

## SÍNTESE ROBUSTA DE CONTROLADORES PARA ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÃO EM TURBINAS EÓLICAS

RAFAEL DA SILVEIRA CASTRO\*, AURÉLIO TERGOLINA SALTON\*, JEFERSON VIERA FLORES†

\**PUCRS - Grupo de Automação e Controle de Sistemas,  
Av. Ipiranga, 6681, 90619-900, Porto Alegre (RS), Brasil*

†*UFRGS - Departamento de Engenharia Elétrica,  
Av. Osvaldo Aranha, 103, 90035-190, Porto Alegre (RS), Brasil*

rafael.castro@acad.pucrs.br, aurelio.salton@pucrs.br, jeferson.flores@ufrgs.br

**Abstract**— This work presents a systematic robust control synthesis procedure for regulating the rotation and attenuating vibrations on a wind turbine. The system time varying model is considered as a linear system subjected to polytopic uncertainties and Linear Matrix Inequalities conditions are presented for designing a state-feedback law. Simulation results compare the proposed approach performance to traditional strategies, such as Proportional-Integral control and Coleman Transform based state-feedback.

**Keywords**— Wind Turbine, Robust Control, LMI, Polytopic Modeling

**Resumo**— Este trabalho apresenta uma metodologia sistemática para síntese robusta de controladores visando a regulação da rotação e atenuação de vibrações em turbinas eólicas. O modelo variante no tempo do sistema é reescrito como um sistema linear sujeito a incertezas politópicas e condições na forma de desigualdades matriciais lineares são apresentadas para a síntese de uma lei de realimentação de estados. Os resultados de simulação comparam o desempenho desta abordagem proposta em relação a estratégias tradicionais, como o controlador Proporcional-Integral e realimentação de estados baseada na Transformada de Coleman.

**Palavras-chave**— Turbina Eólica, Controle Robusto, LMI, Modelagem Politópica

### 1 Introdução

A energia do vento é atualmente considerada uma das mais promissoras fontes de energia renovável. Neste contexto destacam-se os sistemas de turbinas eólicas, com significativo aumento de utilização a cada ano em todo o mundo (Bianchi et al., 2006). Estes sistemas são formados por pás aerodinâmicas dispostas sobre um eixo rotacional montado sobre uma torre. O princípio de funcionamento consiste na conversão da energia cinética do vento em energia mecânica de rotação no eixo, para por fim realizar a conversão para energia elétrica.

Visando melhorar a eficiência na extração de energia das turbinas eólicas, existe uma tendência ao crescimento do comprimento das pás aerodinâmicas, onde algumas turbinas eólicas modernas podem apresentar pás com comprimentos de cerca de 70 m. Devido ao aumento no tamanho, estas estruturas estão cada vez mais flexíveis, exigindo assim a implementação de sistemas controle não só para obter eficiência energética, mas também para reduzir esforços mecânicos e vibrações (Houtzager, 2011).

Dentre as principais variáveis de controle de uma turbina eólica pode-se destacar o ângulo de inclinação das pás e o torque contrário do gerador. Quando a velocidade do vento é inferior ao valor nominal, o objetivo é obter a máxima extração de potência. Nesta região de operação é comum manter os ângulos das pás fixas e controlar o torque do gerador para obter a razão ótima entre a

rotação da turbina e a velocidade do vento. Já quando a velocidade do vento excede o valor nominal, o objetivo é limitar a potência produzida e mantê-la constante. Neste modo de operação é comum a atuação nos ângulos das pás para manter a rotação constante além de atenuar vibrações e esforços mecânicos estruturais.

Dentro do contexto dos controladores para os ângulos das pás encontra-se na literatura os controles coletivos (*Collective Pitch Control - CPC*) e os controles individuais para cada pá (*Individual Pitch Control - IPC*). Geralmente os controles *CPC* são utilizados para regular somente a rotação da turbina. É comum neste caso o uso de técnicas de única entrada e saída (*Single Input Single Output - SISO*) como os controladores Proporcional-Integrais-Derivativos (*PID*) (Van Engelen et al., 2001). Já os controles *IPC* são empregados também para regular o esforço mecânico da estrutura. Para projeto destes é mais comum o uso de técnicas modernas de múltiplas entradas e saídas (*Multiple Input Multiple Output - MIMO*) como exemplo o regulador quadrático linear (*Linear Quadratic Regulator - LQR*) (Selvam et al., 2009; Nourdine et al., 2010) e o controle preditivo baseado em modelo (*Model Predictive Control - MPC*) (Friis et al., 2011).

Um desafio inerente a modelagem dinâmica de turbinas eólicas é o fato das pás estarem sempre em movimento. Assim, ao linearizar as equações dinâmicas de uma turbina eólica obtém-se um modelo periodicamente variante no tempo, com período correspondente a uma revolução do rotor.

Para contornar este problema é amplamente utilizada a Transformada de Coleman (Bir, 2008), que consiste remapear as variáveis das pás para novas variáveis fictícias referenciadas em relação ao eixo de rotação da turbina, o que torna o sistema invariante no tempo. Ao implementar o sistema controle deve-se realizar a Transformada de Coleman inversa para extrair os sinais de controle reais a partir dos fictícios.

O presente trabalho considera uma forma alternativa à Transformada Coleman para realizar o projeto de um controle de realimentação de estados *IPC*. A metodologia que será apresentada consiste na utilização direta do modelo periodicamente variante no tempo, onde os termos variantes serão tratados como incertezas politópicas. A síntese considerada é baseada em desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities - LMI*) para permitir o uso do modelo politópico (Boyd et al., 1994). A vantagem desta alternativa é tornar implementação da lei de controle direta, eliminando necessidade do cálculo da Transformada de Coleman inversa a cada amostra do controlador.

