PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PAULO IORQUE FREITAS DE OLIVEIRA

A ESTATÍSTICA E A PROBABILIDADE NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, sob orientação do Professor Dr. Lorí Viali.

Porto Alegre,
2006

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PAULO IORQUE FREITAS DE OLIVEIRA

A ESTATÍSTICA E A PROBABILIDADE NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre

Aprovada em:

Banca examinadora

Professor Dr. Lorí Viali
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

Professor Dr.Carlos Eduardo Cunha Pinent
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

Professor Dr. João Feliz Duarte de Moraes
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

RESUMO

Este estudo apresenta-se como a análise qualitativa e quantitativa dos conteúdos de Probabilidade e Estatística de uma amostra de livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio, editados entre 1992 e 2005. A importância da pesquisa decorre da discussão de uma visão curricular na qual o livro didático constitui-se como um recurso fundamental, tanto para os alunos que o utilizam, quanto para os professores que, na maioria das vezes, o tomam como base para sua atuação docente. A percepção de que Probabilidade e Estatística são temas que não recebem tratamento relevante nos livros didáticos do Ensino Médio, apesar de sua aplicabilidade no dia-a-dia dos estudantes e de permitirem fácil relacionamento com outras disciplinas, define o foco desta investigação e faz a análise convergir para os conceitos, propriedades e atividades propostas pelos livros didáticos da amostra, com relação aos conteúdos de Probabilidade e Estatística apresentados nesses livros. Na análise, evidencia-se que os livros didáticos dão pouco destaque aos conteúdos de Probabilidade e Estatística, além de alguns deles apresentarem conceitos equivocados, falta de contextualização dos temas e desconsideração da possibilidade de se usarem os recursos da calculadora e da Informática na resolução de problemas, indo de desencontro às Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+).

Palavras-chave: Matemática; Probabilidade; Estatística; Ensino Médio; Parâmetros Curriculares Nacionais.

ABSTRACT

This study was a qualitative and quantitative analysis of the Probability and statistics subjects of a sample of mathematics textbooks for secondary schools published from 1992 to 2005. The importance of this study stemmed from discussion of a curricular view in which the textbook is a fundamental resource for both students and teachers, who often take it as the basis for their teaching practices. Probability and statistics seem to be topics that do not receive in-depth coverage in secondary school textbooks, in spite of their applicability in students' everyday life and of their easy association with other study subjects. Such perception defined the focus of this investigation and directed the analysis towards the concepts, properties and activities proposed for the study of probability and statistics in the textbooks under analysis. Results revealed that textbooks did not emphasize probability and statistics contents, and that some of them contained unclear concepts and poor content contextualization. Moreover, the possibilities of use of calculators and computers in the solution of problems was not explored in the textbooks analyzed, which goes against the Complementary Educational Guidelines established by the Brazilian National Curricular Parameters (Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+).

Key-words: Mathematics; Probability; Statistics; secondary schools; Brazilian National Curricular Parameter

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9

2 METODOLOGIA 14

2.1 Problema de pesquisa 14

2.2 Questão de pesquisa 15

2.3 Objetivos 15

2.3.1 Objetivo geral 15

2.3.2 Objetivos específicos 15

2.4 Constituição da amostra 16

3 PROBABILIDADE 25

3.1 Introdução 25

3.2 Conceitos básicos 27

3.2.1 Experimento aleatório 27

3.2.2 Espaço amostral e evento 29

a) Espaço amostral 29

b) Evento 30

3.2.3 Conceitos de Probabilidade 31

a) Conceito clássico 31

b) Probabilidade como freqüência relativa 37

c) Conceito axiomático de Probabilidade 38

3.2.4 Regras de Probabilidade 39

3.2.5 Probabilidade Condicionada 39

3.2.6 Dependência e independência 42

3.2.7 Outros conteúdos 46

3.2.8 Diversidade de exercícios 47

a) Experimento aleatório, espaço amostral e evento 49

b) Conceito de Probabilidade 50

c) Probabilidade como freqüência relativa 52

d) Probabilidade Condicionada, eventos independentes e dependentes 52

e) Distribuição binomial 54

3.3 Relação com os PCN+ 54

4 ESTATÍSTICA 60

4.1 Introdução 60

4.2 Conceitos básicos 62

4.2.1 Organização dos dados 63

4.2.2 Apresentação tabular 67

4.2.3 Apresentação gráfica 69

4.2.4 Interpretação e análise de tabelas e gráficos 74

4.2.5 Medidas de posição ou de tendência central 75

4.2.6 Medidas de dispersão ou variabilidade 79

4.2.7 Diversidade de exercícios 81

4.3 Relação com os PCN+ 83

5 CONCLUSÃO 87

REFERÊNCIAS 94

ANEXO A 97

ANEXO B 99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Tempo de magistério dos professores 17

Tabela 2 - Grau de instrução dos professores... 18

Tabela 3 - Conhecimento dos professores em relação aos PCN+ 18

Tabela 4 - Número de professores que já trabalhou com os PCN+ 19

Tabela 5 - Número de professores que abordam o conteúdo de
Probabilidade e Estatística 19

Tabela 6 – Livros didáticos adotados por professores do município de Porto Alegre .. 21

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Relação de Livros Adotados por Professores de Matemática do Ensino Médio 20

Quadro 2 - Lista dos Livros que compõe a amostra... 22

INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é analisar conteúdos de Probabilidade e Estatística propostos em uma amostra de livros didáticos de Matemática para Ensino Médio, publicados entre 1992 e 2005, tomando como referência as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), o qual objetiva facilitar a organização do trabalho da escola tanto nas disciplinas da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias quanto em outras áreas de conhecimento.

Uma das grandes competências propostas pelos PCN+ está relacionada com a contextualização sócio-cultural, ou seja, procurar aproximar o aluno da realidade que o cerca de modo que ele possa interagir com essa realidade.

De acordo com o PCN+ Ensino Médio (2002, p.9)

> Num mundo como o atual, de tão rápidas transformações e de tão difíceis contradições, estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa:
>
> . saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir;
>
> . enfrentar problemas de diferentes naturezas;
>
> . participar socialmente, de forma prática e solidária;
>
> . ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e,
>
> . especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado.

Na atualidade, autores brasileiros e de outros países defendem que o ensino desses conteúdos deve ser introduzido já nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental e ser continuado até o Ensino Médio.

Segundo Ponte, Matos e Abrantes (1998, p. 170),

> As reformas levadas a cabo nos últimos anos pela generalidade dos paises tiveram também efeitos nos temas a abordar pelos currículos escolares, podendo-se dizer que a Estatística e as probabilidades são dos mais recentes a serem introduzidos, sobretudo ao nível do ensino básico. No entanto, veremos que são tópicos que têm vindo a ganhar uma maior visibilidade nos currículos de Matemática, acompanhando a sua crescente utilização nos mais diversos setores das sociedades ocidentais.

Como o livro didático constitui o principal recurso utilizado pelos docentes do Ensino Médio, deve ser objeto de análise e discussão por parte de alunos e professores; deve ser tratado criticamente, para que se evidenciem tanto suas qualidades quanto suas limitações.

> O livro didático brasileiro, ainda hoje, é uma das principais formas de documentação e consulta empregados por professores e alunos. Nessa condição, ele às vezes termina por influenciar o trabalho pedagógico e o cotidiano da sala de aula. (BRASIL, 2003-a).

A formação de um estudante, nos dias de hoje, além de propiciar-lhe o domínio do conhecimento matemático específico, que garanta uma sólida formação em Matemática, deve ser também capaz de contribuir para a formação do ser humano, por meio do desenvolvimento de uma boa comunicação e capacidade de argumentação. Uma formação desse tipo exigirá do professor e da escola uma reflexão sobre projeto pedagógico, de modo que o professor possa conduzir com clareza a aprendizagem nesse novo Ensino Médio.

A Probabilidade e a Estatística, por apresentarem uma variedade de problemas relacionados com o cotidiano dos alunos, proporciona um grande desafio à imaginação, permitindo a exploração de técnicas organizadas de resolução, capazes de estimular o raciocínio dos alunos.

O tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construindo estratégias de resolução e argumentação, relacionando diferentes tipos de conhecimentos a situações reais e sentidos, o que vem ao encontro das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+).

Os temas estruturadores do ensino da Matemática têm como objetivos, entre outros, explorar conteúdos que envolvam diferentes formas de pensar em Matemática e diferentes contextos para as aplicações dos conhecimentos matemáticos. Entre os temas constam as razões históricas que deram origem e importância a esses conhecimentos e aparecem as noções de Probabilidade e Estatística.

A unidade temática relacionada com a Probabilidade trata da noção do acaso e suas propriedades. Essa unidade pode propor ao aluno uma reflexão mais crítica na abordagem de certos temas.

A unidade temática relacionada com a Estatística trata de técnicas gráficas e numéricas que nos permitem fazer uma análise inicial de dados disponíveis, construir tabelas de freqüências e representá-las por meio de diagramas de barras, histogramas e polígono de freqüências, além de analisar dados por meio de medidas estatísticas.

Esses conteúdos são relevantes no Ensino Médio porque se relacionam facilmente com temas de outras disciplinas e permitem a abordagem de questões relacionadas ao cotidiano dos alunos. Deveriam, então, receber tanta atenção quanto recebem os demais conteúdos, mas acabam sendo subestimados pelos livros didáticos, deixados pelos professores para o final do ano letivo e, muitas vezes, sequer são abordados em aula.

No contexto da educação brasileira, o livro didático pode ser considerado um elemento determinante para a construção do conhecimento. Por essa razão, é necessário que haja muito cuidado na escolha dos conteúdos, na definição da didática das lições e para que a organização dos livros dê igual realce aos temas selecionados, de modo que alguns não fiquem prejudicados em favor de outros. Os livros didáticos devem contemplar uma abordagem adequada em se tratando de resolução de problemas e de contextualização de conteúdos, viabilizando a interdisciplinaridade. Além disso, os temas devem ser atuais e considerados adequados para o exercício da cidadania e para a inclusão do estudante no mercado de trabalho.

Segundo Sandrin, Puorto e Nardi (2004, p. 174),

> Investigações criteriosas pioneiras das décadas de 1980 e 1990 constataram a existência de problema de ordem conceitual e metodológica nos LD, desrespeito às diferentes etnias, gêneros, classes sociais e descuido com a integridade física do aluno, entre outras. Muitos desses trabalhos não receberam a consideração merecida e, a indústria livreira dominou o mercado por décadas, determinando a sua estrutura e utilização. Apesar da existência do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) implementado a partir do decreto 9.154/1985, o panorama começou a modificar-se com o auxilio de decisões políticas.

O livro didático deve preparar o aluno para tarefas relevantes na sociedade, libertando-se do paradigma do ensino tradicional, visando a um ensino mais moderno. A Probabilidade e a Estatística, como unidades incluídas e adequadamente apresentadas no livro didático, podem desempenhar um papel essencial na educação para a cidadania, uma vez que propiciam a realização de projetos e contribuem na investigação que preveja coleta, apresentação, análise de dados, enfim, podem favorecer a tomada de decisões.

Segundo Carneiro (2000, p.100),

> No caso da escola, esta tarefa parece merecer nova avaliação, os conteúdos dos programas de ensino devem estar voltados para habilidades e aptidões e não, como tradicionalmente tem sido, para a aquisição de informações ou mesmo de conhecimentos descolados de contextos dinâmicos da vida.

A fim de se discutir essa questão, no capítulo 2 deste estudo, apresenta-se o problema de investigação com as questões de pesquisa, os objetivos e a metodologia. Nos capítulos 3 e 4, é relatado o estudo dos livros didáticos, objeto desta pesquisa. Nesses capítulos, faz-se a análise dos conceitos apresentados pelos livros, tanto no que tange ao conteúdo de Probabilidade, quanto no que se refere ao de Estatística. Apresenta-se também a forma como as atividades são desenvolvidas pelos mesmos e procede-se a um estudo comparativo, por meio do qual se procura determinar se esses livros didáticos estão abordando o assunto de acordo com as propostas do PCN+. Para facilitar a depreensão do que é oriundo dos livros didáticos, optou-se por apresentar os trechos de compilação com margem distinta e tamanho de fonte menor que os usados nos trechos de análise. Como são trechos extensos, optou-se por não reproduzi-los na forma de citação direta, o que foi reservado para a reprodução do discurso das fontes teóricas. No capítulo 5, expõem-se as conclusões do estudo.

2 METODOLOGIA

Esta pesquisa foi motivada pela preocupação diante de questões relacionadas com a exploração dos conteúdos de Probabilidade e de Estatística proposta nos livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio, cujo objetivo deveria estar focalizado na preparação dos alunos para tarefas relevantes da sociedade.

Segundo o PCN+ (2002, p.118)

> Nos dias de hoje, deve-se reconhecer e acompanhar o desenvolvimento tecnológico, tomando contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento para se posicionar frente às questões de nossa atualidade. Utilizar o conhecimento matemático como apoio para compreender e julgar as aplicações tecnológicas dos diferentes campos científicos.

A maioria dos livros, entretanto, está impregnada de regras e fórmulas que levam o aluno a desperdiçar tempo com cálculos passíveis de serem realizados em segundos por meio de calculadoras ou computadores, o que, na maioria das vezes, não é estimulado, em desconsideração à proposta do PCN+.

A partir dessa constatação, definem-se o problema e a questão desta pesquisa.

2.1 Problema de pesquisa

Como os livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio estão apresentando os conteúdos de Probabilidade e Estatística?

2.2 Questão de pesquisa

A abordagem proposta pelos livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio está de acordo com as orientações do PCN+?

Em função do problema e da questão de pesquisa, foram delineados os objetivos geral e específicos a seguir indicados.

2.3 Objetivos

2.3.1 Objetivo geral

Analisar a forma como os livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio abordam os conteúdos de Estatística e de Probabilidade e verificar se a abordagem proposta está de acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN+.

2.3.2 Objetivos Específicos

a) Investigar como os livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio abordam os conteúdos de Probabilidade e verificar se a abordagem proposta está de acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN+;

b) investigar como os livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio abordam os conteúdos de Estatística e verificar se a abordagem proposta está de acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN+.

2.4 Constituição da amostra

A amostra objeto da investigação foi formada por livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio, editados a partir de 1992. Os dez livros mais adotados pelos professores de Matemática do Ensino Médio entrevistados foram submetidos à análise, por meio de um estudo qualitativo e quantitativo da apresentação e das atividades propostas para o desenvolvimento dos conteúdos de Probabilidade e Estatística. Na definição dos livros didáticos que constituíram a amostra levou-se em conta a opinião de professores de Matemática em exercício no Ensino Médio, a fim de que fossem selecionados livros que os professores efetivamente estejam utilizando, evitando-se analisar livros que, embora disponíveis no mercado, não estejam sendo adotados pelos professores.

