partícula;
- Análises que levem em consideração a interação dos efeitos de deposição das partículas com a dupla difusividade.

Referências

- AMBIENTE, G. E. M. **Lama de barragem da Samarco chega ao mar no ES.** 2015. <<http://www.grengenhariaambiental.com.br/lama-de-barragem-da-samarco-chega-ao-mar-no-es/>>. Acessado: 18/01/2016.
- ANDERSON, E.; BAI, Z.; BISCHOF, C.; BLACKFORD, L. S.; DEMMEL, J.; DONGARRA, J. J.; CROZ, J. D.; HAMMARLING, S.; GREENBAUM, A.; MCKENNEY, A.; SORENSEN, D. **LAPACK Users' Guide (Third Ed.)**. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. ISBN 0-89871-447-8.
- BAGHERI, S.; S., H. D.; J., H.; J., S. P. Input-output analysis and control design applied to a linear model of spatially developing flows. **Applied Mechanics Reviews**, v. 62, 2009.
- BALTENSPERGER, R.; TRUMMER, M. R. Spectral differencing with a twist. **SIAM J. Sci. Comp.**, SIAM, v. 24, n. 5, p. 1465–1487, 2003.
- BERRUT, J.-P.; MITTELMANN, H. D. Adaptive point shifts in rational approximation with optimized denominator. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 164–165, n. 0, p. 81 – 92, 2004. ISSN 0377-0427.
- BETCHOV, R.; SZEWCZYK, A. Stability of a shear layer between parallel streams. **The physics of fluids**, v. 6, n. 10, p. 1391 – 1396, 1963.
- BEZANSON, J.; EDELMAN, A.; KARPINSKI, S.; SHAH, V. B. Julia: A fresh approach to numerical computing. November 2014.
- BURNS, P.; MEIBURG, E. Sediment-laden fresh water above salt water: linear stability analysis. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 691, p. 279–314, 1 2012. ISSN 1469-7645.
- BURNS, P.; MEIBURG, E. Sediment-laden fresh water above salt water: nonlinear simulations. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge Univ Press, v. 762, p. 156–195, 2015.
- CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A. **Spectral methods in fluid dynamics**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1988. (Springer series in computational physics). ISBN 9783540522058.

CRIENGLISH. **Storm Chaser Captures Stunning Cloud Formations**. 2016. <http://english.cri.cn/11354/2013/09/16/189s787799_3.htm>. Acessado: 18/01/2016.

DRAZIN, P.; REID, W. **Hydrodynamic Stability**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. (Cambridge Mathematical Library). ISBN 9780521525411.

Folha Vitória. **"Pluma" de lama atinge rio e se aproxima das praias de Aracruz**. 2015. <<http://www.folhavitória.com.br/geral/noticia/2015/12/pluma-de-lama-se-aproxima-das-praias-de-aracruz-confirma-prefeitura.html>>. Acessado: 18/01/2016.

FRANCISCO, E. P. **Modelagem matemática e simulação numérica direta de correntes de gravidade poli-dispersas**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Pucrs, Porto Alegre, Abril 2014.

GOLDSTEIN, S. On the stability of superposed streams of fluids of different densities. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, JSTOR, v. 132, n. 820, p. 524–548, 1931.

HAIGH, S. P.; LAWRENCE, G. A. Symmetric and nonsymmetric holmboe instabilities in an inviscid flow. **Physics of Fluids**, v. 11, p. 1459–1468, jun. 1999.

HAZEL, P. Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 51, p. 39–61, 1 1972. ISSN 1469-7645.

HENNIGER, R.; KLEISER, L. Temporal evolution, morphology, and settling of the sediment plume in a model estuary. **Physics of Fluids**, v. 24, 2012.

HENNIGER, R.; KLEISER, L.; MEIBURG, E. Direct numerical simulations of particle transport in a model estuary. **Journal of Turbulence**, v. 11, n. 39, 2010.

HOLMBOE, J. On the behavior of symmetric waves in stratified shear layers. **Geophysiske Publikasjoner**, v. 24, n. 67, 1962.

HORNER-DEVINE, A. R.; HETLAND, R. D.; MACDONALD, D. G. Mixing and transport in coastal river plumes. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 47, n. 1, p. 569–594, 2015.

HOWARD, L. N. Note on a paper of John W. Miles. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge Univ Press, v. 10, n. 04, p. 509–512, 1961.

HUPPERT, H. E. Gravity currents: a personal perspective. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 554, p. 299–322, 2006.

JULIEN, P. Y. **Erosion and sedimentation**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998.

JUNIPER, M. P.; HANIFI, A.; THEOFILIS, V. Modal stability theory. **Applied Mechanics Review**, v. 66, n. 2, p. 024804–, 2014.

KHAVASI, E.; FIROOZABADI, B.; AFSHIN, H. Linear analysis of the stability of particle-laden stratified shear layers. **Canadian Journal of Physics**, v. 92, n. 2, p. 103–115, 2014.

KUNDU, P.; COHEN, I. **Fluid Mechanics**. [S.l.]: Elsevier Science, 2010. ISBN 9780123814005.