Este artigo está organizado da seguinte maneira. A Seção 2 contempla a modelagem dinâmica de uma turbina eólica e obtenção de um modelo linear incerto no espaço de estados. A Seção 3 apresenta a metodologia considerada para o projeto do sistema de controle. A Seção 4 apresenta resultados de simulação e discussões a respeito. Já a Seção 5 trás as considerações finais e propostas para trabalhos futuros.

**Notação:** A *i*-ésima componente de um vetor  $x$  é representada por  $x_i$ .  $\bar{x}$  denota o valor da variável  $x$  no ponto de equilíbrio do sistema.  $A'$  representa a matriz  $A$  transposta.  $0_{n \times m}$  e  $I_{n \times m}$  denotam respectivamente uma matriz com zeros e uma matriz identidade com  $n$  linhas e  $m$  colunas.  $\text{diag}\{A, B\}$  denota uma matriz diagonal com os termos  $A$  e  $B$ .  $\text{Co}\{x, y\}$  representa um conjunto convexo obtido a partir dos vértices  $x$  e  $y$ . O símbolo  $\star$  denota elementos simétricos em uma matriz, isto é:  $\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \star & C \end{bmatrix}$ .

## 2 Modelagem do Sistema

Esta seção apresenta a modelagem dinâmica de uma turbina eólica, onde será considerada tanto as características aerodinâmicas como as características mecânicas. Também será realizada a representação do modelo no espaço de estados e será apresentada uma abordagem para o tratamento da variabilidade periódica do modelo.

A modelagem será conduzida para uma turbina eólica de eixo horizontal com três pás individualmente controláveis e torre fixa ao solo. Serão assumidos três graus de liberdade para o sistema: a rotação do eixo principal da turbina e os movi-

mentos de deflexão lateral e frontal da torre. As pás e caixa de transmissão entre o eixo do rotor e gerador serão consideradas rígidas.

A lista de símbolos a seguir apresenta as variáveis<sup>1</sup> e constantes relevantes para a modelagem do sistema. A Figura 1 representa graficamente as principais variáveis do sistema.

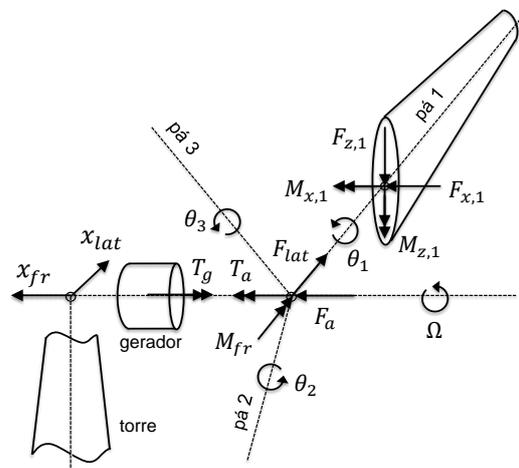


Figura 1: Esquemático da turbina eólica (Selvam et al., 2009).

### Variáveis:

- $\theta_i$  : ângulo de inclinação da *i*-ésima pá.
- $\psi_i$  : azimute (posição angular) da *i*-ésima pá.
- $v_i$  : vento absoluto incidente na *i*-ésima pá.
- $v_{r,i}$  : vento relativo incidente na *i*-ésima pá.
- $v_{fr,i}$  : velocidade frontal da *i*-ésima pá.
- $M_{d,i}$  : momento na direção  $d$  da *i*-ésima pá.
- $F_{d,i}$  : força na direção  $d$  da *i*-ésima pá.
- $\Omega$  : velocidade angular rotação do rotor.
- $x_{fr}$  : deflexão linear frontal da torre.
- $x_{lat}$  : deflexão linear lateral da torre.
- $\phi_{fr}$  : deflexão angular frontal da torre.
- $F_a$  : empuxo aerodinâmico.
- $T_a$  : torque aerodinâmico.
- $M_{fr}$  : momento tensor frontal.
- $F_{lat}$  : força tensora lateral.
- $P_g$  : potência do gerador.
- $T_g$  : torque contrário do gerador.

### Constantes:

- $l_p$  : comprimento das pás.
- $h_t$  : altura da torre.
- $n_g$  : relação de engrenagens do gerador.
- $J_g$  : inércia total do rotor e gerador
- $h_{M_z} \cdots k_{F_z}$  : parâmetros aerodinâmicos.
- $m_t$  : massa equivalente da torre.
- $s_t$  : coeficiente elástico da torre.
- $d_t$  : coeficiente de amortecimento da torre.

<sup>1</sup>A dependência temporal será omitida nas variáveis para simplificar a notação.

### 2.1 Modelo Aerodinâmico Linear

A modelagem aerodinâmica consiste em determinar as forças e momentos produzidos na  $i$ -ésima pá de acordo seu ângulo de inclinação  $\theta_i$  e a velocidade de seu vento relativo incidente  $v_{r_i}$ .