Os professores que compõem a amostra exercem suas atividades no Ensino Médio em escolas municipais, estaduais e privadas do município de Porto Alegre. A maioria dos professores tem ampla experiência docente e se mostrou interessada em colaborar com a pesquisa.

Os dados foram coletados por meio de um questionário (anexo A), que foi respondido por 48 professores. Os professores que responderam ao questionário exercem suas atividades em escolas centrais e em diversos bairros do município. As escolas, nas quais os professores exercem suas atividades estão listadas no Anexo B.

Esse questionário tem como objetivo levantar dados sobre o perfil desses professores e destacar a importância que atribuem ao desenvolvimento de conteúdos relacionados com Probabilidade e Estatística no Ensino Médio. Os dados evidenciados pelo questionário são apresentados nas tabelas a seguir.

A tabela 1 mostra o tempo de magistério dos professores.

Tabela 1 – Tempo de magistério dos professores
Porto Alegre – 2005

Tempo de magistério (anos)	Número de professores
0 ----| 5	07
5 ---| 10	05
10 ----| 15	17
15 ----| 20	10
20 ----| 25	05
mais de 25	04
Total	48

De acordo com os dados da tabela anterior, constatamos um tempo médio de magistério de 13,8 anos, com desvio padrão de 7,0 anos.

A tabela 2 apresenta o grau de instrução dos professores que responderam ao questionário.

Tabela 2 – Grau de instrução dos professores

Porto Alegre – 2005

Grau de Instrução	Número de professores	**%**
Graduação	30	62,5
Especialização	12	25,0
Mestrado	6	12,5
Total	48	100,0

Os dados da tabela 3 mostram o conhecimento dos professores em relação ao PCN+.

Tabela 3 – Conhecimento dos professores em relação aos PCN+

Porto Alegre - 2005

Conhece o PCN+	Número de Professores	%
Sim	31	64,6
Não	17	35,4
Total	48	100,0

Baseada na tabela anterior, foi construída a seguinte tabela, que apresenta o número de professores que já trabalhou com os PCN+.

Tabela 4 – Número de professores que já trabalhou com os PCN+
Porto Alegre - 2005

Trabalhou com o PCN+	Número de professores	%
Sim	15	48,4
Não	16	51,6
Total	31	100,0

Dos quinze professores que responderam afirmativamente, cinco fizeram comentários sobre o assunto. Quatro desses relataram o desenvolvimento de projeto interdisciplinar em sua escola, durante aquele ano letivo, assegurando que o trabalho decorreu da reflexão motivada pela leitura dos PCN+. Um professor indicou um trabalho de pesquisa de preços, em certo supermercado, por meio do qual procurou relacionar o conteúdo de percentagem ao cotidiano do aluno.

Os professores que responderam negativamente sobre terem trabalhado com os PCN+ não fizeram comentários sobre o assunto.

A tabela 5 apresenta dados referentes ao número de professores que abordam os conteúdos de Probabilidade e Estatística.

Tabela 5 - Número de professores que abordam o conteúdo de Probabilidade e Estatística
Porto Alegre - 2005

Conteúdo	Número de professores	%
Probabilidade	36	75,0
Probabilidade e Estatística	05	10,4
Não desenvolvem	07	14,6
Total	48	100

Dos 48 professores que responderam ao questionário, 41 abordam os conteúdos em tela. Destes, 36 abordam somente o conteúdo de Probabilidade e cinco professores abordam os conteúdos de Probabilidade e Estatística. Sete professores não desenvolvem esses temas.

Todos os professores que abordam o conteúdo de Probabilidade o fazem no segundo ano do Ensino Médio. O conteúdo de Estatística é desenvolvido por quatro professores no terceiro ano e apenas por um deles no primeiro ano.

O quadro 1 mostra os dados referentes aos livros adotados pelos professores.

Autor (a)	Título	Editora	Ano
Roksabur Kiyukana e outros	Os Elos da Matemática	Saraiva	1992
Paulo Bucchi	Curso Prático de Matemática	Moderna	1999
Nelson Gentil e outros	Matemática para o Ensino Médio	Ática	1999
Maria Helena Souza e outro	Matemática – 2º Grau – vol 2	Scipione	1999
Marcio Cintra Goulart	Matemática do Ensino Médio – vol 2	Scipione	1999
Manoel Jairo Bezerra	Matemática para o Ensino Médio	Scipione	2001
Gelson Iezzi e outros	Matemática. Ciências e aplicações – vol 2	Atual	2001
Jose Rui Giovanni e outros	Matemática Completa	FTD	2002
Manoel Paiva	Matemática.Conceitos,Linguagens e Aplicações – vol 2	Moderna	2002
Carlos Alberto M. Santos	Matemática. Série Novo Ensino Médios – ed compacta	Ática	2003
Kátia S. Smole e Maria Diniz	Matemática – Ensino Médio – vol 2	Saraiva	2003
Luiz Roberto Dante	Matemática. Contextos e Aplicações – vol 2	Ática	2003
Edwaldo Bianchini e outro	Matemática – vol 2 e vol 3 – Ensino Médio	Moderna	2004
Ministério da Educação-SEB	Coleção. Explorando o ensino de Matemática	-	2004
Antonio Nicolau Youssef	Matemática: De olho no mundo do trabalho	Scipione	2005

Quadro 1 - Relação de livros adotados por professores de Matemática do Ensino Médio
Porto Alegre – 2005

O quadro acima mostra os autores ou autoras dos livros didáticos adotados pelos professores que participaram da pesquisa. Com base nos dados desse quadro, construiu-se a tabela 6, que se mostra à freqüência de professores que trabalham com os respectivos livros.

Tabela 6 - Livros didáticos adotados por professores do município Porto Alegre – 2005

Autor (a)	Ano	Número de professores	%
Roksabur Kiyukana e outros	1992	01	2,10
Paulo Bucchi	1999	01	2,10
Nelson Gentil e outros	1999	01	2,10
Maria Helena Souza e outro	1999	01	2,10
Marcio Cintra Goulart	1999	04	8,30
Manoel Jairo Bezerra	2001	03	6,20
Gelson Iezzi e outros	2001	04	8,30
Jose Rui Giovanni e outros	2002	06	12,50
Manoel Paiva	2002	05	10,50
Carlos Alberto M. Santos	2003	03	6,20
Kátia S. Smole e Maria I. Diniz	2003	05	10,50
Luiz Roberto Dante	2003	06	12,50
Edwaldo Bianchini e outro	2004	03	6,20
Ministério da Educação – SEB	2004	01	2,10
Antonio Nicolau Youssef	2005	04	8,30
Total		48	

Os dados da tabela anterior foram à base para a identificação dos dez livros mais adotados pelos professores de Matemática do Ensino Médio do município de Porto Alegre.

A lista é a seguir reproduzida no quadro 2.

Livro	Autor (a)	Editora	Ano
L1	Marcio Cintra Goulart	Scipione	1999
L2	Manoel Jairo Bezerra	Scipione	2001
L3	Gelson Iezzi e outros	Atual	2001
L4	Jose Rui Giovanni e outros	FTD	2002
L5	Manoel Paiva	Moderna	2002
L6	Kátia S. Smole e Maria I. Diniz	Saraiva	2003
L7	Carlos Alberto M. Santos	Ática	2003
L8	Luiz Roberto Dante	Ática	2003
L9	Edwaldo Bianchini e outro	Moderna	2004
L10	Antonio Nicolau Youssef	Scipione	2005

Quadro 2 - Lista dos livros que compõe a amostra

Entre os professores que adotam o livro didático, somente doze responderam à questão relacionada com o conceito de Probabilidade e todos julgaram-no adequado. Quanto ao conteúdo de Estatística, nenhum dos professores se manifestou.

Quatro professores com titulação de mestre acrescentaram um comentário em relação à última questão, no qual refletem sobre a importância da Estatística no Ensino Médio, salientando a facilidade que esta disciplina tem de se relacionar com outras.

Para proceder à análise dos dez livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio, preferidos pelos professores, em relação aos conteúdos de Probabilidade e Estatística, definiu-se verificar:

(i) a presença dos seguintes conceitos, dentro dos temas, como se descreve abaixo:

A - Probabilidade:

a) experimento aleatório;

b) espaço amostral e evento;

c) conceitos de probabilidade;

d) regras de probabilidade;

e) probabilidade condicionada;

f) dependência e independência;

g) outros conteúdos;

h) diversidade de exercícios.

B - Estatística:

a) organização dos dados;

b) representação tabular dos dados;

c) representação gráfica dos dados;

d) interpretação e análise de tabelas e gráficos;

e) medidas de posição;

f) medidas de variabilidade;

g) outras medidas;

h) análise dos exercícios.

(ii) se conceitos e propriedades são apresentados de forma clara e correta;

(iii) se existe diversidade nos exemplos e exercícios e se eles atendem às recomendações dos PCN+.

3 PROBABILIDADE

3.1 Introdução

A origem dos estudos de Probabilidade é atribuída a dois matemáticos franceses, Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), que trocaram correspondências sobre o célebre problema da divisão das apostas em 1654 e, a partir da discussão empreendida através das cartas, por diferentes caminhos, chegaram, ambos, à solução correta. Esse problema, segundo consta, teria sido apresentado a Pascal por Antoine Goumbaud (1607-1684), considerado, por alguns autores, um jogador inveterado e, por outros, filósofo e homem de letras.

Sem que Pascal e Fermat soubessem, esse problema era basicamente o mesmo que, um século antes, interessara aos algebristas italianos Luca Pacioli (1445 - 1510), Girolano Cardano (1501-1576) e Niccolo Fontana Tartaglia (1449-1557).

Pascal e Fermat não publicaram as soluções encontradas para a maioria dos problemas que estudaram. A publicação dos resultados foi apresentada pelo matemático suíço Jacques Bernoulli (1654-1705) em um livro de edição póstuma, intitulado ”A Arte da Conjectura”, no ano de 1713. Em tal livro Bernoulli apresentou a solução da maioria dos problemas de probabilidade conhecidos até então.

A aplicação inicial do cálculo da probabilidade parece ter se originado, na Idade Média, com as primeiras tentativas de matematizar os jogos de azar. Hoje ainda há muitas aplicações desses cálculos, envolvendo jogos de loterias, cassinos e corridas de cavalos. A Teoria da Probabilidade, entretanto, ultrapassou o âmbito dos jogos. Atualmente, empresas, organizações profissionais e mesmo governos incorporam a Probabilidade em seus processos de deliberações.

Em 1812, o francês Pierre Simon Laplace (1747-1827) publicou “Teoria Analítica das Probabilidades”, obra em que sistematizou os conhecimentos da época e em que se encontra a definição clássica de Probabilidade, segundo a qual a Probabilidade de um conjunto é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis para esse conjunto, ou seja, P (A) = casos favoráveis / casos possíveis .

No século XX, o cálculo das probabilidades deu lugar a uma teoria matemática apresentada por meio de axiomas próprios, graças aos trabalhos do matemático soviético Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), publicados em 1933. Um dos principais foi “Fundamentos de Teoria das Probabilidades”, no qual são apresentadas as bases da axiomatização da Teoria. Nesse mesmo trabalho, ele esboça o que seria a teoria da medida.

A Probabilidade, quando comparada com outros conteúdos matemáticos, é recente, mas relevante para os autores explorarem-na em seus livros, uma vez que constitui um tema que pode ser relacionado com outras disciplinas e aplicado ao dia-a-dia dos alunos.

Não se deve ignorar, também, que o mundo contemporâneo oferece inúmeros recursos tecnológicos. Por essa razão, além de os livros didáticos deverem propor assuntos que despertem a curiosidade dos alunos, não devem se furtar a estimular o uso de calculadoras e a utilização do laboratório de informática.

Recuperada a gênese da Teoria das Probabilidades, na seqüência analisam-se conceitos, propriedades e exercícios de probabilidade apresentados pelos livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio a fim de se verificar se os mesmos têm relação com a unidade temática de Probabilidade, incluída nos PCN+.

3.2 Conceitos Básicos

A seguir, um estudo sobre a apresentação teórica, propriedades e atividades desenvolvidas pelos livros da amostra. Para proceder à análise, dividiram-se os conteúdos em: experimento aleatório, espaço amostral e evento, conceitos de Probabilidade, regras de Probabilidade, Probabilidade Condicionada, dependência e independência, outros conteúdos e diversidade de exercícios.

3.2.1 Experimento aleatório

Experimento aleatório é um conteúdo sobre o qual os PCN+ orientam que seja desenvolvido com o objetivo de propiciar o reconhecimento do caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, de modo que os alunos possam compreender o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.

Um experimento aleatório é aquele que pode ser repetido indefinidamente sob condições semelhantes e o resultado, em cada uma das repetições pode ser diferente, isto é, não se sabe qual será. Trata-se de um conteúdo fundamental, que serve como ponto de partida para o estudo das probabilidades.

A seguir estão reproduzidos os conceitos de experimento aleatório encontrados nos livros didáticos da amostra.

> L1: O lançamento de um dado e a observação da face que fica voltada para cima é um experimento. Dizemos que é um experimento aleatório, ou ao acaso, porque, repetido em condições tidas como idênticas, apresenta geralmente resultados diferentes.
>
> L2: Chama-se experimento aleatório todo experimento cujo resultado é imprevisível, mesmo que essa experiência, em condições semelhantes, possa ser repetida um número qualquer de vezes.
>
> L3: Quando lançamos um dado, não é possível saber que resultado irá ocorrer: esse experimento pode apresentar 6 possibilidades distintas.
>
> Da mesma maneira, quando escolhemos uma carta de um baralho, não é possível saber de que valor ou naipe será a carta escolhida.
>
> Experimentos como esses recebem o nome de experimentos aleatórios, pois, repetidos em condições idênticas, apresentam diferentes resultados. Tal variabilidade deve-se ao acaso.
>
> L4: Experimentos que, ao serem realizados repetidas vezes, nas mesmas condições, apresentam resultados variados, não sendo possível, portanto, a previsão lógica dos resultados, é denominada experimento aleatório".
>
> L5: Todo o experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso é chamado de experimento aleatório.
>
> L6: Experimento aleatório é todo o experimento que, mesmo repetidas várias vezes, sob condições semelhantes, apresenta resultados imprevisíveis, dentre os resultados possíveis.
>
> L7: Define experimento aleatório equiprovável, como experimentos que tem resultados imprevisíveis.
>
> L8: Há certos fenômenos (ou experimentos) que, embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo, no lançamento de uma moeda perfeita, o resultado é imprevisível; não se pode determiná-lo

antes de ser realizado. Não sabemos se sairá cara ou coroa. Aos fenômenos (ou experimentos) desse tipo damos o nome de fenômenos aleatórios (ou casuais).