LAWRENCE, G. A.; BROWAND, F. K.; REDEKOPP, L. G. The stability of a sheared density interface. **Phys. Fluids**, A 3, p. 2360–2370, 1991.

MARTINEZ, D. M. V. **Análise numérica de uma camada de mistura estavelmente estratificada**. Tese (Doutorado) — Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

MEIBURG, E.; KNELLER, B. Turbidity currents and their deposits. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 42, n. 1, p. 135–156, 2010.

MICHALKE, A. On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 19, p. 543–556, 8 1964. ISSN 1469-7645.

MILES, J. W. On the stability of heterogeneous shear flows. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge Univ Press, v. 10, n. 04, p. 496–508, 1961.

NEGRETTI, M.; SOCOLOFSKY, S.; JIRKA, G. Linear stability analysis of inclined two-layer stratified flows. **Physics of Fluids**, American Institute of Physics (AIP), v. 20, n. 9, p. 094104, 2008.

ORTIZ, S.; CHOMAZ, J.-M.; LOISELEUX, T. Spatial Holmboe instability. **Phys. Fluids**, v. 14, n. 8, p. 2585–2597, 2002.

SIMPSON, J. **Gravity Currents: In the Environment and the Laboratory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999. (In the Environment and the Laboratory). ISBN 9780521664011.

SMYTH, W. D.; KIMURA, S. Instability and diapycnal momentum transport in a double-diffusive, stratified shear layer. **Journal of physical oceanography**, v. 37, n. 6, p. 1551–1565, 2007.

SQUIRE, H. B. On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 142, n. 847, p. 621–628, 1933.

TAYLOR, G. I. Effect of variation in density on the stability of superposed streams of fluid. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, JSTOR, v. 132, n. 820, p. 499–523, 1931.

THEOFILIS, V. Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 39, 2003.

UNGARISH, M. **An introduction to gravity currents and intrusions**. [S.l.]: CRC PRESS, 2009.

WEIDEMAN, J. A.; REDDY, S. C. A matlab differentiation matrix suite. **ACM Trans. Math. Softw.**, ACM, New York, NY, USA, v. 26, n. 4, p. 465–519, dez. 2000. ISSN 0098-3500.

A. ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUÇÕES

Partindo das equações de Navier-Stokes, na forma dimensional, é demonstrada a sua homogeneidade dimensional, sendo o espaço, o tempo e a massa representados L , T e M respectivamente,

$$\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_k} = \tilde{\nu}_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k} - \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_j} + \tilde{g}_j \left(1 + \sum_{\ell=1}^2 \tilde{\gamma}_\ell \tilde{\varphi}_\ell \right), \quad (\text{A.1})$$

$$\left[\frac{L}{T^2} \right] + \left[\frac{L}{T} \right] \left[\frac{L}{T} \right] \left[\frac{1}{L} \right] = \left[\frac{L^2}{T} \right] \left[\frac{L}{T} \right] \left[\frac{1}{L^2} \right] - \left[\frac{L^3}{M} \right] \left[\frac{M}{LT^2} \right] \left[\frac{1}{L} \right] - \left[\frac{L}{T^2} \right] [L^3] \left[\frac{1}{L^3} \right] \quad (\text{A.2})$$

Realizando as devidas simplificações, ficam somente os termos de aceleração. A adimensionalização de cada termo da equação (A.1) é feita da seguinte forma:

- $u = \frac{2\tilde{u}}{\Delta\tilde{u}}$;
- $p = \frac{2\tilde{p}}{\tilde{\rho}_0 \Delta\tilde{u}^2}$;
- $t = \frac{\tilde{t} \Delta\tilde{u}}{\delta_u}$;
- $x = \frac{2\tilde{x}}{\delta_u}$;
- $\varphi_\ell = \frac{2\tilde{\varphi}_\ell}{\tilde{\varphi}_{\ell_{max}}}$, com $\ell = 1, 2$.

A substituição de cada termo da equação (A.1) pelas adimensionalizações acima, resulta em

$$\frac{\Delta\tilde{u}^2}{2\delta_u} \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) = \tilde{\nu}_0 \frac{2\Delta\tilde{u}}{\delta_u^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{\tilde{\rho}_0 \Delta\tilde{u}^2}{2\delta_u} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \tilde{g}_j + \sum_{\ell=1}^2 \tilde{g}_j \tilde{\gamma}_\ell \frac{\tilde{\varphi}_{\ell_{max}}}{2} \tilde{\varphi}_\ell. \quad (\text{A.3})$$

multiplicando (A.3) por $\frac{2\delta_u}{\Delta\tilde{u}^2}$ e substituindo $\tilde{g}'_\ell = \tilde{g}_j \tilde{\gamma}_\ell \frac{\tilde{\varphi}_{\ell_{max}}}{2}$, obtemos a equação

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{4\tilde{\nu}_0}{\Delta\tilde{u} \delta_u} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} + 2 \frac{\tilde{g}_j \delta_u}{\Delta\tilde{u}^2} + \sum_{\ell=1}^2 2 \frac{\tilde{g}'_\ell \delta_u}{\Delta\tilde{u}^2} \varphi_\ell e_j^g, \quad (\text{A.4})$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_j} + Ri_0 e_j^g + Ri_2 \left(\frac{1}{R_\rho} \varphi_1 + \varphi_2 \right) e_j^g. \quad (\text{A.5})$$