O vento relativo  $v_{r_i}$  na  $i$ -ésima pá pode ser modelado da seguinte forma:

$$v_{r_i} = v_i - v_{fr_i} . \quad (1)$$

A velocidade frontal de cada pá  $v_{fr_i}$  é a soma da velocidade frontal da torre  $\dot{x}_{fr}$  com uma parcela proveniente da deflexão angular frontal  $\dot{\phi}_{fr}$  do topo da torre. Assumindo que o vento atua em um único ponto efetivo em cada pá (localizado a  $\frac{3}{4} l_p$ ) pode-se expressar  $v_{fr_i}$  como:

$$v_{fr_i} = \dot{x}_{fr} - \text{sen}(\psi_i) \frac{3}{4} l_p \dot{\phi}_{fr} . \quad (2)$$

Considerando a torre um barra prismática, pode-se ainda representar deflexão angular frontal  $\dot{\phi}_{fr}$  do topo da torre em termos de deflexão linear frontal  $x_{fr}$  utilizando a seguinte aproximação:

$$h_t \dot{\phi}_{fa} = \frac{3}{2} x_{fr} . \quad (3)$$

Aplicando as equações (3) e (2) em (1) pode-se expressar o vento relativo de cada pá  $v_{r_i}$  da seguinte maneira:

$$v_{r_i} = v_i + \left( \text{sen}(\psi_i) \frac{9}{8} \frac{l_p}{h_t} - 1 \right) \dot{x}_{fr} .$$

Pode-se então determinar os momentos  $M_{x,i}$ ,  $M_{z,i}$  e as forças  $F_{x,i}$ ,  $F_{z,i}$  para a  $i$ -ésima pá utilizando o seguinte mapeamento linear:

$$\begin{bmatrix} M_{z,i} \\ F_{x,i} \\ M_{x,i} \\ F_{z,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{M_z} & k_{M_z} \\ h_{F_x} & k_{F_x} \\ h_{M_x} & k_{M_x} \\ h_{F_z} & k_{F_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{r_i} \\ \theta_i \end{bmatrix} .$$

Os coeficientes  $h_{M_z} \dots k_{F_z}$  são determinados pela linearização de relações aerodinâmicas na região de operação da turbina eólica (Selvam et al., 2009; Markou et al., 2006). Utilizando este procedimento, a referência ou origem para cada variável do sistema passa a ser o ponto em que foi linearizada.

A partir dos momentos e forças de cada pá pode-se encontrar os momentos e forças resultantes no eixo principal com a relação:

$$\begin{bmatrix} T_a \\ F_a \\ F_{lat} \\ M_{fr} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} M_{x,i} \\ F_{x,i} \\ -F_{z,i} \text{sen}(\psi_i) \\ -M_{z,i} \text{sen}(\psi_i) \end{bmatrix} .$$

### 2.2 Modelo Mecânico Linear

Os graus de liberdade estruturais considerados para modelagem mecânica são: a rotação principal do rotor  $\Omega$ , a deflexão linear frontal da torre  $x_{fr}$  e a deflexão linear lateral da torre  $x_{lat}$ .

A variação na velocidade de rotação da turbina  $\Omega$  é influenciada pelo torque aerodinâmico  $T_a$  e pelo torque contrário do gerador  $T_g$  pela relação:

$$J_g \dot{\Omega} = T_a - T_g .$$

Assumindo que a turbina opera em condições de vento acima do nominal, a potência gerada deve ser mantida constante. Então,  $T_g$  deve ser comandado com a seguinte lei:

$$T_g = k_g \Omega .$$

O ganho estático  $k_g$  é determinado por linearização no ponto de operação da turbina, resultando na expressão:

$$k_g = -\frac{\bar{P}_g}{n_g \bar{\Omega}^2} .$$

A dinâmica de deflexão da torre pode ser representada por dois sistemas massa-mola-amortecedor: um para o movimento frontal e outro para o movimento lateral.

A deflexão frontal da torre é influenciada pelo empuxo aerodinâmico  $F_a$  e pelo momento tensor frontal  $M_{fr}$  de acordo com a equação:

$$m_t \ddot{x}_{fr} + d_t \dot{x}_{fr} + s_t x_{fr} = F_a - \frac{3}{2h_t} M_{fr} .$$

Da forma similar, a dinâmica de deflexão lateral da torre é influenciada pela força tensora lateral  $F_{lat}$  e pelo torque contrário do gerador  $T_g$  segundo a relação:

$$m_t \ddot{x}_{lat} + d_t \dot{x}_{lat} + s_t x_{lat} = F_{lat} + \frac{3}{2h_t} T_g .$$

### 2.3 Modelo no Espaço de Estados

Para a posterior realização do projeto de controle, o sistema será tratado na forma

$$\dot{x} = A x + B(\psi) u + B_d(\psi) d , \quad (4)$$

onde  $x$  é o vetor de estados,  $u$  o vetor de entradas de controle e  $d$  o vetor de entradas de distúrbio.

Para o sistema da turbina eólica, pode-se definir o vetor de estados como  $x = [\Omega \ x_{fr} \ \dot{x}_{fr} \ x_{lat} \ \dot{x}_{lat}]' \in \mathbb{R}^5$ , as entradas de controle como os ângulos das pás  $u = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]' \in \mathbb{R}^3$  e as entradas de distúrbio como os ventos incidentes em cada pá  $d = [v_1 \ v_2 \ v_3]' \in \mathbb{R}^3$ . Vale ressaltar que cada estado e entrada são valores relativos ao ponto de operação da turbina, conforme mencionado anteriormente.