L9: Um experimento que pode apresentar resultados diferentes, quando repetidos nas mesmas condições, é chamado de experimento aleatório.

L10: Experimentos aleatórios são aqueles que têm resultados imprevisíveis.

3.2.2 Espaço amostral e evento

Segundo Lipschutz (1993, p. 58),

> O conjunto S de todos os resultados possíveis de um experimento é chamado de espaço amostral. Um resultado particular, isto é, um elemento de S, é chamado ponto amostral. Um evento A é um conjunto de resultados ou, em outras palavras, um subconjunto do espaço amostral S. O evento {a} consistido do único ponto amostral $a \in S$ é chamado evento elementar. O conjunto vazio $\varnothing$ e S são eventos; $\varnothing$ é chamado de evento impossível, e S de evento certo.

A seguir, os conceitos de espaço amostral e eventos apresentados nos livros didáticos da amostra.

a) Espaço amostral

L1: O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado espaço amostral desse experimento.

L2: já que as repetições de um experimento aleatório podem apresentar resultados diferentes, devemos considerar o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento.Um conjunto assim é chamado um espaço amostral do experimento.

L3: Consideremos um experimento aleatório. O conjunto de todos os possíveis resultados desse experimento é chamado espaço amostral e indicado por Ω.

L4: O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado espaço amostral, o qual indicaremos por U.

L5: O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral desse experimento.

L6: Espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

L7: É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento.

L8: Em um experimento (ou fenômeno) aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado de espaço amostral (Ω).

L9: Chamamos de espaço amostral ao conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

L10: Espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto dos resultados possíveis para aquele experimento.

b) Evento

L1: Um evento de um experimento aleatório é qualquer subconjunto do espaço amostral desse experimento.

L2: Dado um espaço amostral E, chama-se evento qualquer subconjunto de E.

O L3 dá um exemplo e, por meio do mesmo, conceitua evento. Em seguida, faz duas observações:

Quando $E = \Omega$, o evento é dito certo. Quando $E = \emptyset$, o evento é dito impossível.

L4: Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado evento. Evento certo é o próprio espaço amostral e evento impossível é o subconjunto vazio do espaço amostral.

L5: Qualquer subconjunto de um espaço amostral é chamado evento desse espaço.

L6: Evento é todo o subconjunto de um espaço amostral S de um experimento aleatório.

O L6 conceitua também evento elementar, evento certo e evento impossível.

L7: Evento é um subconjunto do espaço amostral.

O L7 em seguida define evento certo e evento impossível.

> L8: Em um experimento (ou fenômeno) aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral (Ω). Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de evento.

Logo após, o L8 faz uma observação sobre evento elementar e conceitua evento certo e evento impossível.

> L9: Chama-se evento a qualquer subconjunto de um espaço amostral.

> L10: Qualquer subconjunto do espaço amostral chama-se evento.

3.2.3 Conceitos de Probabilidade

a) Conceito clássico

Em 1812, o francês Pierre Laplace (1749-1827) apresenta o conceito clássico de Probabilidade, segundo o qual um evento pode ocorrer somente por meio de um número finito de elementos, como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, sempre que todos os casos sejam igualmente prováveis.

De acordo com Meyer (1983, p. 27),

> A hipótese mais comumente feita para espaço amostral finito é de que todos os resultados sejam igualmente prováveis. Esta hipótese não pode ser, contudo, tomada como segura; ela deve ser cuidadosamente justificada. Existem muitos experimentos para os quais tal hipótese é assegurada, mas existem também muitas situações experimentais nas quais seria absolutamente errôneo aceitar-se essa suposição. Por exemplo, seria bastante irreal supor que seja igualmente provável ocorrerem chamadas telefônicas em um centro entre 1 e 2 horas da madrugada e entre 17 e 18 horas da tarde.

A seguir, apresentam-se os conceitos de Probabilidade dos livros didáticos da amostra.

> L1: Considerando um experimento aleatório de espaço amostral equiprovável S, com n resultados possíveis, S = $\{e_1, e_2, e_m, ..., e_n\}$ e Se A = $\{e_1, e_2, e_m\}$, temos:
>
> p(A) = 1/n + 1/n + ... + 1/n = m/n
>
> este resultado pode ser escrito da seguinte forma: p(A) = n(A)/ n(S). Por fim, como A é um subconjunto de S, é claro que $0 \leq n(A) \leq n(S)$ e dividindo os três membros dessa desigualdade por n(S), temos: $0 \leq p(A) \leq 1$, mostrando claramente que a probabilidade do evento impossível é zero e a probabilidade do evento certo é 1.

Em seguida, o L1 apresenta o seguinte texto:

> Podemos dizer também que cada elemento de um conjunto A é um caso favorável à ocorrência de A e, uma vez que S é o conjunto de todos os resultados possíveis para o experimento, a probabilidade de ocorrer A pode também ser expressa por:
>
> p(A) = número de casos favoráveis à A/ número de resultados possíveis.

O L2 conceitua a probabilidade de um evento elementar e mostra que a probabilidade fica compreendida entre 0 e 1, inclusive, ou seja, $0 \leq p(a) \leq 1$. Em seguida, conceitua probabilidade de um evento qualquer por:

> Se A = $\{a_1, a_2, a_n\}$, definimos a probabilidade de A, que indicamos por p(A), como
>
> $p(A) = p(a_1) + p(a_2) + p(a_n)$
>
> Se A = $\varnothing$, sua probabilidade é nula.

Faz, ainda, a observação:

> Para a probabilidade do evento igual ao próprio espaço amostral E, temos:
>
> $P(E) = p(a_1) + p(a_2) + ... + p(a_n)$
>
> e, como esta é a soma de todas as probabilidades de todos os eventos elementares de E, o seu valor é 1.

Qualquer que seja o evento A de um espaço amostral, temos:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Finalmente, o livro introduz um exemplo em que menciona, uma moeda equilibrada, cita D'Alambert e conceitua espaço eqüiprovável por:

> Dizemos que um espaço amostral E (finito) é equiprovável quando seus eventos elementares têm probabilidades iguais de ocorrência.
>
> Em geral, num espaço equiprovável, com n elementos, a probabilidade de um evento elementar é sempre igual ao quociente 1/n.

O L2 ainda acrescenta:

> Em um espaço amostral E, equiprovável de n elementos, a probabilidade de um evento formado por 2 elementos é 2/n, a probabilidade de um evento com 3 elementos é 3/n e assim por diante e a probabilidade de um evento com k elementos é k/n (com $k \leq n$).

Em conclusão, afirma:

> Num espaço amostral equiprovável E (finito), a probabilidade de um evento A ocorrer é sempre:
>
> $P(A) = n(A) / n(E)$

O L3 conceitua probabilidades em espaços amostrais eqüiprováveis do seguinte modo:

> Consideremos um espaço amostral Ω formado por k pontos amostrais.
>
> $\Omega = \{a_1, a_2, a_k\}$
>
> Vamos associar a cada um desses pontos amostrais um número real, p(a), ou simplesmente p, chamado probabilidade do evento $\{a_i\}$ (ou probabilidade de ocorrência do ponto amostral $\{a_i\}$) , tal que:
>
> a. $0 \leq p_i \leq 1$
>
> b. $\Sigma\, p_i = 1$

Consideraremos, na maior parte dos exercícios, os espaços amostrais equiprováveis, isto é, aqueles cujos pontos amostrais têm a mesma probabilidade de ocorrer.

Assim denotado por p a probabilidade de ocorrência de cada um dos pontos amostrais de Ω, temos em (II).

$p + p + ... + p = 1 \Rightarrow k. p = 1 \Rightarrow p = 1/k$

A probabilidade de ocorrência de um evento E, formado por r pontos amostrais E = {a1, a2, ..., ar}, com $r \leq k$, é dada por.

$P(E) = p_1 + p_2 + p_r \Rightarrow p(E) = 1/k + 1/k + ... + 1/k \Rightarrow p(E) = r/k \Rightarrow p(E) = n(E)/ n(\Omega)$

Como $E \subset \Omega$ temos que $n(E) \leq n(\Omega)$. Dessa forma:

$P(E)= n(E)/ n(\Omega)$ é tal que $0 \leq P(E) \leq 1$

Essa definição de probabilidade é intuitiva, isto é, a probabilidade de ocorrer determinado evento é dada pela razão entre o número de casos favoráveis (ou número de casos que nos interessam) e o número de casos possíveis (ou número total de casos).

Assim:

P(E) = número de casos favoráveis / número de casos possíveis

O L4 conceitua Probabilidade de um evento da forma como se reproduz abaixo:

Se, num fenômeno aleatório, o número de elementos do espaço amostral é n(U) e o número de elementos do evento A é n(A), então a probabilidade de ocorrer o evento A é o número p(A), tal que.

$$p(A) = n(A)/ n(U)$$

Essa definição é válida quando o espaço amostral U for eqüiprobabilístico, isto é, quando todos os elementos de U tiverem a mesma probabilidade.

Conseqüências da definição de probabilidade:

1) $p(\emptyset) = n(\emptyset)/ n(U)$

   $p(\emptyset) = 0/ n(U)$

   $p(\emptyset) = 0$ e,

   $p(U) = n(U)/ n(U)$

   $p(U) = 1$

2) Como o evento A é um subconjunto do espaço amostral U, então: $0 \leq p(A) \leq 1$.

> É comum representarmos as probabilidades em percentagens. Por exemplo, em vez de dizermos P(A) = ½, podemos dizer P(A) = 50%. Então, pela conseqüência (2): $0 \leq P(A) \leq 100\%$.

O L5 dá um exemplo e, após, define espaço eqüiprovável:

> Um espaço amostral é equiprovável se as freqüências relativas de seus elementos tendem a um mesmo valor quando o número de experimentos aumenta indefinidamente.

Em seguida, Probabilidade:

> Sejam E um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio e A um evento de E. A probabilidade de ocorrer algum elemento de A é indicada por p(A) e definida por.
>
> $p(A) = n(A)/n(E)$ em que n(A) e n(E) indicam, respectivamente, número de elementos de A e de E.

O L6 conceitua Probabilidade da seguinte forma:

> Seja um evento A de espaço amostral finito S (não vazio). A probabilidade de ocorrer o evento A é a razão entre o número de elementos de A e o número de elementos de S.
>
> Indicando por:
>
> n(A) o número de elementos de A
>
> n(S) o número de elementos de S e
>
> p(A) a probabilidade de ocorrer A
>
> temos: $p(A) = n(A)/n(S)$
>
> Essa razão foi estabelecida pelo matemático e astrônomo francês Pierre Laplace
>
> (1749 – 1827). Como conseqüência imediata da definição dessa razão, temos:
>
> $0 \leq P(A) \leq 1$ ou $0\% \leq P(A) \leq 100\%$
>
> De fato, como $\varnothing \subset A \subset S$, vem: $n(\varnothing) \leq n(A) \leq n(S)$ e dividindo todos os membros dessa desigualdade por n(S), obtemos: $0 \leq p(A) \leq 1$.
>
> Nos casos extremos, em que:

> a probabilidade é 0, o evento nunca ocorre nesse experimento: é um acontecimento impossível.
>
> a probabilidade é 1, o evento ocorre sempre nesse experimento: é um evento certo.

O L7 afirma que:

> Em um experimento aleatório, no qual S é um espaço equiprovável, a probabilidade de ocorrer um evento A é o número P(A), dado por
>
> $P(E) = n(A)/n(S)$

Mostra, ainda, que a propriedade de ocorrência de um evento está no intervalo

$0 \leq p(A) \leq 1$.

No L8 consta:

> Quando um fenômeno (ou experimento) aleatório, com espaço amostral finito, consideramos que todo o evento elementar tem a mesma "chance" de ocorrer (o espaço é equiprovável), a probabilidade de ocorrer um evento A, indicada por p(A), é um número que mede essa chance e é dado por:
>
> $P(A) = n(A)/ n(\Omega)$ ou P(A)= número de resultados favoráveis/ número de resultados possíveis.

O L9 conceitua a probabilidade de um evento ocorrer da seguinte maneira:

> Em um experimento aleatório, no qual S é um espaço equiprovável, a probabilidade de ocorrer um evento E é o número P(E), dados por:
>
> $P(E) = n(E)/n(S)$

O L9 também mostra que a propriedade de ocorrência de um evento está no intervalo $0 \leq p(A) \leq 1$.

O L10 apresenta o conceito de Probabilidade a seguir:

> Probabilidade de um evento A representa a "chance" de ocorrer um evento. O valor P(A) é igual ao número de elementos de A, dividido pelo número de elementos do espaço amostral E.
>
> $P(A) = n(A)/n(E)$

Como $A \subset E$, temos $n(A) \leq n(E)$. Logo, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Em particular, se $P(A) = 0$, A será chamado evento impossível e, se $P(A) = 1$, A será chamado evento certo.

b) Probabilidade como freqüência relativa

Na maioria dos livros de Matemática destinados ao Ensino Médio os conceitos e propriedades relacionados, tanto com as freqüências absolutas, quanto com as freqüências relativas, são semelhantes. Nesse contexto, a probabilidade de ocorrência de um evento é definida em função do valor para o qual esta freqüência converge após uma seqüência de resultados.

Segundo Spiegel, (1993, p. 154),

> O conceito clássico de probabilidade apresenta a desvantagem da expressão igualmente provável ser vaga. De fato, como essa expressão parece ser sinônima de "igualmente possível", a definição é circular, porque se está definindo a probabilidade com seus próprios termos. Por essa razão, tem sido advogada por alguns autores uma definição estatística de probabilidade. De acordo com isso, a probabilidade estimada ou probabilidade empírica de um evento é considerada como a freqüência relativa de sua ocorrência, quando o número é muito grande. A probabilidade propriamente dita é o limite da freqüência relativa, quando o número de observações cresce indefinidamente.

Nessa concepção, a probabilidade está relacionada a duas condições que podem ser observadas na seqüência de resultados de um mesmo experimento aleatório repetido nas mesmas condições, ou seja, a convergência dos resultados de cada um dos eventos associados ao experimento aleatório e a impossibilidade de prever antecipadamente o resultado de cada um deles.

A importância da freqüência relativa na probabilidade pode estar relacionada com a inferência estatística, tema recomendado pelas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais com o objetivo de propiciar a identificação, em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas, de modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades. É importante, também, porque permite a simulação de experimentos, com os quais podemos analisar modelos probabilísticos, cujo tratamento, quando relacionados diretamente com o cálculo de probabilidade, seria inadequado para os alunos do Ensino Médio.