Utilizando o mesmo procedimento na equação de transporte escalar da concentração de partículas, primeiramente é demonstrada a homogeneidade dimensional

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{u}_j + \tilde{u}_s e_j^g) \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{x}_j} = \tilde{\kappa}_1 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j}, \quad (\text{A.6})$$

$$\left[\frac{1}{TL^3} \right] + \left[\frac{L}{T} \right] \left[\frac{1}{L^4} \right] = \left[\frac{L^2}{T} \right] \left[\frac{1}{L^5} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Realizando os devidos cancelamentos, ficam somente os termos de taxa de variação temporal da concentração. Substituindo cada termo da equação (A.6) pelas adimensionalizações utilizadas para as equações de Navier-Stokes

$$\frac{\Delta \tilde{u}}{2\delta_u} \tilde{\varphi}_{1max} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\Delta \tilde{u}}{2\delta_u} \tilde{\varphi}_{1max} (u_j + u_s e_j^g) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} = 2 \frac{\tilde{\kappa}_1}{\delta_u^2} \tilde{\varphi}_{1max} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (\text{A.8})$$

dividindo (A.8) por $\frac{2\delta_u}{\Delta \tilde{u} \tilde{\varphi}_{1max}}$ e multiplicando e divido o termo ao lado direito da igualdade por $\tilde{\nu}_0$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + (u_j + u_s e_j^g) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} = \frac{4\tilde{\nu}_0}{\Delta \tilde{u} \delta_u} \frac{\tilde{\kappa}_1}{\tilde{\nu}_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (\text{A.9})$$

podendo ser reescrita na forma

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + (u_j + u_s e_j^g) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} = \frac{1}{ReSc_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (\text{A.10})$$

A equação de transporte escalar da concentração salina difere da equação de transporte escalar da concentração de partículas apenas pelo termo $u_s e_j^g$ e por este motivo a sua adimensionalização não será apresentada.

B. LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

A partir das três etapas de linearização das equações governantes do problema, será demonstrado primeiramente o procedimento para as equações da quantidade de movimento e posteriormente para a equação de transporte escalar.

Na primeira etapa deve-se decompor as variáveis do escoamento em uma parte estacionária (escoamento de base) e outra transiente (perturbações) na forma

$$q_j(x_j, t) = \bar{q}_j(x_j) + q'_j(x_j, t), \quad (\text{B.1})$$

onde q_j é uma quantidade qualquer do escoamento. Aplicando esta decomposição nas equações da quantidade de movimento resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \frac{\partial u'_j}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial p'}{\partial x_j} \\ + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k} + Ri_0 e_j^g + \sum_{\ell=1}^2 Ri_\ell \bar{\varphi}_\ell e_j^g + \sum_{\ell=1}^2 Ri_\ell \varphi'_\ell e_j^g. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Posteriormente deve ser feita a subtração das equações para o escoamento de base

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k \partial x_k} + Ri_0 e_j^g + \sum_{\ell=1}^2 Ri_\ell \bar{\varphi}_\ell e_j^g \quad (\text{B.3})$$

com a equação resultante da decomposição (B.2). Esta subtração é possível porque o escoamento de base é uma solução da equação.

Esta etapa resulta em

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p'}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k} + \sum_{\ell=1}^2 Ri_\ell \varphi'_\ell e_j^g. \quad (\text{B.4})$$

Finalmente, por meio de análise de ordem de grandeza, descartamos os termos de produto entre perturbações. Desta forma obtendo a equações da quantidade de movimento linearizadas

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p'}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k} + \sum_{\ell=1}^2 Ri_\ell \varphi'_\ell e_j^g. \quad (\text{B.5})$$

De maneira análoga, é feito o mesmo procedimento para a equação de transporte escalar da concentração de partículas. Decomposição das variáveis do escoamento

conforme (B.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} + (\bar{u}_j + u_s e_j^g) \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial x_j} + (\bar{u}_j + u_s e_j^g) \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x_j} \\ + u'_j \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x_j} = \frac{1}{ReSc_1} \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x_j \partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (B.6)$$

Subtração da equação para escoamento laminar

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial t} + (\bar{u}_j + u_s e_j^g) \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial x_j} = \frac{1}{ReSc_1} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial x_j \partial x_j} \quad (B.7)$$

com (B.6), resultando em

$$\frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} + (\bar{u}_j + u_s e_j^g) \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x_j} = \frac{1}{ReSc_1} \frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (B.8)$$

E a eliminação dos termos de segunda ordem

$$\frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} + (\bar{u}_j + u_s e_j^g) \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial x_j} = \frac{1}{ReSc_1} \frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (B.9)$$

A equação de transporte escalar da concentração salina segue o mesmo procedimento que não será apresentado porque difere da equação de transporte escalar da concentração de partículas apenas pelo termo $u_s e_j^g$.