Organizando as equações apresentadas nas Subseções 2.1 e 2.2 no formato apresentado em (4) segue que:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{k_g}{J_g} & 0 & -\frac{3}{J_g} h_{M_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{s_t}{m_t} & a_{3,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{5,1} & 0 & a_{5,3} & -\frac{s_t}{m_t} & -\frac{d_t}{m_t} \end{bmatrix} ,$$

$$a_{3,3} = \frac{81}{32} \frac{h_{Mz}}{h_t^2} \frac{l_p}{m_t} - 3 \frac{h_{Fx}}{m_t} - \frac{d_t}{m_t} ,$$

$$a_{5,1} = \frac{3}{2} \frac{k_g}{h_t m_t} ,$$

$$a_{5,3} = -\frac{27}{16} \frac{h_{Fz}}{h_t} \frac{l_p}{m_t} ,$$

$$B(\psi) = \begin{bmatrix} \frac{k_{Mx}}{J_g} & \frac{k_{Mx}}{J_g} & \frac{k_{Mx}}{J_g} \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{5,1} & b_{5,2} & b_{5,3} \end{bmatrix} ,$$

$$b_{3,i} = \frac{k_{Fx}}{m_t} + \frac{3}{2} \frac{k_{Mz}}{h_t m_t} \text{sen}(\psi_i) ,$$

$$b_{5,i} = -\frac{k_{Fz}}{m_t} \text{sen}(\psi_i) ,$$

$$B_d(\psi) = \begin{bmatrix} \frac{h_{Mx}}{J_g} & \frac{h_{Mx}}{J_g} & \frac{h_{Mx}}{J_g} \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{d3,1} & b_{d3,2} & b_{d3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{d5,1} & b_{d5,2} & b_{d5,3} \end{bmatrix} ,$$

$$b_{d3,i} = \frac{h_{Fx}}{m_t} + \frac{3}{2} \frac{h_{Mz}}{h_t m_t} \text{sen}(\psi_i) ,$$

$$b_{d5,i} = -\frac{h_{Fz}}{m_t} \text{sen}(\psi_i) .$$

Note que ambos os termos  $B(\psi)$  e  $B_d(\psi)$  são dependentes dos azimutes  $\psi_i$  de cada pá. Portanto, este sistema é dito linear periodicamente variante no tempo. O período do sistema representa o tempo para o rotor efetuar uma rotação completa.

Para tratar desta característica do sistema será apresentado em seguida duas metodologias distintas: a abordagem clássica com a aplicação da Transformada de Coleman e a abordagem alternativa utilizando modelagem incerta política.

#### 2.4 Transformada de Coleman

A Transformada de Coleman (Bir, 2008) consiste no remapeamento das variáveis ligadas às pás das da turbina, originalmente em referenciais móveis, para novas variáveis fictícias com referência fixa. Isto significa remapear as entradas reais  $u$  e  $d$ , que apresentam efeito periodicamente variável no sistema para novas entradas transformadas  $u^{cm}$  e  $d^{cm}$  que apresentam efeito invariante no tempo. Este procedimento é descrito por:  $u^{cm} = \Phi(\psi) u$ ,  $d^{cm} = \Phi(\psi) d$ , onde  $\Phi(\psi)$  é definida conforme:

$$\Phi(\psi) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 \text{sen}(\psi_1) & 2 \text{sen}(\psi_2) & 2 \text{sen}(\psi_3) \\ 2 \text{cos}(\psi_1) & 2 \text{cos}(\psi_2) & 2 \text{cos}(\psi_3) \end{bmatrix} .$$

Note que a primeira linha de  $\Phi(\psi)$  extrai a componente média do vetor original, a segunda linha extrai a componente cíclica senoidal e a terceira linha extrai a componente cíclica cossenooidal.

Com a Transformada de Coleman é possível reescrever a representação no espaço de estados do sistema, conforme (4), substituindo  $u$  e  $d$  por  $\Phi(\psi)^{-1} u^{cm}$  e  $\Phi(\psi)^{-1} d^{cm}$ , respectivamente. Definindo  $B^{cm} = B(\psi)\Phi(\psi)^{-1}$  e  $B_d^{cm} = B_d(\psi)\Phi(\psi)^{-1}$  chega-se finalmente a uma representação linear invariante no tempo.

Utilizando esta abordagem é possível projetar uma lei de controle para a entrada  $u^{cm}$  utilizando os termos invariantes transformados  $B^{cm}$  e  $B_d^{cm}$ . Note que para a implementação, a entrada de controle real deve ser extraída a cada amostra do sistema utilizando a expressão  $u = \Phi(\psi)^{-1} u^{cm}$ .

#### 2.5 Modelagem Política

Para o sistema da turbina eólica, conforme apresentado na Subseção 2.3, identifica-se os seguintes termos variantes no tempo:  $\text{sen}(\psi_1)$ ,  $\text{sen}(\psi_2)$  e  $\text{sen}(\psi_3)$ . Para simplificar, pode-se considerar que o azimute da primeira pá  $\psi_1$  é igual ao azimute absoluto do rotor  $\psi_0$  e que as pás estão espaçadas em  $120^\circ$ , isto é:  $\psi_1 = \psi_0$ ,  $\psi_2 = \psi_0 + 120^\circ$  e  $\psi_3 = \psi_0 + 240^\circ$ . Então, pela identidade trigonométrica  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha) \text{cos}(\beta) + \text{cos}(\alpha) \text{sen}(\beta)$  é possível reescrever os termos variantes destacados em função de  $\text{sen}(\psi_0)$  e  $\text{cos}(\psi_0)$ .