Segundo Bussab e Morettin (2002, p. 103),

> Em particular as freqüências relativas são estimativas de probabilidades de ocorrências de certos eventos de interesse. Com suposições adequadas, e sem observarmos diretamente o fenômeno aleatório de interesse, podemos criar um modelo teórico que reproduza de maneira razoável a distribuição das freqüências, quando o fenômeno é observado diretamente. Tais modelos são chamados modelos probabilísticos.

Os livros didáticos da amostra não apresentam este enfoque de Probabilidade. Todos os livros da amostra abordam somente o conceito clássico de Probabilidade.

c) Conceito axiomático de Probabilidade

Se um espaço amostral S é um conjunto contínuo, não podemos aplicar a definição de Laplace. Nesse caso, é necessário considerar uma perspectiva axiomática da Probabilidade. Esta se deve ao russo Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), que propôs a primeira apresentação axiomática do cálculo de probabilidade, publicada na Alemanha, em 1933.

Segundo Lipschutz (1993, p. 60),

> Sejam S um espaço amostral, ε a classe de eventos e P uma função de valor real definida em ε. Então P é chamada de função de probabilidade e P(A), de probabilidade do evento A, se os seguintes axiomas valem:
>
> [P_1] Para todo o evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$
>
> [P_2] $P(S) = 1$
>
> [P_3] Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3.2.4 Regras de Probabilidade

Apresentam-se, abaixo, algumas regras que decorrem diretamente dos axiomas.

a) $P(\emptyset) = 0$

b) Se A^c é o complemento de um evento A, então $P(A^c) = 1 - P(A)$

c) Se A e B são dois eventos quaisquer, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

d) Se A e B são dois eventos quaisquer, então $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

3.2.5 Probabilidade Condicionada

Historicamente, a primeira obra a tratar da Probabilidade Condicionada de que se tem conhecimento é “A doutrina das Chances” (1738), de Abraham De Moivre (1667-1754). Dela destacamos a definição clássica de probabilidade discreta e finita; a noção de dependência e independência de eventos; a regra de cálculo da probabilidade discreta e de cálculo da probabilidade conjunta.

Na regra de cálculo da probabilidade conjunta com pelo menos dois eventos dependentes já era praticada de maneira implícita a noção atual de Probabilidade Condicionada.

O inglês Thomas Bayes (1702-1761), em sua obra "Tentativas no intuito de resolver um problema da Doutrina das Chances", aprofunda a obra de seu mestre De Moivre. Essa obra contém sete definições, dez proposições e três regras, sendo que as definições são mais precisas.

Segundo Lipschutz (1993, p. 85)

> Seja E um evento arbitrário de um espaço amostral S, com $p(E) > 0$. A probabilidade de um evento A ocorrer, uma vez que E tenha ocorrido ou, em outras palavras, a probabilidade condicional de A dado E, escrita p(A/E), é definida como:
>
> $P(A/E) = P\ (A \cap E)/\ P(E)$

De acordo com a definição, se o evento E ocorre, a probabilidade do evento A ocorrer depende de um espaço amostral reduzido, mas cumpre os axiomas de probabilidade.

A seguir, transcreve-se, o conceito apresentado por cada um dos livros didáticos da amostra.

> L1: Sendo A e B dois eventos de um espaço amostral E, estaremos tratando de calcular a probabilidade de ocorrência de A sabendo que B ocorreu. É o que dizemos probabilidade de A, dado que B ocorreu, ou simplesmente, probabilidade de A, dado B e indicamos por P (A/B).
>
> L2: Sejam A e B dois eventos de um experimento aleatório S. Vamos determinar a probabilidade de ocorrer B tendo ocorrido A. Note que, neste caso estamos interessados na

> seqüência em que os dois eventos ocorrem. Em outras palavras, B está condicionado à ocorrência de A. Por esta razão, dizemos que estamos trabalhando com um cálculo de probabilidade condicional.

O L3 apresenta um exemplo e logo após escreve:

> isso sugere que, de modo geral, a probabilidade de ocorrer um evento A sabendo que já ocorreu o evento B é dada por:
>
> $P(A/B) = P\ (A \cap B)/P(B)$

O L4, o L7 e o L8 não definem Probabilidade Condicionada.

O L5, após um exemplo, afirma que:

> a probabilidade de ocorrer o evento B, dado que ocorreu o evento A, é indicada por P (B/A), e é calculada por:
>
> $P(B/A) = n\ (A \cap B)/n(A)$

O L6 diz que

> [...] sejam $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ eventos de um mesmo espaço amostral S. A probabilidade de ocorrência de A condicionada a B é o número dado por:
>
> $P(B/A) = n\ (A \cap B)/n(B)$
>
> Chamamos essa relação de probabilidade condicional.
>
> L9: Dados dois eventos A e B de um espaço amostral S, a probabilidade de ocorrer o evento B sabendo-se que A já ocorreu é indicada por *p (B/A)* e lê-se “probabilidade de B dado A”

Em seguida, o L9 afirma que:

> [...] sabemos que a probabilidade do evento B é dada por $P(B) = n(B)/n(S)$. No entanto, quando uma informação adicional é conhecida, como a ocorrência de A, sendo
>
> $P(A) \neq 0$, o espaço amostral fica reduzido a A e a probabilidade de B ocorrer é agora dada por:
>
> $P(B/A) = n\ (A \cap B)/n(A)$
>
> Dividindo o segundo membro da igualdade por n(S), temos:

$P(B/A) = P(A \cap B)/ P(A)$

O L10, dentro da regra do produto, faz as seguintes ponderações:

> Considerando dois eventos, A e B, de um mesmo espaço amostral, a probabilidade de ocorrer A e B é dada por: $P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$, onde: $P(A \cap B)$ é a probabilidade de ocorrer A e B simultaneamente e $P(B/A)$ é a probabilidade de ocorrer B, tendo ocorrido A.

3.2.6 Dependência e independência

Antes de conceituarmos eventos independentes, devemos tomar cuidado para mostrar a diferença entre esses e os eventos mutuamente exclusivos.

Segundo Hoel (1979, p. 68),

> A independência de eventos difere radicalmente do conceito de dois eventos mutuamente exclusivos. Nos problemas da vida real é muito fácil determinar se dois eventos A_1 e A_2 são mutuamente exclusivos. Tudo que se precisa fazer é perguntar. Se A_1 ocorre, tal fato torna impossível à ocorrência de A_2? Se a resposta é afirmativa, os dois eventos são mutuamente exclusivos.

Os livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio costumam definir independência entre dois eventos a partir da regra de multiplicação de probabilidades, ou seja, $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$.

Segundo Lipschutz (1993, p. 91),

> Um evento B é dito independente de um evento A, se a probabilidade de B ocorrer não é influenciada pelo fato de A ter ocorrido ou não. Em outras palavras, se a probabilidade de B é igual à probabilidade condicionada de B dado A:
>
> $P(B) = P(B/A)$.

Substituindo P(B) por P(B/A) no Teorema da Multiplicação,

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

A definição proposta por Lipschutz (1993) diz que os eventos A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$; caso contrário, são dependentes.

Uma regra geral em Matemática é construir modelos complexos a partir de outros mais simples. Como o conceito de Laplace é difícil de aplicar a casos mais complexos, podemos utilizar a regra da multiplicação de probabilidades, com a finalidade de multiplicar eventos, através da decomposição dos mesmos em eventos simples, cujo cálculo da probabilidade é imediato.

Em todos esses modelos, é necessário o conceito de Probabilidade Condicionada, o qual será utilizado com muita freqüência na inferência e no estudo da associação entre variáveis.

A idéia de independência, no cálculo de probabilidade, pode ser deduzida da regra da multiplicação de probabilidades e tem relação com a Probabilidade Condicionada.

Quando se aplica a regra do produto para um mesmo experimento, o conceito de eventos independentes é trivial; entretanto, quando se trata de experimentos distintos, sua aplicação é mais complexa, uma vez que se torna necessário introduzir um novo conceito, ou seja, a intersecção entre estes eventos.

A idéia de independência apresentada no contexto anterior está relacionada com duas variáveis quantitativas, mas existem outros casos, nos quais uma das variáveis é qualitativa e outra é quantitativa, ou em que até mesmo duas variáveis são qualitativas.

Em qualquer um dos casos anteriores, é possível a construção de tabelas de dupla entrada, apresentando variáveis quantitativas ou qualitativas. As quantitativas devem aparecer de forma ordenada. Alguns livros didáticos costumam chamar as tabelas de dupla entrada, relacionadas com variáveis qualitativas, de tabelas de contingência.

Quando as variáveis são dependentes, podemos medir o grau de dependência entre elas.

Segundo Bussab e Morettin (2002, p.74),

> Um dos principais objetivos de se construir uma distribuição conjunta de duas variáveis qualitativas é descrever a associação entre elas, isto é, queremos conhecer o grau de dependência entre elas, de modo que possamos prever melhor o resultado de uma delas quando conhecermos a realização da outra.

De modo geral, a quantificação do grau de associação entre duas variáveis é feita pelos chamados coeficientes de associação ou correlação (BUSSAB; MORETTIN, 2002).

A seguir, relata-se como os livros didáticos da amostra apresentam os conceitos de dependência e independência.

> L1: Os subconjuntos A e B de um espaço amostral E são eventos independentes quando
>
> $P\ (A/B) = P(A)$.
>
> L2: Dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral serão chamados independentes quando a probabilidade de ocorrer um deles não depender da ocorrência do outro. Dessa forma, teremos $p(B/A) = p(B)$, o que nos permite escrever $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

O L3 define a probabilidade de dois eventos simultâneos ou sucessivos do seguinte modo:

> Da fórmula $P(A/B) = P(A \cap B)/\ P(B)$, encontrada para a probabilidade condicional segue que:

$P(A \cap B) = P(A/B).P(B)$

Isto significa que, para se avaliar a probabilidade de ocorrerem dois eventos simultâneos (ou sucessivos), que é $p(A \cap B)$, basta multiplicar a probabilidade de ocorrer um deles (p(B)) pela probabilidade de ocorrer o outro, sabendo que o primeiro já ocorreu (p(A/B)).

A seguir apresenta dois exemplos e conclui:

De modo geral, quando P(A/B) = P(A), isto é, o fato de ter ocorrido B não altera a probabilidade de ocorrer o A, dizemos que A e B são eventos independentes e o teorema da multiplicação se reduz a $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

O L4 apresenta o enunciado:

Se um acontecimento é composto por vários eventos sucessivos e independentes, de tal modo que:

O primeiro evento é A e a sua probabilidade é p_1,

O segundo evento é B e a sua probabilidade é p_2

o k-ésimo evento é K e a sua probabilidade é p_k, então a probabilidade de que os eventos A, B, ..., K ocorram nessa ordem é: $p_1, p_2, ..., p_k$

L5: Seja um espaço amostral E, finito e não vazio. Sejam A e B eventos de E. Dizemos que A e B são eventos independentes se, e somente se

P(B/A) = P(B) ou P(A/B) = P(A)

L6: dois eventos, A e B, que ocorrem num mesmo espaço amostral, são independentes entre si (a ocorrência de um não influi na ocorrência do outro), a probabilidade de ocorrência de A e B é igual ao produto das probabilidades de cada um desses eventos.

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

L7: Dados dois eventos independentes A e B, a probabilidade de que ocorram os eventos A e B é dada por:

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

L8: Dois eventos A e B de um espaço amostral (Ω) com $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$, são independentes se e somente se p(A/B) = p(A), ou de modo equivalente:

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

L9: Dados dois eventos independentes A e B, a probabilidade de que ocorram os eventos A e B ($A \cap B$) é dada:

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

L10: Dois eventos A e B são independentes quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende da ocorrência do outro. Nesse caso, p(B/A) = p(B). Assim, para dois eventos independentes, a regra do produto pode ser escrita por:

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

3.2.7 Outros Conteúdos

Alguns dos livros analisados incluem o conceito de variável aleatória e de modelo binomial.

Segundo Lipschutz (1993, p. 122),

> Suponhamos que S seja um espaço amostral de um experimento. Os resultados do experimento, ou seja, os pontos amostrais de S, não precisam ser números. Entretanto, freqüentemente desejamos atribuir um número específico a cada resultado, por exemplo a soma dos resultados de um par de dados ou o tempo, em horas, gasto por uma lâmpada para se queimar. Esta associação é chamada de variável aleatória. Mais precisamente: “Uma variável aleatória X num espaço amostral S é uma função de S no conjunto dos números reais tal que a imagem inversa de cada intervalo dos reais seja um evento de S”.

Dos livros analisados, somente o L7 apresenta o conceito de variável, mostrando a diferença entre variáveis quantitativas e qualitativas, assim como entre discretas e contínuas. Entretanto não relaciona a idéia de variável da Estatística com a de variável em Probabilidade, ou seja, desperdiça uma ótima oportunidade de contextualizar a Matemática.

Segundo Meyer (1983, p. 77),

> Consideremos um experimento ε e seja A algum evento associado a ε. Admita-se que P(A) = p e conseqüentemente $P(\bar{A}) = 1 - p$. Considere-se n repetições de ε. Daí, o espaço amostral será formado por todas as seqüências possíveis $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, onde cada ai é ou A ou $\bar{A}$ na i-ésima repetição de ε. Além disso, suponha que P(A) = p suponha a mesma para todas as repetições. A variável aleatória X será assim definida:

$$P(X = k) = C\ n, k\ .p^k.(1 - p)^{n-k}$$

A seguir reproduz-se como três dos livros didáticos analisados, ou seja, L1, L2 e L3 apresentam o conceito de distribuição binomial, já que os demais não abordam o assunto.

> L1: Sendo p a probabilidade de sucesso em cada tentativa, a probabilidade de fracasso é
>
> q = 1 – p e a probabilidade de obtermos k sucessos e (n – k fracassos) é:
>
> $p = C\ n, k\ .\ p^k\ .q^{\ n-k}$

O L3 não define, mas desenvolve um exemplo por meio de experimentos binomiais.

> L6: Se, em cada uma das n tentativas de um experimento aleatório, a probabilidade de ocorrer um evento A é p(A), então a probabilidade de ocorrer p vezes o evento A nas n tentativas é:
>
> $C\ n, p.[p(A)]^p.[p(\bar{A})]^{n-p}$
>
> Onde $p \leq n$ e $\bar{A}$ é o evento complementar de A

O L8 não apresenta o conceito de distribuição binomial, todavia apresenta o método binomial e, por meio de um exemplo, chega a fórmula $P = C\ _{n,\ k}\ .\ p^k\ .q^{\ n-k}$

3.2.8 Diversidade de exercícios

Os exemplos e os exercícios apresentados pelos livros didáticos representam uma etapa fundamental na didática da Matemática. Exemplos e exercícios propostos pelos livros de Matemática que vamos apresentar aos alunos; devem, então, estar adequados ao nível de ensino e precisam ser passíveis de relacionamento com o cotidiano dos alunos. O número e a variedade de exemplos relacionados com determinado conceito tende a facilitar a resolução dos exercícios propostos para os alunos.