Dada as simplificações mencionadas, pode-se representar o sistema em função de um vetor de incertezas  $\delta = [\delta_1 \ \delta_2] = [\text{sen}(\psi_0) \ \text{cos}(\psi_0)]$  conforme:

$$\dot{x} = A x + B(\delta) u + B_d(\delta) d .$$

Os termos variantes  $B(\delta)$  e  $B_d(\delta)$  são construídos a partir das definições originais  $B(\psi)$  e  $B_d(\psi)$  realizando as substituições indicadas:

$$\text{sen}(\psi_1) = \delta_1 ,$$

$$\text{sen}(\psi_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta_2 - \frac{1}{2} \delta_1 ,$$

$$\text{sen}(\psi_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \delta_2 - \frac{1}{2} \delta_1 .$$

Sabendo que  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são funções senoidais de amplitude unitária, define-se que  $\delta$  pertence a um politopo<sup>2</sup>  $\mathcal{P}_\delta$  conforme a seguinte relação:

$$\delta \in \mathcal{P}_\delta = \{\delta_i : -1 < \delta_i < 1, i = 1, 2\} .$$

Note que politopo  $\mathcal{P}_\delta$  pode também ser definido pela seguinte combinação convexa:

$$\mathcal{P}_\delta = \text{Co}\{ \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \} ,$$

tal que os vértices  $\nu_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) são:

$$\nu_1 = [-1 \ -1] , \quad \nu_2 = [ 1 \ -1] ,$$

$$\nu_3 = [-1 \ 1] , \quad \nu_4 = [ 1 \ 1] .$$

<sup>2</sup>Politopo é um conjunto convexo e fechado representado por uma combinação convexa de vértices.

Então, é possível representar as classes de matrizes  $B(\delta)$  e  $B_d(\delta)$  com incertezas na forma politópica utilizando os seguintes conjuntos convexos e fechados  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}_d$ :

$$\mathcal{B} = \{B : B = \sum_{i=1}^4 B_i h_i, \sum_{i=1}^4 h_i = 1, h_i \geq 0\},$$

$$\mathcal{B}_d = \{B_d : B_d = \sum_{i=1}^4 B_{di} h_i, \sum_{i=1}^4 h_i = 1, h_i \geq 0\}.$$

Os termos  $B_i$  e  $B_{di}$  são as respectivas matrizes  $B(\delta)$  e  $B_d(\delta)$  construídas em cada vértice  $\nu_i$  do politopo de incerteza  $\mathcal{P}_\delta$ , isto é:

$$B_i = B(\delta) \Big|_{\delta=\nu_i}, \quad B_{di} = B_d(\delta) \Big|_{\delta=\nu_i},$$

para  $i = 1, \dots, 4$ .

Uma propriedade importante dos modelos politópicos é a convexidade dos conjuntos resultantes. Assim, ao garantir a estabilidade do sistema em malha fechada para cada um dos vértices, garante-se que o sistema é estável para qualquer ponto no interior de  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}_d$  (Boyd et al., 1994).

### 3 Projeto do Controlador

Esta seção apresenta uma metodologia para o projeto de um controlador baseado em uma realimentação de estados. Primeiramente será tratada a adição de um integrador na malha de controle. Posteriormente, será discutida a síntese robusta através de desigualdades matriciais lineares.

#### 3.1 Adição do Integrador na Malha de Controle

Um requisito básico para o sistema de controle da turbina eólica é regular a velocidade do rotor  $\Omega$  no valor nominal. Visando eliminar o erro em regime permanente desta variável e rejeitar componentes constantes no sinal de distúrbio deve-se adicionar ao laço de controle um integrador na forma:

$$\dot{x}_c = r - y,$$

onde  $x_c$  é o estado do controlador,  $y$  a variável controlada e  $r$  a referência para variável controlada. A variável controlada  $y$  pode ainda ser expressa em função dos estados da planta segundo  $y = C x$ .

Para o presente caso, a variável integrada  $y$  é rotação  $\Omega$ , portanto o termo  $C$  é definido como  $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ . A referência  $r$  será assumida sempre igual a zero, valor que representa a rotação de operação nominal  $\bar{\Omega}$  da turbina eólica.

Para representar a conexão do integrador na malha de controle pode-se realizar a representação aumentada do sistema. Este procedimento é realizado pela definição de um vetor de estados aumentado  $x_A = [x \ x_c]'$  que combina os estados da planta  $x$  e do controlador  $x_c$ . Realizando

manipulações algébricas, pode-se escrever a dinâmica do sistema aumentado na forma

$$\dot{x}_A = \mathbf{A} x_A + \mathbf{B}(\delta) u + \mathbf{B}_d(\delta) d,$$

onde os termos aumentados  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}(\delta)$  e  $\mathbf{B}_d(\delta)$  são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{5 \times 1} \\ -C & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\delta) = \begin{bmatrix} B(\delta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_d(\delta) = \begin{bmatrix} B_d(\delta) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note que as classes de matrizes  $\mathbf{B}(\delta)$  e  $\mathbf{B}_d(\delta)$  também podem ser representadas com incertezas na forma politópica, conforme abordado na Subseção 2.5. Os termos  $\mathbf{B}_i$  e  $\mathbf{B}_{di}$  que representam as matrizes  $\mathbf{B}(\delta)$  e  $\mathbf{B}_d(\delta)$  construídas em cada vértice  $\nu_i$  do politopo de incerteza são:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{di} = \begin{bmatrix} B_{di} \\ 0 \end{bmatrix},$$

para  $i = 1, \dots, 4$ .

Para controlar o sistema propõe-se a utilização da seguinte lei de controle:

$$u = K x + K_c x_c = \mathbf{K} x_A.$$

Observe que o vetor de ganhos  $\mathbf{K} = [K \ K_c] \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  contém os ganhos de realimentação da planta  $K \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$  e os ganhos de realimentação do controlador  $K_c \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ .

#### 3.2 Síntese Robusta

Para sintetizar a matriz de ganhos  $\mathbf{K}$  de forma a garantir estabilidade e desempenho robusto é proposta a utilização de *LMIs*. A abordagem considerada consiste em garantir a estabilidade assintótica para o sistema além de minimizar a energia dos estados e entradas de controle do sistema.

Visto que o sistema é linear, a estabilidade entrada-estado do sistema implica também na estabilidade da entrada-saída do sistema (*Bounded Input Bounded Output - BIBO*). Portanto, pode-se desconsiderar a presença da entrada de distúrbio  $d$  no sistema sem perda de generalidade (Salton et al., 2013). Com base nesta observação, é suficiente efetuar a prova de estabilidade para a seguinte representação do sistema em malha fechada:

$$\dot{x}_A = (\mathbf{A} + \mathbf{B}(\delta) \mathbf{K}) x_A. \quad (5)$$

Para formular o critério de desempenho define-se uma função custo  $\mathcal{J}(x_A, u)$  que penaliza a energia dos estados do sistema  $x_A$  e das entradas de controle  $u$  segundo a expressão:

$$\mathcal{J}(x_A, u) = \int_0^{\infty} (x_A' Q x_A + u' R u) dt. \quad (6)$$

Os termos  $Q$  e  $R$  são construídos conforme:

$$Q = \text{diag}\{q_1, \dots, q_6\}, \quad R = \text{diag}\{r_1, \dots, r_3\},$$

tal que  $q_1 \dots q_6$  representam penalidades na energia de cada estado do sistema e  $r_1 \dots r_3$  representam penalidades na energia de cada entrada de controle do sistema.

Considerando os critérios apresentados, é proposta a utilização do Teorema 1 para efetuar a síntese robusta do termo  $\mathbf{K}$ . A prova deste teorema não será apresentada pois é conhecida na literatura (Boyd et al., 1994).

**Teorema 1** *Se existir uma matriz simétrica definida positiva  $F \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ , uma matriz  $G \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$  e um escalar positivo  $\lambda$  tal que a LMI*

$$\begin{bmatrix} \Gamma_i(F, G) & F & G' \\ * & \lambda Q^{-1} & 0_{6 \times 4} \\ * & * & \lambda R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

$$\Gamma_i(F, G) = \mathbf{A}F + \mathbf{B}_i G + F\mathbf{A}' + G'\mathbf{B}_i'$$

seja satisfeita para  $i = 1, \dots, 4$ , então o sistema em malha fechada (5) com  $\mathbf{K} = G F^{-1}$  é assintoticamente estável e a função custo (6) satisfaz

$$\mathcal{J}(x_A, u) < \lambda x_A(0)' F^{-1} x_A(0).$$

De acordo com o Teorema 1, para minimizar  $\mathcal{J}(x_A, u)$  e garantir estabilidade robusta para o sistema deve-se solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\underset{F, G}{\text{minimizar}} \lambda \quad \text{sujeito a (7)}.$$

## 4 Resultados Numéricos

Esta seção apresenta a avaliação de resultados, por meio de simulações, das metodologias de controle para turbinas eólicas propostas neste artigo. É comparado o desempenho de um controle de realimentação estados projetado com a modelagem politópica em relação a um controle projetado pela abordagem clássica, com o uso da Transformada de Coleman. Ambos controladores também são comparados com um controlador  $PI$  de rotação, sem regulagem de esforço mecânico ou vibração.

### 4.1 Configuração das Simulações

A Tabela 1 apresenta os parâmetros considerados para o modelo da turbina eólica, conforme utilizado por Selvam et al. (2009). A região de linearização considerada para obtenção do parâmetros aerodinâmicos  $h_{M_z} \dots k_{F_z}$  consiste em uma rotação nominal  $\bar{\Omega} = 1,806$  rad/s, potência do gerador  $\bar{P}_g = 2,5$  MW, velocidades médias do vento

$\bar{v}_i = 16$  m/s e ângulo das pás  $\bar{\theta}_i = 10^\circ$ . Será assumido também que a turbina eólica opera na região de velocidade do vento acima do nominal, onde o objetivo de controle consiste em regular a rotação para o valor nominal e reduzir vibrações e esforço mecânico.

Tabela 1: Parâmetros do modelo da turbina eólica (Selvam et al., 2009).

Parâmetro	Valor
$J_g$	$1,1255 \cdot 10^7$ kgm <sup>2</sup>
$m_t$	$1,5657 \cdot 10^5$ kg
$d_t$	$2,7995 \cdot 10^3$ Ns/m
$s_t$	$1,2350 \cdot 10^6$ N/m
$h_t$	55,953 m
$l_p$	40 m
$h_{M_z}$	$-1,8948 \cdot 10^5$ Ns
$k_{M_z}$	$9,2670 \cdot 10^6$ Nm
$h_{F_x}$	$7,2019 \cdot 10^3$ Ns/m
$k_{F_x}$	$-3,5224 \cdot 10^5$ N
$h_{M_x}$	$8,3804 \cdot 10^4$ Ns
$k_{M_x}$	$-2,1607 \cdot 10^6$ Nm
$h_{F_z}$	$4,0683 \cdot 10^3$ Ns/m
$k_{F_z}$	$-1,0489 \cdot 10^5$ N
$n_g$	500

As simulações foram realizadas no *software MATLAB/Simulink* utilizando modelo linear periódico variável da turbina eólica apresentado na Subseção 2.3. As simulações foram executadas por um tempo total de 60 s. Foram testadas três diferentes arquiteturas de controle para o sistema:

- (a) Controle Proporcional-Integral ( $PI$ ) para regular somente a rotação do rotor;
- (b) Controle de realimentação de estados para redução de vibração (com integrador para regular a rotação) utilizando a Transformada de Coleman;
- (c) Controle de realimentação de estados para redução de vibração (com integrador para regular a rotação) utilizando a modelagem politópica para o projeto.