Segundo Micotti, (1999, p. 163)

> É em Matemática que os alunos entram em contato com sistemas de conceitos que permitem resolver problemas e fazer novas deduções; em que a coerência e a precisão do raciocínio conferem legitimidade às idéias e as conclusões obtidas, segundo a necessidade lógica, de premissas definidas (por outros).

Do ponto de vista didático, ao introduzirmos um assunto novo, devemos obedecer a algumas etapas. De entre elas, podemos destacar a seleção de um exemplo adequado, a definição do conceito e das propriedades, a apresentação de novos exemplos e, em seguida, a proposição de exercícios para os alunos. Mas o professor deve, sobretudo, estar atento à realização das atividades por seus alunos, em especial quando se tratar de atividade proposta pelo livro didático, uma vez que alguns alunos aprendem com facilidade a partir dos exemplos apresentados pelo livro e conseguem realizar as atividades propostas pelo mesmo. Há outros alunos, entretanto, que são menos hábeis na depreensão dos passos apresentados nos exemplos, o que resulta em maior dificuldade para resolver as atividades propostas.

Os exemplos e exercícios apresentados pelos livros analisados podem ser agrupados sob os seguintes títulos: experimento aleatório, espaço amostral e evento; conceito de Probabilidade; Probabilidade como freqüência relativa; Probabilidade Condicionada, eventos independentes e dependentes; distribuição binomial.

a) Experimento aleatório, espaço amostral e evento

O L1 apresenta um exercício, sobre lançamento de uma moeda, resolvido. Em seguida, propõe uma lista de quinze exercícios, dos quais dez são relacionados com jogos, quatro com conjuntos numéricos e um é sobre família.

O L2 apresenta somente três exercícios sobre experimentos, mas todos relacionados com retiradas de bolas de urna.

O L3 apresenta três exemplos relacionados com jogos e, em seguida, uma lista de quinze exercícios, dos quais doze estão relacionados com jogos, dois com sorteios e um relacionado com o campeonato paulista de futebol.

O L4 apresenta três exemplos, com moedas, dados e sorteios, respectivamente. Não há exercícios propostos para os alunos.

O L5 apresenta nove exemplos relacionados com moeda, dados e sorteio.

O L6 apresenta um exemplo relacionado com dado e, após, doze atividades denominadas de “problemas e exercícios”, dos quais seis estão relacionados com jogos. Nos demais exercícios, explora o significado de alguns termos relacionados com o assunto, por exemplo, o significado de “aleatório”.

O L7 não apresenta atividades relacionadas com experimento aleatório, espaço amostral e evento.

O L8 faz uma introdução sobre experimentos aleatórios, citando exemplos relacionados com dado não viciado, número de peças defeituosas fabricadas por uma máquina, resultados de um jogo de roleta, número de pessoas que ganharão na loto e número de chamadas telefônicas que serão efetuadas numa cidade no Dia das Mães.

Explora o significado de “moeda perfeita” e “dado não viciado”. No final, propõe uma série de dez exercícios, nos quais explora geometria espacial, na figura do tetraedro e o diagrama da árvore por meio de arranjos.

O L9 mostra um exemplo com conjunto de números e apresenta dois exercícios com urna e retas, respectivamente.

O L10 apresenta dois exemplos relacionados à moeda e dado, respectivamente.

b) Conceito de Probabilidade

O L1 apresenta um exemplo com dado e, em seguida, uma lista de dezesseis exercícios, dos quais sete são relacionados com jogos, dois com loterias, um com geometria e seis com análise combinatória.

O L2 apresenta três exemplos resolvidos, todos relacionados com jogos e, após, propõe uma lista de onze exercícios, nos quais a maioria tem relação com jogos de azar ou conjuntos de números. No final do capítulo de Probabilidade, inclui uma lista de 34 exercícios, dos quais onze são de probabilidade e, destes, seis são de jogos.

O L3 apresenta três exemplos relacionados com jogos e uma lista de dezessete exercícios, dos quais treze são de jogos, dois de conjuntos numéricos e dois para completar uma tabela de dupla entrada.

O L4 apresenta dois exemplos com jogos e uma série de doze exercícios, dos quais oito são de jogos, três de conjuntos numéricos e um relacionado com casais.

O L5 apresenta uma série de cinco exercícios resolvidos, quatro de jogos e um de sorteio. Em seguida, propõe mais nove exercícios com o título de “atividades”, dos quais quatro são de jogos, dois de análise combinatória, um de rifa e dois de conjuntos numéricos.

O L6 apresenta um exemplo introdutório sobre um dado, dois exemplos resolvidos sobre dado e um sobre a Mega-Sena. Na seqüência, propõe uma lista de seis exercícios, dos quais três são de jogos, um de conjunto numérico e dois relacionados com uma tabela de dupla entrada. Finalmente, com o título de “flash matemático” propõe quatro exercícios por meio de jogos.

O L7 apresenta três exemplos relacionados com jogos e uma lista de dez exercícios, dos quais oito são de jogos e dois de conjuntos numéricos.

O L8 apresenta oito exercícios resolvidos, dos quais quatro com jogos, um de geometria espacial e três de análise combinatória. Após, propõe uma lista de dezoito exercícios, dos quais doze são de jogos, um sobre filhos, dois com tabela de dupla entrada, dois sobre pesquisa e um relacionado com as faces de uma caixa de fósforos.

O L9 apresenta três exemplos, um com moeda e dois de análise combinatória. Em seguida, propõe quatro exercícios de jogos, sendo um deles relacionado com a Mega-Sena.

O L10 apresenta cinco exemplos relacionados com jogos e propõe uma lista de onze exercícios, dos quais, nove sobre jogos, um sobre nacionalidade e um de análise combinatória.

c) Probabilidade como freqüência relativa

Nenhum dos livros da amostra apresenta exercícios sobre Probabilidade como freqüência relativa.

d) Probabilidade Condicionada, eventos independentes e dependentes

O L1 apresenta um exemplo relativo ao lançamento de dois dados e uma lista de quatorze exercícios, bem diversificados.

O L2 resolve apresenta um exemplo sobre retiradas de uma bola de uma urna e propõe uma lista de doze exercícios, dos quais dez estão voltados para jogos.

O L3 inicia o conteúdo de Probabilidade Condicionada com um exemplo introdutório em que consta uma tabela de dupla entrada em uma pesquisa de opinião e propõe uma lista de oito exercícios bem diversificados, dentre os quais estão problemas de seguro e declaração de imposto de renda. Depois, define a probabilidade de dois eventos simultâneos (ou sucessivos), resolve três exemplos e apresenta uma lista de quatorze exercícios relacionados com o cotidiano.

O L4 apresenta dois exemplos sobre jogos e uma lista de nove exercícios, dos quais oito são sobre jogos.

O L5 apresenta dois exercícios resolvidos sobre jogos e relacionados com Probabilidade Condicionada e propõe uma lista de dezoito exercícios, bem diversificados. Em seguida, apresenta quatro exercícios resolvidos com jogos sobre eventos independentes e propõe uma lista de seis exercícios, dos quais quatro são sobre jogos. No final, propõe quatorze exercícios complementares, bem diversificados.

O L6 apresenta um exemplo introdutório de Probabilidade Condicionada, resolve dois exercícios sobre dados e propõe quatro exercícios, dos quais três sobre jogos. Após, apresenta um exemplo de eventos independentes, sobre jogos, e propõe uma lista de nove exercícios, bem diversificados; um deles, entretanto, refere-se a válvulas.

O L7 não apresenta atividades sobre Probabilidade Condicionada e eventos independentes e dependentes.

O L8 apresenta um exemplo introdutório sobre Probabilidade Condicionada, referindo-se a moedas; resolve cinco exercícios, bem diversificados, e propõe uma lista de onze exercícios, também diversificados. Após, em eventos independentes e dependentes, apresenta um exemplo sobre dados, resolve quatro exercícios, bem diversificados, e propõe uma lista de quatorze exercícios, dos quais sete estão relacionados com jogos.

O L9 introduz o assunto por meio de um exemplo relacionado com o sorteio de uma bicicleta, resolve outro exemplo e propõe uma série três de exercícios, relacionados com cartas, rifa e bolinhas retiradas de uma caixa. Mostra um texto sobre genética e probabilidade e, dentro de uma lista de exercícios complementares, apresenta sete exercícios sobre eventos independentes e dois sobre Probabilidade Condicionada.

O L10 apresenta três exemplos de eventos independentes, dois deles sobre bolas retiradas de uma urna e um sobre peças de automóveis. Propõe ainda cinco exercícios, dos quais, quatro são de jogos e um sobre um teste de múltipla escolha.

e) Distribuição binomial

O L2, o L4, o L5, o L7, o L8, o L9 e o L10 não apresentam atividades sobre o conteúdo de distribuição binomial.

O L1 traz um exemplo sobre moedas e nove exercícios, dos quais cinco são sobre jogos, um sobre cobaias, dois sobre questões com alternativas e um sobre escolha do curso superior.

O L3 apresenta três exemplos sobre moedas, alternativa correta e acerto de um alvo, respectivamente. Propõe uma lista de doze exercícios, bem diversificados.

O L8 apresenta um exemplo relacionado com o nascimento de uma criança, resolve quatro exercícios e propõe quatro exercícios.

3.3 Relação com os PCN+

O conceito de experimento aleatório é apresentado pelos livros didáticos da amostra; entretanto, com exceção do L7, os livros não exploram nem discutem as diferenças entre experimentos aleatórios e deterministas.

Os exemplos e os exercícios recebem o tratamento convencional, têm um cunho essencialmente mecânico e repetitivo. Os autores não sugerem experimentação, simulação nem mesmo o uso do computador.

Com relação ao espaço amostral, todos os livros analisados apresentam a idéia de um conjunto representado por todos os resultados possíveis de um experimento. Quanto a evento, todos o conceituam como um subconjunto do espaço amostral, restringindo-se ao caso discreto e finito.

O L2 introduz o conceito por meio de espaço amostral eqüiprovável, ou seja, de forma inadequada, uma vez que eqüiprobabilidade é atributo de função de probabilidade, não de espaço amostral.

O L3 introduz um novo conceito, ou seja, de ponto amostral, e utiliza uma simbologia complexa para alunos do Ensino Médio.

O L4 não especifica que a definição é válida somente para conjuntos finitos, enquanto, no L5, o autor introduz espaços amostrais eqüiprováveis, ou seja, usa uma terminologia inadequada, uma vez que o termo eqüiprovável se refere à probabilidade e não a espaço amostral.

O autor do L6 introduz o capítulo com uma situação motivadora, relaciona o conceito clássico com Pierre Laplace, de forma correta, e apresenta, no final, uma situação de interdisciplinaridade com a Biologia ou, mais especificamente, com a Genética, o que vem ao encontro dos PCN+.

O L8 apresenta o conteúdo de Probabilidade no último capítulo do livro e não se preocupa em mostrar qual o objetivo do estudo da Probabilidade; entretanto, apresenta uma relação com a Genética, mostrando uma boa idéia de interdisciplinaridade, o que vem ao encontro dos PCN+.

O L9 inicia o conteúdo com uma história relacionada com jogos de azar e, em seguida, no conceito de Probabilidade, apresenta uma impropriedade comum à maioria dos livros de Ensino Médio, introduzindo o conceito de espaço amostral eqüiprovável, o qual representa um atributo do modelo de probabilidade, não do espaço amostral.

O L10 define corretamente Probabilidade; entretanto, os exemplos, em sua maioria, estão relacionados aos jogos de azar, o que é inadequado, de acordo com os PCN+.

Os livros analisados não abordam a Probabilidade como freqüência relativa, o que seria apropriado por estabelecer uma relação com a Estatística e por permitir a exploração do conteúdo com o uso do computador, ou mesmo com experimentos manuais. Perdem a oportunidade de contextualizar o ensino da Matemática.

Todos os livros analisados procuram desenvolver o conteúdo de independência a partir da regra do produto de probabilidades, associado a subconjuntos de um mesmo espaço amostral. Não encontramos nenhum livro que abordasse o conteúdo de independência com relação a diferentes espaços amostrais.

Como a maioria dos estudantes confunde a idéia de eventos independentes com a de mutuamente exclusivos, seria conveniente que os livros didáticos mostrassem a diferença entre as duas. Nenhum deles mostra ou destaca esta diferença. Não há um exemplo concreto ou tratamento geométrico. Ninguém explorou as tabelas de contingência ou a árvore de possibilidades para ilustrar o conceito. O tratamento é absolutamente convencional, quando não é confuso, para um tema que os alunos têm muita dificuldade de entender.

Com exceção do L4 e do L6, todos os livros definem independência a partir da Probabilidade Condicionada. Individualmente, somente o L3 procura demonstrar que da relação de Probabilidade Condicionada concluímos a regra do produto, ou seja,

$p(A/B) = p(A \cap B)/\ p(B) \Rightarrow p(A \cap B) = p(A/B).p(B)$ e se $p(A/B) = p(A) \Rightarrow p(A \cap B) = p(A).p(B)$

Somente o L8 teve a preocupação de definir $p(A) \neq 0$ e $p(B) \neq 0$.

Quanto a exemplos, exercícios e resolução de problemas, no conteúdo relacionado a experimento aleatório, encontramos exemplos introdutórios somente nos L4 e L5. Com exceção do L2 e do L3, todos apresentam exemplos após a definição. Não há exercícios relacionados diretamente com experimento aleatório.

No conteúdo relacionado com espaço amostral e evento, os livros não apresentam exemplos introdutórios ao assunto. A não ser o L2, que apresenta um exercício introdutório resolvido, todos apresentam exemplos após os conceitos. O L2, o L3, o L6 e o L8 apresentam uma série de no mínimo dez exercícios para serem resolvidos. O L10 não apresenta exercícios e os demais apresentam em média três exercícios, ou seja, os autores não motivam o aluno para o tema que será definido.

A maioria dos exemplos, exercícios e problemas presentes nos livros didáticos analisados, com relação ao tema Probabilidades, são apresentados em contextos voltados para jogos de azar, descrevendo resultados de experimentos com cartas, moedas, dados, loterias, roletas e retiradas de bolas de uma urna. Apesar de alguns problemas apontados anteriormente, o capítulo sobre Probabilidades, nos livros didáticos destinados ao Ensino Médio, inclui uma boa coleção de exercícios, dos quais alguns contribuem para o aprendizado; sente-se, contudo, a necessidade da exploração de situações que levem os alunos à tomada de decisões. Trata-se de um dos objetivos dos PCN+ que não é contemplado.

O L5 apresenta um exemplo relacionado com uma tabela de freqüências, na qual não se pode usar a definição clássica, de modo que podemos obter um valor aproximado da probabilidade de um evento, por meio da freqüência relativa.

Com relação à Probabilidade Condicionada, dependência e independência, o L3 apresenta um exemplo introdutório no qual há uma pesquisa de opinião e oito exercícios, bem diversificados.

Podemos destacar de forma positiva o L1, o L3, o L6 e o L8, que apresentam o conceito e as atividades relacionadas com a distribuição binomial, que é um tema apropriado à interdisciplinaridade, de acordo com as recomendações dos PCN+.

A origem do projeto interdisciplinar coloca-se no contexto da pós-modernidade, respondendo a necessidade de superação dos entraves causados pelo paradigma de fragmentação disciplinar atribuído ao racionalismo (DENKER, 2002)

Na maioria dos livros analisados, não há correspondência entre as atividades propostas e os conceitos apresentados na parte teórica; além disso, há pouca variedade de exemplos.

Apesar de alguns livros apresentarem atividades voltadas ao dia-a-dia dos alunos, deixam a desejar na parte teórica, nos exemplos e nos exercícios resolvidos, os quais, na maioria das vezes, estão relacionados a jogos e também distantes das propostas dos PCN+.

Há poucos exercícios relacionados com experimento aleatório, que é um conceito básico para o desenvolvimento do conteúdo de Probabilidade. Os livros didáticos analisados não dedicam a atenção que deveriam a esse conteúdo.

A probabilidade é apresentada por meio de sua definição clássica. A definição freqüentista e a axiomática não são exploradas.

Quanto ao conteúdo de Probabilidade Condicionada, eventos independentes e dependentes, a maioria dos livros dificulta a compreensão dos conceitos e apresenta uma proporção de exercícios muita pequena para um tema que deveria ser bem mais explorado.

4 ESTATÍSTICA

4.1 Introdução

A origem da Estatística é mais antiga que a origem da Probabilidade. Existem provas de registros estatísticos feitos na China há mais de 1000 anos antes da era cristã. É conhecido dos cristãos, por exemplo, o recenseamento dos judeus, ordenado pelo imperador Augusto. Trata-se de uma prática que continua até os dias de hoje, inclusive em nosso País, com o recenseamento procedido a cada decênio.

No Renascimento o interesse pela coleta de dados foi despertado em função de suas aplicações à administração pública. A obra pioneira de Francesco Sansovini (1521 -1586), representante da orientação descritiva dos estatísticos italianos, publicada em 1561, é um exemplo dessa época. Ainda hoje, no conceito popular, a Estatística está associada a dados numéricos apresentados em tabelas e gráficos. Entretanto, o desenvolvimento da Estatística deve-se à sua possibilidade de auxiliar na solução de problemas da sociedade, o que garante à disciplina a facilidade de interagir com as demais.

A primeira tentativa de chegar a conclusões a partir de dados numéricos deve-se ao inglês John Graunt (1620 -1674) que, em 1662, publicou um livro intitulado "*Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made Upon the Bills of Mortality"* sobre razões e proporções de fatos vitais, no qual ele relata os resultados de sua observação de uma certa regularidade estatística em um grande número de dados.

Foi William Petty (1623-1683), em continuidade ao trabalho de Graunt, quem deu o nome de Aritmética Política à nova arte de analisar dados sobre fatos relacionados com o governo.

Dentre os trabalhos desse período, destaca-se o do astrônomo inglês Edmond Halley (1656-1742) para resolver os problemas de rendas vitalícias das companhias de seguro. Deve ser relacionado também o nome do Richard Price (1723-1791), considerado fundador da atuária, na Inglaterra.

O ajuste de curvas foi outro problema que recebeu a atenção dos matemáticos, como do suíço Leonhard Euler (1707-1783), do francês Pierre Simon Laplace (1747-1827), do italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), do francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833), do inglês Thomas Simpson (1710-1761) e de Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Com os descobrimentos feitos por esses estudiosos, a Estatística avançou significativamente, sendo reconhecida na *British Association for the Advancement of Science*, em 1834, a partir de qual nasceu a *Royal Statistical Society*. No momento de sua fundação, definiu-se Estatística como “um conjunto de fatos, relacionados com o homem, suscetível por ser expresso por números e suficientemente numerosos para serem representados por leis”.

Em 1885 foi criada a primeira sociedade estatística internacional, denominada Instituto Internacional de Estatística (ISI).

Segundo Bussab e Morettin (2002, p.1),

> Em alguma fase do seu trabalho, o pesquisador depara com o problema de analisar e entender um conjunto de dados relevante ao seu particular objeto de estudo. Ele necessitará trabalhar os dados para transformá-los em informações, para compará-los com outros resultados, ou ainda para julgar sua adequação a

> alguma teoria. De modo geral, podemos dizer que a essência da Ciência é a observação e que seu objetivo básico é a inferência, que pode ser dedutiva, na qual se argumenta das premissas às conclusões, ou indutiva, por meio da qual se vai do específico ao geral.

Até 1900, a Estatística Descritiva, mesmo com suas limitações, deu grande contribuição ao crescimento da ciência. A partir daquele momento, ganha força a Estatística Inferencial, com os trabalhos dos ingleses Ronald Fischer (1890-1962) e Karl Pearson (1857-1936), de modo que, a partir de 1960, a maior parte dos livros didáticos incluem a Estatística Inferencial.

É indiscutível que o Século XX foi o século da Estatística. Ela passou a ser considerada uma das ciências fundamentais e uma das bases do método científico (SOUZA, 2005).

Recuperada a gênese da Estatística, na seqüência deste capítulo analisam-se os conceitos, propriedades e diversidade de exercícios, apresentados nos livros didáticos de Matemática da amostra, que tenham relação com a unidade temática de Estatística, incluída nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+).

4.2 Conceitos básicos

A seguir, um estudo sobre os conceitos, propriedades e atividades desenvolvidas pelos livros da amostra, divididos em: organização dos dados; apresentação tabular; apresentação gráfica, interpretação e análise de tabelas e gráficos, medidas de tendência central, medidas de variabilidade, assimetria e curtose.

4.2.1 Organização dos dados

A matéria prima para o desenvolvimento do trabalho estatístico é a organização dos dados, que devem ser fidedignos e homogêneos.

Segundo Stevenson (1981, p. 11),

> Em sua forma não processada, os dados podem quase não ter sentido. Grandes quantidades de números tendem a confundir, ao invés de esclarecer, simplesmente porque nossa mente não é capaz de abranger a variedade e os detalhes inerentes a grandes conjuntos de números. Ficamos simplesmente atolados em pequenos detalhes.

Com o crescimento da Informática no Século XX, tornou-se possível analisar rapidamente grandes conjuntos de dados, produzindo-se uma redução de cálculos. Apesar disso, os livros didáticos não estimulam o uso de computadores.

De acordo com Viali (2004, p. 353),

> A proposta é um ensino-aprendizagem que elimine ou reduza ao mínimo possível o trabalho braçal e improdutivo do aluno, que também exclua, por completo, de encher quadros e quadros de conteúdo para que o estudante passe a maior parte do tempo atarefado, num mero exercício de cópia: das anotações do professor para o quadro e do quadro para o caderno do aluno, sem, no entanto, passar pela reflexão de nenhum dos dois. O conhecimento deve ser proposto e discutido, avaliado, analisado e, sempre que possível, reproduzido como se estivesse sendo novamente descoberto.

Se o volume de dados for pequeno, os cálculos podem ser realizados manualmente, com o auxilio de uma calculadora, mas esse normalmente não é o caso. Por isso, uma abordagem computacional é praticamente indispensável.

Segundo Borba (1999, p. 285),

> A introdução de novas tecnologias – computadores, calculadoras gráficas e suas interfaces que se modificam a cada dia – têm levantado diversas questões. Dentre elas destaco as preocupações relativas às mudanças curriculares, às novas dinâmicas na sala de aula, ao “novo” papel do professor e o papel do computador nessa sala de aula.

Hoje, é muito freqüente, principalmente na elaboração de projetos, uma análise estatística descritiva, mas também uma análise inferencial que, por meio de programas de computadores, é mais rápida de se executar e resulta mais precisa.

Para representar diferentes tipos de dados, definimos variáveis, ou seja, símbolos, associados a conjunto de dados, que podem assumir diferentes valores. As variáveis podem ser divididas em qualitativas e quantitativas.

Variáveis quantitativas podem ser de dois tipos: discretas e contínuas. São discretas as variáveis em que os valores formam um conjunto de pontos isolados e, contínuas, as que podem tomar todos os valores de um intervalo. As variáveis qualitativas dividem-se em nominal, que é aquela em que a ordem dos dados não é necessária e ordinal, que é aquela para a qual existe uma ordem de seus resultados.

Quanto às variáveis qualitativas, em certas situações, podemos atribuir valor numérico aos possíveis atributos, como na hipótese de uma variável “sexo” a que atribuíssemos os valores numéricos 1 e 2, representando masculino pelo valor numérico 1, e feminino pelo valor numérico 2. Nesse caso, faríamos a análise como se a variável fosse quantitativa, desde que o procedimento fosse passível de interpretação.

De acordo com as considerações anteriores, esperávamos que uma percentagem significativa de livros didáticos, editados a partir de 1999, como os da amostra, convergisse para idéias semelhantes às definidas acima.

Dos livros selecionados, constatamos que mais de dois terços abordam algum conteúdo de Estatística, ou seja, L2, L4, L5, L6, L7, L9 e L10 o fazem. O L1, o L3 e o L8, contudo, não apresentam conteúdos de Estatística.

O L2 é dividido em três partes e, no último capitulo da parte dois, com o título de "Estatística Elementar", o autor introduz o assunto com o seguinte conceito:

> Chamamos de estatística o conjunto de processos, métodos e técnicas utilizadas para descrever uma determinada situação, representada por uma coleção de dados numéricos, cuja organização permite um melhor conhecimento de seu significado e do fenômeno mostrado.

O L4 inicia primeiro capítulo da unidade F (Noções de Estatística), com o título "Organizando os dados em tabelas", o qual começa com um vocabulário estatístico, introduzido por meio de exemplos com o índice de custo de vida e segue apresentando as etapas, como coleta, organização e análise dos dados. Essa introdução poderia ser mais completa, ou seja, poderia explicar a importância desses dados na previsão estatística. Na página 543, é confusa a afirmativa de um quadro de freqüência absoluta acumulada, no qual consta a observação "14 alunos não obtiveram nota 7,0 nesta classe". Na página 546, o autor define um termo denominado "marca da classe", como sendo o ponto médio, o que não é usual. Em seguida, por meio de um exemplo, afirma que 17,5% dos alunos têm altura maior que 2 m, em um contexto em que o certo seria "maior ou igual, ou pelo menos 2 m".

O L5, "Matemática: conceitos, linguagens e aplicações", volume 2, com 32 capítulos e dez unidades, aborda Estatística na unidade sete, nos capítulos 23 e 24, denominados "Noções de Estatística" e "Medidas Estatísticas", respectivamente.

No capítulo que trata das Noções de Estatística, conceitua universo estatístico, amostra, classe e amplitude de classe e define rol. Apesar de o livro apresentar uma boa introdução, traz um termo inusitado:

> classe unitária, definida por: ”um único número real também pode ser considerado uma classe. Este tipo de classe é denominado classe unitária”.

O L6, “Matemática: Ensino Médio”, volume 2, é dividido em quatro partes. Na primeira unidade da parte um, aparece a Estatística. Em tal unidade, faz uma introdução e, em seguida, mostra, por meio de um exemplo para que servem a Estatística e a linguagem da Estatística, conceituando população, individuo e variável. Cita os tipos de variáveis e define-as de maneira clara. Por meios de problemas e exercícios, mostra bem a diferença entre variáveis discretas e continuas. Insere exemplos e exercícios voltados para o cotidiano dos alunos, o que vem ao encontro das orientações dos PCN+.

O L7 faz uma introdução; após, divide a Estatística em Descritiva e Inferencial e mostra a diferença entre população e amostra e entre variável contínua e discreta. Na introdução das distribuições de freqüências, o autor define rol, desconhecendo a existência dos computadores.

O L9, volume 3, inicia o capítulo 1 com a unidade Estatística, por meio de uma breve história e conceitos básicos bem abrangentes, mostrando a diferença entre variáveis quantitativas e qualitativas, discretas e contínuas. Apresenta, também de forma clara, a diferença entre população e amostra.

O L10, “Matemática: de olho no mundo do trabalho” tem 15 capítulos. Introdução à Estatística é apresentada no capítulo 11. O autor inicia o capítulo mostrando que a primeira providência que devemos tomar quando deparamos com um conjunto de dados numéricos é organizá-los. O livro também afirma, na introdução, que a Estatística estuda a tomada de decisões, sob condição de incerteza, com o menor risco possível.

4.2.2. Apresentação tabular

A apresentação tabular consiste em apresentar os dados em forma de tabelas.

A apresentação tabular pode ser feita por meio de dados não agrupados e de dados agrupados. Os dados não agrupados devem ser apresentados em forma de tabelas denominadas de séries estatísticas. Os dados agrupados devem ser apresentados em distribuições de freqüências.

Quando se estuda uma variável, o maior interesse do pesquisador é conhecer o comportamento dessa variável, analisando a ocorrência de suas possíveis realizações (BUSSAB; MORETTIN, 2002).

Dentro desse contexto, o estudo das séries estatísticas e das distribuições de freqüências é relevante para verificar uma maneira de se dispor um conjunto de realizações, a fim de se ter uma idéia do todo.

As distribuições podem ser apresentadas nos livros didáticos, tanto no estudo da Estatística, quanto no estudo da Probabilidade. Na Estatística são denominadas de "distribuições de freqüências" e, na Probabilidade, de "distribuição de probabilidade".

Às vezes é necessário conhecermos a quantidade de valores que são inferiores a um determinado valor, de modo que pode ser de interesse o cálculo das freqüências acumuladas, que se obtém repetindo a freqüência absoluta simples da primeira classe e, em seguida, somando-a com a freqüência absoluta simples da segunda classe. Desse modo, encontramos a freqüência acumulada da segunda classe. Repetindo o processo, construímos a coluna das freqüências absolutas acumuladas.

Quanto aos resultados em percentuais, muito freqüentes no dia a dia, define-se a freqüência relativa, obtida por meio do quociente entre a freqüência absoluta simples e o numero de dados. De modo análogo à freqüência simples acumulada, obtém-se a freqüência relativa acumulada.