A estratégia de controle (c) apresenta uma lei de controle  $u = \mathbf{K} x_A$ . Para determinar  $\mathbf{K}$  foi utilizada a modelagem incerta politópica conforme a Subseção 2.5 e a metodologia de síntese robusta descrita na Subseção 3.2. As matrizes de penalidades utilizadas são:  $Q = \text{diag}\{10, 1, 1, 1, 1, 10\}$  e  $R = I_{3 \times 3}$ . A formulação  $LMI$  foi resolvida numericamente utilizando o pacote *LMI Lab* do *software MATLAB*, resultando nos seguintes ganhos de realimentação:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 51,2093 & 51,2093 & 51,2093 \\ 16,6032 & 16,6032 & 16,6032 \\ 0,6427 & 0,6427 & 0,6427 \\ -15,3176 & -15,3176 & -15,3176 \\ -0,5440 & -0,5440 & -0,5440 \\ -29,3471 & -29,3471 & -29,3471 \end{bmatrix}'.$$

A estratégia de controle (b), que utiliza a Transformada de Coleman, apresenta uma lei de controle  $u = \Phi(\psi)^{-1}u^{cm}$ , onde  $u^{cm} = \mathbf{K}^{cm} x_A$ . Para sintetizar o termo  $\mathbf{K}^{cm}$  foi empregada a mesma metodologia de síntese robusta, porém com o modelo transformado invariante no tempo. As penalidades consideradas neste caso são  $Q = \text{diag}\{10, 1, 1, 1, 1, 10\}$  e  $R = \text{diag}\{1, 100, 100\}$ . A matriz de ganhos resultantes da solução da formulação *LMI* é

$$\mathbf{K}^{cm} = \begin{bmatrix} 21,1078 & 0,0438 & 0 \\ 7,3325 & 0,0045 & 0 \\ 0,7063 & -0,0068 & 0 \\ -3,6580 & -0,0077 & 0 \\ -0,3056 & -0,1433 & 0 \\ -12,0569 & -0,0307 & 0 \end{bmatrix}'$$

Note que a terceira linha do termo  $\mathbf{K}^{cm}$  resultante é nula pois  $u_3^{cm}$  (componente cíclica cossenoidal) não apresenta influência nos estados sistema.

Já estratégia (a), que consiste em um controle *PI*, apresenta uma lei de controle  $u_i = k_P \Omega + k_I \int \Omega dt$  para todas as pás  $i$ . Os ganhos utilizados são  $k_P = 4,5808$  e  $k_I = 3,1623$ . Estes valores foram obtidos pela mesma metodologia de síntese robusta, porém utilizando um modelo reduzido que representa somente a dinâmica de rotação da turbina.

A seleção das penalidades para sintonia de cada controlador foi otimizada tendo em vista a obtenção de um balanço adequado entre performance dinâmica e amplitude do sinal de controle.

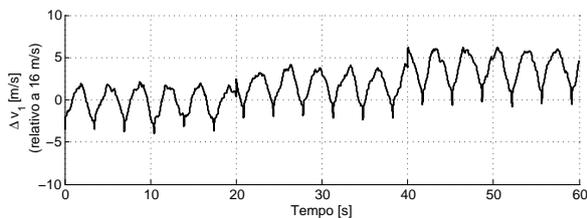


Figura 2: Variação simulada na velocidade do vento para a primeira pá.

Para construir os sinais de velocidade do vento para cada pá foi considerado os efeitos de cisalhamento pelo solo e sombra da torre, conforme Houtzager (2011). A variação na componente média da velocidade do vento foi assumida como um sinal escada, com um acréscimo de 2 m/s a cada 20 s. A turbulência e demais efeitos não-periódicos do vento foram representados como um ruído branco com amplitude de 3 m/s e média nula. Este ruído também foi filtrado por um filtro de segunda ordem com frequência de corte em 1 Hz, pois na prática o vento é naturalmente filtrado pelas pás da turbina (Markou et al., 2006). A Figura 2 apresenta o sinal de distúrbio do vento considerado para a primeira pá do sistema.

## 4.2 Análise dos Resultados de Simulação

Os gráficos subsequentes apresentam os resultados de simulação para cada estratégia de controle implementada. A linha preta refere-se ao controle (a), a linha vermelha refere-se ao controle (b) e a linha azul refere-se a (c).

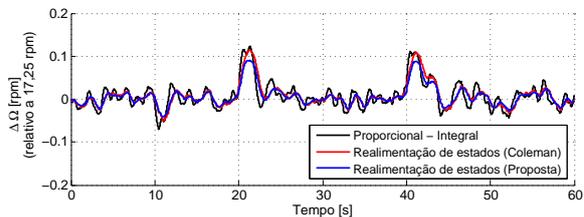


Figura 3: Variação da velocidade do rotor da turbina eólica.

A Figura 3 compara a regulação da velocidade de rotação principal da turbina. Pode-se observar um desempenho muito semelhante para os três controladores testados. Nota-se também o efeito do elemento integrador, presente em todas as estratégias, durante os instantes 20 s e 40 s, onde a componente média do distúrbio é incrementada. Observa-se que todos os controles estão rejeitando níveis constantes do distúrbio quanto a regulação da rotação.