O L1, o L3 e o L8 não apresentam esse conteúdo. O L2 inicia o tema relacionado com distribuição de freqüências por meio de um exemplo que mostra o número de aparelhos de tevê sintonizados em certo canal, num mesmo horário, agrupando-os de maneira incorreta em intervalos de classes. Não mostra a preocupação com a variável, ou seja, não se importa com o fato de a variável ser contínua ou discreta.

O L4 define as freqüências que compõem uma distribuição, representando-a por tabelas de freqüências com e sem intervalos de classes. Após definir freqüência absoluta, como na maioria dos livros, apresenta um exemplo de variável contínua por meio de números inteiros.

O L5 apresenta uma distribuição de freqüência, por meio de um exemplo de tabelas de freqüências com classes, no qual aparece o volume em mililitros. Em seguida, conceitua classe unitária: “um único número real também pode ser considerado uma classe” e apresenta um exemplo.

O L6 mostra a representação de dados estatísticos por meio de exemplos de tabelas de freqüências com e sem intervalos de classe. Apresenta uma tabela de freqüências, sem intervalos de classe, por meio de uma variável contínua, representado-a por números inteiros.

O L7 utiliza-se, ainda, do rol para construir uma tabela de freqüências sem classes, desconhecendo o uso de computadores.

O L9 inicia pelo desenvolvimento do tema “distribuição de freqüências” definindo, de forma clara, freqüência absoluta; entretanto, ainda comete erros que podem provocar confusão na aprendizagem dos alunos, quando apresenta exemplos de variáveis contínuas por meio de tabelas sem intervalos de classes e através de números inteiros.

O L10 organiza tabelas de freqüências, por meio de exemplos, apresentando somente a freqüência absoluta simples. No primeiro exemplo, coloca uma lista de 100 notas, ou seja, uma variável contínua, representando as notas somente por números inteiros; para tornar a lista mais compreensível, agrupa as notas em ordem crescente, desconhecendo a utilidade dos computadores.

4.2.3 Apresentação gráfica

A apresentação gráfica consiste na apresentação dos dados, por meio de gráficos ou diagramas. Segundo Bussab e Morettin (2002), os métodos gráficos têm encontrado um uso cada vez maior, devido ao seu forte apelo visual.

O gráfico de linhas é adequado para a representação de dados provenientes de uma série temporal. No eixo das abscissas, marcam-se os pontos referentes ao tempo;

no eixo das ordenadas, marcam-se os pontos da variável que está sendo estudada. Por meio de um par ordenado, marca-se a coordenada. Finalmente, traçam-se linhas retas entre as coordenadas.

O gráfico de barras é um gráfico no qual cada item observado é representado por uma barra horizontal. Nesse gráfico, traça-se uma barra, partindo do eixo das ordenadas, cujo comprimento é proporcional à freqüência absoluta ou relativa e está representada no eixo das abscissas. De maneira análoga, constrói-se o gráfico de colunas, representado por uma barra vertical, em que a freqüência absoluta ou relativa está localizada no eixo das ordenadas.

O gráfico de setores ou de pizza é aquele em que os dados originais da tabela devem ser modificados, adaptando-se esses dados às características do próprio gráfico, ou seja, de uma circunferência cuja medida é em graus. Sua construção deve ser proposta quando nos interessa o peso que um dos itens propostos tem sobre o total ou sobre os outros itens. Cada setor circular representa um item e é proporcional à freqüência do mesmo.

O gráfico de ramo-e-folhas, descrito por Tukey (1977), diferencia-se dos anteriores, uma vez que deve obedecer a algumas etapas, tais como: a ordenação dos dados; separação em um ou mais dígitos, segundo o número de linhas que se deseja obter. Os dígitos selecionados são colocados um abaixo do outro e separados por um traço vertical; após cada dígito, ordenamos os outros números, em ordem crescente, nas linhas correspondentes, incluindo os repetidos. É um gráfico que conserva todos os valores observados e, ao mesmo tempo, nos proporciona um diagrama que expressa a forma da distribuição.

A escolha do número de linhas do ramo-e-folhas é equivalente à escolha do número de classes de um histograma (BUSSAB e MORETTIN, 2002).

Para representar uma variável contínua, utilizamos uma tabela de freqüências com intervalos de classes e a representamos por meio do histograma e dos polígonos de freqüências. O histograma se obtém por meio da construção de retângulos justapostos, cujas áreas são proporcionais às densidades dos intervalos. O polígono de freqüências resulta da união dos pontos médios das bases superiores dos retângulos do histograma. A ogiva se obtém unindo os pontos cujas coordenadas são a abscissa correspondente ao limite superior de cada classe e, a ordenada, a freqüência absoluta ou relativa do intervalo de classe correspondente.

O L1, o L3 e o L8 não apresentam o conteúdo. O L2, indica o histograma e o polígono de freqüências para representar uma tabela de freqüências com intervalos de classe; entretanto, de forma errônea, cita como exemplo uma variável discreta. Na página 320, com o título de “Contexto”, os autores apresentam o gráfico de colunas, de linhas e de setores ligados às mais diversas situações do nosso cotidiano.

O L4, indica o gráfico de barras para representar uma tabela de freqüências, sem intervalos de classe, e a representa por meio de um gráfico de hastes. Em seguida, utiliza o gráfico para representar o polígono de freqüência simples, unindo as extremidades de cada uma das hastes por meio de linhas retas. Na representação, sem intervalos de classe, utiliza como exemplo uma variável contínua. Usa o histograma para representar uma tabela de freqüências com intervalos de classes e, na construção, faz a observação transcrita abaixo.

> Sobre cada um dos intervalos, construiu-se um retângulo de área proporcional à freqüência absoluta respectiva.

Em seguida, escreve:

> Da mesma distribuição pode-se obter um histograma de freqüências acumuladas.

Finalmente, constrói um gráfico de setores, por meio de um exemplo, mas não explica o significado de cada setor.

O L5, conceitua classe unitária representando-a por meio de um gráfico de linhas, um gráfico de barras verticais e um de barras horizontais. Finalmente, por meio de exemplos, mostra a construção de um gráfico de setores e de um histograma. Segundo o autor, temos os seguintes conceitos de classe unitária, de gráfico de setores e histograma:

> Classe unitária: Um único número real também pode ser considerado uma classe. Esse tipo de classe é denominado **classe unitária**.
>
> Gráfico de setores: Divide-se um círculo em setores, com ângulo de medidas proporcionais às freqüências das classes.
>
> O histograma é um gráfico utilizado para representar uma distribuição de freqüências em que as classes não são unitárias.

No gráfico por setores, transforma as freqüências diretamente para graus, não dando importância aos percentuais, os quais poderiam representar mais adequadamente cada setor.

O L6 apresenta um texto no qual explica as formas de utilização dos gráficos.

> Embora as tabelas auxiliem na representação e interpretação dos dados coletados, muitas vezes o excesso de informações que contêm contribui para que seja difícil distinguir com clareza os aspectos mais centrais do levantamento estatístico. Uma forma de contornar esse problema é apresentar os dados por meio de gráficos.
>
> O gráfico estatístico utiliza variados recursos visuais para representar os dados de uma pesquisa de maneira atraente, possibilitando ao leitor compreender e comparar esse dados rapidamente.

Em seguida, mostra a representação de dados por meio de exemplos de gráficos, explicando a sua utilização. Exemplifica o gráfico de colunas e de barras por meio da taxa de escolarização e dos maiores aumentos em 2002.

> Os gráficos em barras verticais ou horizontais são geralmente utilizados para comparar diferentes variáveis ou diferentes valores de uma mesma variável.
>
> No gráfico em setores, salienta-se a participação de uma variável no universo inteiro da população, ou seja, destaca-se a relação entre os diversos valores da variável e o total da população.
>
> O gráfico de linhas é utilizado para representar o crescimento ou decrescimento da variável. Nele se visualizam o ponto de máximo e o ponto de mínimo, entre os quais a variável tem um determinado comportamento.

O autor desse livro representa uma tabela de freqüências sem classes por meio de um gráfico de colunas, no entanto, utiliza a variável contínua “nota”, representando-a somente por números inteiros, de modo que no livro existe uma série de erros.

Segundo o autor,

> O histograma é um gráfico formado por um conjunto de retângulos justapostos, cujas bases se localizam sobre o eixo horizontal, de tal modo que os seus pontos médios coincidam com os pontos médios dos intervalos de classe. As larguras das bases dos retângulos são iguais às amplitudes dos intervalos de classe e as alturas correspondem às freqüências de cada classe.
>
> Polígono de freqüência é um gráfico de linha no qual as freqüências são marcadas sobre retas perpendiculares ao eixo horizontais, traçadas pelos pontos médios dos intervalos de classe.

O livro utiliza como exemplo, na construção do histograma e do polígono de freqüências, a variável contínua “tempo de gestação”; representa-a, entretanto, em dias, tornando-a discreta.

O L7, apresenta, por meio de exemplos, os gráficos de colunas, barras e setores, mas dá mais ênfase aos graus. Não mostra o gráfico de pontos e linhas, utilizado com freqüência na representação de séries temporais. Na representação das tabelas de freqüências, apresenta o histograma e o polígono de freqüência simples.

O L9, representa uma tabela de freqüências por meio do histograma e do polígono de freqüência simples. Destacam-se, também, nos conteúdos desse livro, os gráficos de barras, colunas, linhas e setores, com exemplos voltados para o dia-a-dia dos alunos e com facilidade de se fazerem relações com outras disciplinas.

O L10, apresenta o conteúdo por meio de exemplos, gráfico em linhas, de barras, de barras múltiplas e de setores. No decorrer dos exemplos define

> Gráficos cartesianos como aqueles utilizados quando dispomos de duas variáveis e desejamos representar uma delas em função da outra. É a forma mais elementar de representação gráfica em dois eixos coordenados e fundamentais para a compreensão da grande maioria dos demais tipos de gráficos.
>
> Gráficos em linhas é uma simplificação do gráfico cartesiano, na qual se utiliza uma linha poligonal para representar a tendência de variação (crescimento e decrescimento) dos dados relativos a uma determinada informação.
>
> Os gráficos em barras são também uma variação do gráfico cartesiano. Nele, os dados são representados em retângulos proporcionais aos valores da variável, dispostas vertical ou horizontalmente. Os retângulos podem também ser substituídos por formas prismáticas, cilíndricas ou mesmo por desenhos que sejam mais adequados à informação que se deseja transmitir por meio do gráfico.
>
> Os gráficos de setores não se baseiam na representação cartesiana. Nesse tipo de gráfico, também chamado gráfico de pizza, um círculo representa o total dos dados do fenômeno estudado. Esse círculo é dividido em setores proporcionais às parcelas das variáveis que compõem o total. Em geral gráfico de setores são expressos em porcentagens.

Para o autor,

> Histograma é uma forma particular de gráfico de barras, utilizada para representar graficamente uma tabela de distribuição de freqüências.

Exemplifica o conceito através do número de aparelhos de tevê sintonizados em certo canal em um mesmo horário. Em seguida, representa os dados por meio de uma distribuição de freqüências com intervalos de classes.

Segundo o autor,

> Para construir o histograma relativo ao exemplo, traçamos barras sem espaços entre elas, lado a lado, com alturas fi e bases de altura h, ou seja, iguais aos intervalos de classe.
>
> A partir do histograma, podemos traçar os polígonos de freqüências. Basta ligar os pontos médios do topo das barras com segmentos de retas consecutivos.

4.2.4 Interpretação e análise de tabelas e gráficos

De acordo com Bussab e Morettin, (2002, p. 1)

> Tradicionalmente, uma análise descritiva de dados limita-se a calcular algumas medidas de posição e variabilidade, como média e variância, por exemplo. Contrária a essa tendência, uma corrente mais moderna, liderada por Tukey (1977), utiliza principalmente técnicas gráficas, em oposição a resumos numéricos. Isso não significa que sumários não devam ser obtidos, mas uma análise exploratória de dados não deve se limitar a calcular tais medidas.

A leitura crítica dos dados representados, tanto de forma tabular, quanto de forma gráfica, é uma necessidade da sociedade cada vez mais complexa. No trabalho com os alunos do Ensino Médio, essa leitura não deve ser somente superficial, mas realizada de modo a levar o aluno a uma interpretação da informação contida na representação dos dados.

O L1, o L3, o L7, o L8 e o L9 não tratam desse tema. O L2, dentro de um tema denominado “Contexto”, apresenta os principais tipos de gráficos com algumas situações de interpretação.

O L4 mostra a construção de alguns gráficos, sem a preocupação de interpretá-los. Já, o L5, em exercícios complementares, apresenta uma série de atividades nas quais explora a interpretação dos gráficos.

O L6 inicia o desenvolvimento do conteúdo com um gráfico sobre acidentes de vôos, no qual já aparece uma forma de interpretação. Em seguida, apresenta uma série de exemplos nos quais há questionamentos envolvendo interpretação.

O L10 explora de forma abrangente a interpretação de tabelas e gráficos.

4.2.5. Medidas de posição ou medidas de tendência central

Uma vez apresentados os dados na forma tabular ou gráfica, o próximo passo é fazer um resumo dos mesmos. Para isso são utilizadas as medidas de posição, de dispersão, de assimetria e de curtose. Como as medidas de posição tendem a se localizar em um ponto central de dados ordenados do conjunto, também recebem o nome de medidas de tendência central.

A medida de posição mais conhecida e utilizada na Estatística é a média aritmética devido principalmente à simplicidade de sua obtenção e às propriedades matemáticas, a ela inerentes, que permitem sua utilização na inferência. Existem outros tipos de médias, tais como, a geométrica, a harmônica e a interna. No entanto, elas são pouco comuns na inferência.

Se a distribuição for simétrica, fica perfeitamente caracterizado o uso da média. Por outro lado, quando a distribuição é assimétrica, a medida mais adequada é a mediana ou a moda.

A mediana representa o valor central da variável, quando as observações se apresentam de forma ordenada. Portanto, 50% das observações estão abaixo da mediana e, conseqüentemente, 50% delas estão acima. Na prática, a mediana é bem menos usada que a média, mas tem a vantagem, em relação a ela, de ser menos sensível a valores discrepantes e representar melhor um conjunto com forte assimetria.

A moda de um conjunto de dados é o valor que ocorre com maior freqüência. Ela pode não existir e, mesmo que exista, pode não ser única (SPIEGEL, 1993). Quando a variável é qualitativa, não se pode calcular a média. Para se descrever um grupo deve-se, portanto, utilizar a moda. Em uma distribuição pode haver mais de uma moda. Se existe uma só, denomina-se unimodal; duas, bimodal e, mais de duas, multimodal.