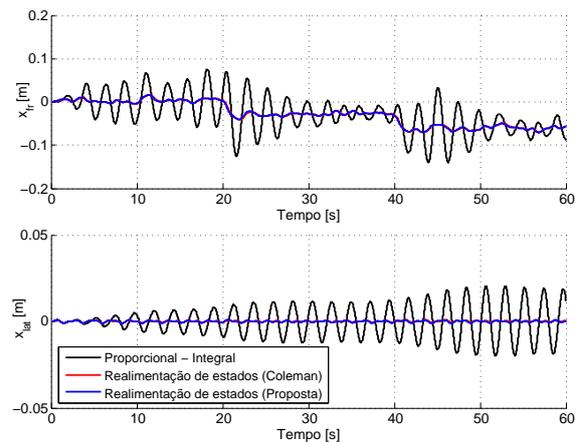


Figura 4: Deflexões frontal e lateral da torre da turbina eólica.

Na Figura 4 pode-se analisar as deflexões frontal e lateral da torre que sustenta a turbina eólica. Verifica-se que o controle *PI* (a) apresenta demasiada oscilação na frequência natural mecânica do sistema, dado que esta estratégia preocupa-se apenas com a regulação da rotação da turbina. Já ambas as estratégias de realimentação de estados (b) e (c) conseguem promover uma significativa redução na vibração da torre, visto que estas foram projetadas para minimizar também a energia dos estados mecânicos do sistema. Observa-se também um desempenho praticamente idêntico entre o controle de realimentação proposto (c) e o controle que utiliza a transformada de Coleman (b).

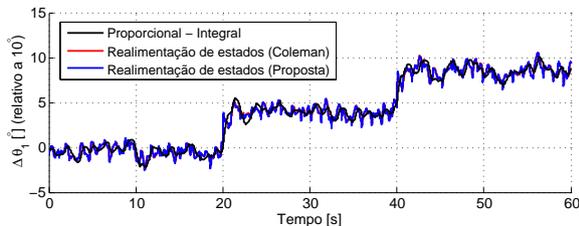


Figura 5: Ângulo de inclinação comandado na primeira pá da turbina eólica.

Por fim, na Figura 5 pode-se analisar o primeiro sinal de controle do sistema que representa o ângulo de inclinação comandado para a primeira pá. Nota-se em todos os controladores testados que o ângulo de trabalho médio das pás altera-se conforme a mudança na velocidade média do vento. Verifica-se que o controle *PI* (a) apresenta um sinal de controle mais suave em relação aos demais controlares (b) e (c), já que não considera o objetivo de atenuação da vibração da torre. Observa-se também que as estratégias de realimentação de estados (b) e (c) apresentam sinais de controle muito semelhantes, com uma amplitude de  $\pm 2^\circ$  em torno do nível médio de trabalho.

## 5 Conclusões

Este estudo apresentou metodologias para modelagem de uma turbina eólica e síntese robusta de controladores para regulação de rotação e atenuação de vibração. Para tratar da variabilidade periódica do modelo do sistema foi considerada uma representação com incertezas politópicas, diferentemente da abordagem tradicional que considera a Transformada de Coleman para obter uma representação linear invariante no tempo.

A principal vantagem da metodologia proposta em relação ao uso da Transformada de Coleman é simplificar a implementação da lei de controle, eliminando o cálculo de funções trigonométricas em tempo real além de não necessitar o sensoriamento da posição angular do rotor da turbina. Além disto, os resultados numéricos de simulação apresentados demonstram desempenho praticamente igual entre estas diferentes abordagens.

Para continuidade deste estudo propõe-se considerar o objetivo adicional de redução do esforço mecânico nas pás da turbina eólica. Neste contexto, é proposta a utilização de metodologias de Controle Ressonante e Repetitivo para rejeitar o efeito das componentes periódicas dos sinais de distúrbio nos momentos tensores das pás.

## Referências

Bianchi, F. D., Battista, H. and Mantz, R. J. (2006). *Wind Turbine Control Systems: Principles, Modelling and Gain Scheduling*

*Design*, Advances in Industrial Control, Springer.

Bir, G. (2008). Multi-blade coordinate transformation and its application to wind turbine analysis, *In Proceedings of the 2008 ASME Wind Energy Symposium*, Reno, Nevada, USA.

Boyd, S., Ghaoul, L. E., Feron, E. and Balakrishnan (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics.

Friis, J., Nielsen, E., Bonding, J., Adegas, F., Stoustrup, J. and Odgaard, P. (2011). Repetitive model predictive approach to individual pitch control of wind turbines, *In Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, pp. 3664–3670.

Henriksen, L. C. (2007). *Model predictive control of a wind turbine*, Master's thesis, Technical University of Denmark, Informatics and Mathematical Modelling, Lyngby, Denmark.

Houtzager, I. (2011). *Towards Data-Driven Control for Modern Wind Turbines*, PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, Netherlands.

Markou, H., Buhl, T. and Tud, B. M. (2006). Morphological study of aeroelastic control concepts for wind turbines, *ECN Report*.

Nourdine, S., Camblong, H., Vechiu, I. and Tapia, G. (2010). Comparison of wind turbine lqg controllers using individual pitch control to alleviate fatigue loads, *In Proceedings of the 18th Mediterranean Conference on Control Automation (MED)*, pp. 1591–1596.

Salton, A., Flores, J., Pereira, L. and Coutinho, D. (2013). A resonant-repetitive control scheme applied to uninterruptible power supplies (ups), *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* **24**(3): 253–262.

Selvam, K., Kanev, S., van Wingerden, J. W., van Engelen, T. and Verhaegen, M. (2009). Feedback-feedforward individual pitch control for wind turbine load reduction, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **19**(1): 72–91.

Van Engelen, T. G., Van der Hooft, E. L. and Schaak, P. (2001). *Development of wind turbine control algorithms for industrial use*, Netherlands Energy Research Foundation.