Quando a variável está agrupada em intervalos de classes, a moda é arbitrária e pode ser encontrada por um processo gráfico. Existem pelo menos três algoritmos para determiná-la, sendo o mais simples o de Pearson. A moda é uma medida que pode apresentar certas limitações, como não existir, ou não ser única.

O L1, o L3 e o L8 não desenvolvem esse tema. O L2 faz uma breve introdução sobre as medidas de tendência central, ou medidas de posição, dividindo-as em média, mediana e moda. A média é definida para dados agrupados e não agrupados. A mediana, para dados não agrupados, é apresentada de forma clara, mas, para dados agrupados em intervalos de classes, a definição deixa a desejar. O autor faz um breve comentário sobre a moda para dados não agrupados, não mostrando que um conjunto desse tipo pode apresentar mais de uma moda. Em seguida, traz um exemplo de mediana para dados agrupados em intervalos de classe, correndo o risco de provocar confusão para os alunos, uma vez que, após a moda, apresenta um exemplo de mediana.

O L4 conceitua média aritmética simples por meio de um exemplo e apresenta a sua fórmula. Logo após, conceitua mediana para dados em série, em que aparece um k, antes não relacionado com 2k ou 2k+1, elementos de um conjunto de dados.

Segundo Lima (2001, p. 227),

> Para o cálculo da mediana, aparece um misterioso k nas explicações, sem que antes tenha sido dito que a lista de dados tinha 2k ou 2k+1 elementos. Além disto, quando o número de dados é par, aparece uma fórmula errada, Md = k + (k+1)/2, evidenciando uma confusão entre os elementos de uma lista e suas posições na lista.

Em seguida, o L4 estende a definição anterior, de forma confusa, para dados agrupados. Nos dados agrupados em classe, utiliza o conceito anterior e interpolação.

O L5, no capítulo que trata das medidas estatísticas, faz uma introdução e, na seqüência, apresenta um exemplo; conceitua média aritmética e expõe a fórmula da mesma. De maneira análoga, desenvolve a média aritmética ponderada. Em seguida, apresenta exemplos e conceitua moda e mediana, para dados não agrupados.

O L6 mostra como se calculam a média aritmética simples, a média aritmética ponderada, a moda e a mediana, por meio de um exemplo. Faz um comentário sobre curvas simétricas e assimétricas, por meio de um “Flash Matemático” e, logo após, apresenta uma observação sobre a média e a mediana.

> Para finalizar, é importante salientar que a média aritmética sofre influência de todos os dados. Por isso, é preferível às vezes, trabalhar com a mediana, que não sofre a influência de valores extremos (muito altos ou muito baixos).

O L7 não introduz as medidas de posição, mas define média, moda e mediana para dados não agrupados e agrupados, apresentando as fórmulas das mesmas. Na apresentação da moda para dados agrupados em classes, não observa que a freqüência absoluta máxima pode aparecer, ou não, em dois ou mais intervalos.

O L9 faz um breve comentário sobre o assunto e, em seguida, conceitua média aritmética com a notação Xm e apresenta dois exemplos, um deles bem contextualizado. De forma análoga, define média aritmética ponderada. A mediana e a moda são definidas para dados não agrupados e agrupados, sem intervalos de classes. Na página 26, há um gráfico relacionado com a volta do público ao cinema, através do qual explora a média e a moda.

O L10 não conceitua medidas de posição; entretanto, conceitua média aritmética simples, média geométrica, média harmônica e media aritmética ponderada. Traz exemplos de cada uma e apresenta aplicações do conteúdo à disciplina de Física. Em seguida, conceitua mediana, moda e exemplifica os conteúdos por meio de exercícios e problemas resolvidos.

4.2.6 Medidas de dispersão ou variabilidade

Ao grau no qual os dados numéricos tendem a dispersar-se em torno de um valor médio chama-se variação ou dispersão dos dados (SPIEGEL, 1993).

As medidas de tendência central são insuficientes para descrever um conjunto de dados. Para descrever plenamente um conjunto de dados, utilizamos, além das medidas de tendência central. as medidas de dispersão ou variabilidade, divididas em amplitude, desvio médio, variância, desvio padrão e coeficiente de variação.

Segundo Stevenson (1981, p. 24)

> São necessários dois tipos de medidas para descrever adequadamente um conjunto de dados. Além da informação quanto ao “meio” de um conjunto de números, é conveniente dispormos também de um método que nos permita exprimir a dispersão. As medidas de dispersão indicam se os valores estão relativamente próximos uns dos outros, ou separados.

Entre as principais medidas, a variância representa a média aritmética dos quadrados dos desvios relativos à média. O desvio padrão é a raiz quadrada da variância e apresenta a mesma unidade de medida da média aritmética dos dados. O coeficiente de variação representa uma medida de dispersão relativa e pode ser empregado para comparar distribuições cujos dados apresentam unidades de medidas diferentes.

Além das medidas de posição e de variabilidade, é conveniente conhecermos medidas que avaliam a forma da distribuição. Essas medidas são denominadas medidas de assimetria e curtose.

Na distribuição simétrica, média, moda e mediana coincidem. Se a distribuição não for simétrica, recebe o nome de assimétrica. Nesse caso, pode ser positiva ou negativa.

Se uma distribuição é simétrica, ainda podemos verificar se a mesma é mais aguda ou menos aguda do que a curva normal. A verificação depende de um coeficiente denominado coeficiente de curtose. Se a mesma é mais aguda, recebe o nome de leptocúrtica; caso contrário, é chamada platicurtica. Se coincidir com a curva normal, é mesocúrtica.

O L1, o L2, o L3, o L4, o L7 e o L8 não apresentam conteúdo relacionado com medidas de dispersão. O L5 faz uma introdução das medidas de dispersão e, por meio de um exemplo, conceitua desvio médio absoluto, variância e desvio padrão para dados não agrupados em intervalos de classe.

O L6 divide as medidas de dispersão em variância e desvio padrão e apresenta as suas fórmulas, representando a variância pela letra "V" e o desvio padrão pela letra "S".

O L9 faz uma introdução sobre as medidas de dispersão, definindo desvio, variância e desvio padrão. Em seguida escreve que

> A média aritmética dos quadrados dos desvios é uma medida imaginária, chamada de **variância,** que será indicada por V.

Por fim, define desvio padrão como

> A raiz quadrada da variância representa uma medida real chamada de desvio padrão e podemos indicar por Dp.

O L10 faz uma introdução das medidas de dispersão, por meio de um exemplo, porém não as conceitua. Define amplitude e variância para dados não agrupados e apresenta a fórmula. Em seguida, apresenta etapas de desenvolvimento para o cálculo da variância, de dados agrupados com intervalos de classe e traz a fórmula. Apresenta como notação de desvio padrão a letra "d".

4.2.7 Diversidade de exercícios

O L1, o L3 e o L8 não trazem conteúdo de Estatística. O L2, na página 320, apresenta um item denominado “Contexto”, no qual apresenta uma série de gráficos de conteúdo interdisciplinar, os quais não foram citados durante o desenvolvimento teórico. Na parte do livro destinada à preparação para o vestibular, são apresentados cinco exercícios, a maioria dos quais relacionados com idade, salários e estatura.

O L4 apresenta exercícios propostos e exercícios de revisão. Os exercícios, tanto os propostos, quanto os de revisão, estão relacionados com conjuntos de números, idades, peso, notas e salários. Nos exercícios propostos, página 550, pede para representar uma tabela de freqüências por meio de um histograma de barras, o que é um tanto confuso.

O L5 apresenta atividades relacionadas com vendas, massa e lançamento de dados. Esse livro apresenta, nos exercícios complementares, análise de gráficos com assuntos atuais, entre os quais podemos destacar taxa de desemprego, comparação de linhas telefônicas e níveis de audiência de certos canais de televisão. Da mesma forma, nas medidas de posição e de variabilidade, apresenta atividades e exercícios complementares bem diversificados, dentre os quais podemos destacar os da corrida de Fórmula Um, da escalação de jogadores de basquete, do consumo de combustível, entre outros.

O L6 apresenta problemas e exercícios diversificados. Alguns deles ainda estão relacionados com idade, peso, altura, notas e salários, tal como aparecem na maioria dos livros analisados. Por outro lado, apresenta exercícios relacionados com pesquisa de opinião, por meio de freqüências absolutas e percentuais. Apresenta também exercícios de recenseamento, com todos os alunos da escola, no qual aparecem variáveis como "idade dos alunos, anos de escolaridade, meio de transporte utilizado para ir a escola, local de almoço, número de irmãos, local de trabalho, número de televisores em casa e local de moradia", ou seja, variáveis relacionadas com o cotidiano dos alunos.

O L7 apresenta um número reduzido de exercícios propostos para os alunos, alguns deles requerendo excesso de cálculos.

O L9 apresenta um texto no qual aparece a pergunta "Como é medida a audiência dos programas de TV?". Em seguida, apresenta uma série de questões relacionadas com o texto para serem analisadas em grupos. A maioria dos exercícios propostos ainda propõe as variáveis "idades, alturas, salários" e "notas". Já, na representação gráfica e interpretação dos dados, há uma seleção de exercícios contextualizados e que consideram questões do dia-a-dia dos alunos. Da mesma forma são apresentados os exercícios complementares, os testes e as questões para pensar.

O L10 não mostra novidades nos exercícios e problemas complementares, uma vez que a maioria deles está relacionada com conjunto de números, idades, alturas, notas, número de faltas. Entretanto, na atividade "De olho nos exames e concursos", aparecem temas relacionados com infrações de trânsito, níveis de audiência de certos canais de televisão, organização de sindicatos e epidemia de dengue, que, indiscutivelmente, relacionam-se com o cotidiano dos alunos.

4.3 Relação com os PCN+

O L1, o L3 e o L8 não apresentam o conteúdo de Estatística, que permite aplicar a Matemática a questões reais e de fácil relação com outras disciplinas.

Sobre os outros livros pode-se dizer que todos citam dados numéricos, mas nem todos mostram com clareza etapas que proporcionem a organização dos mesmos, como diferenças entre dados quantitativos e qualitativos, ou entre variáveis discretas e contínuas. Com exceção do L7, nenhum mostrou tais diferenças. O L2 simplesmente menciona a palavra “organização” dentro de um conceito e, em seguida, apresenta um conjunto de dados numéricos, ordenando-os, o que, nos dias de hoje, é uma etapa desnecessária, em função do que os programas de computadores nos possibilitam.

Esses livros não mostram preocupação com a quantidade de dados, ou com a necessidade de os mesmos serem agrupados seja manualmente, seja por meio de programas de computadores, os quais já fazem parte da vida dos alunos desde o berço.

Todos os livros analisados apresentam os conceitos de freqüência absoluta e de freqüência relativa de forma semelhante, com exceção do L10, que não apresenta o conceito de freqüência relativa. Quanto à construção das tabelas, os livros não levam em consideração a diferença entre variável discreta e contínua, uma vez que tratam variáveis contínuas como discretas quando consideram, por exemplo, a variável “altura” em centímetros, ou a variável “peso” em miligramas. O L5 apresenta um exemplo de tabela cuja variável “altura” aparece em metros, mas não faz nenhum comentário sobre variável contínua.

Quanto à forma de apresentação dos dados no gráfico, os mesmos apresentam o gráfico de linhas, de barras, de colunas e de setores. Quanto à representação de tabelas de freqüências, os livros não mostram com clareza a construção do histograma, uma vez que não existe coerência entre a variável em estudo e a sua representação. Utilizam como exemplos variáveis contínuas, adequadas para o histograma, mas, por outro lado, os dados são representados somente por números inteiros, o que mostra uma incoerência. Alguns deles definem a largura da base dos retângulos do histograma como sendo igual ao intervalo de classe e não proporcional. Não utilizam a densidade, que poderiam relacionar com a Geografia.

Quanto às medidas de posição, há pouca teoria e os conceitos são muito superficiais, sem o desenvolvimento das propriedades dessas medidas. As medidas de dispersão não são apresentadas no L5. Entretanto, os outros livros fazem uma introdução do assunto e, em seguida, apresentam as fórmulas. Não exploram a padronização, que é um tema recorrente em todos os vestibulares Quanto à forma da distribuição no gráfico, o assunto é apresentado somente no L7.

Sobre a diversidade dos exercícios, com exceção do L5, já existem exercícios voltados para cotidiano dos alunos e que refletem a preocupação com a interdisciplinaridade. Considerando-se, entretanto, o conteúdo teórico apresentado nos livros analisados, os alunos devem ser muito bem orientado pelo professor para que possam resolver esses exercícios.

Nenhum dos livros analisados propõe a análise de dados com auxílio da calculadora ou do computador, desconsiderando que esses recursos são indispensáveis para evitar o excesso de cálculos e oportunizar ao aluno tempo disponível para desenvolver o raciocínio. Obrigar o aluno a realizar cálculos repetitivos e tediosos é alimentar a já bem estudada aversão pela Estatística e pela Matemática. O

L7 faz um comentário, na página 48, com relação ao uso da calculadora, afirmando que, se a mesma for científica, programável no modo “Estatística”, pode-se obter o resultado da média aritmética, do desvio padrão e outras medidas.

A maioria dos livros didáticos analisados não contempla as propostas apresentadas pelos PCN+ com relação ao conteúdo de Estatística. Apesar de alguns desses livros apresentarem uma série de exercícios relacionados com o cotidiano dos alunos e de serem de fácil relação com outras disciplinas, deixam a desejar na apresentação do conteúdo teórico.

A disciplina deve ser vista com possibilidade de interligação com várias outras disciplinas, solução com o tratamento de problemas reais, com a atuação numa perspectiva mais ampla do que usualmente é abordada (KUENZER,2002).

Não adianta defendermos a formação de alunos reflexivos, um ensino que seja capaz de respeitar a voz dos alunos, uma seleção de conteúdos que estimule a curiosidade dos alunos, se uma grande parte dos professores desconhece os objetivos dos PCN+, que apresentam, como uma das propostas, a análise de situações em que seja necessária a tomada de decisão entre dois ou mais caminhos.

Não se trata de separar o ensino de conteúdos específicos de Estatística, que às vezes não podem ser contextualizados. Não significa que exercícios com enunciados como “faça”, “resolva” ou “calcule” não possam mais ser empregados, mas deve-se ter em mente que os mesmos não são suficientes para o desenvolvimento da cidadania.

5 CONCLUSÃO

Este capítulo apresenta minhas impressões sobre uma amostra de livros didáticos de Matemática, adotados ou indicados por docentes do Ensino Médio, bem como uma síntese sobre a utilidade desta pesquisa, as respostas que encontrei para os problemas que a desencadearam e, também, algumas reflexões que poderão ser consideradas em futuras investigações.

Esta pesquisa abrangeu os livros didáticos editados entre 1992 e 2005, dos quais se analisou uma amostra de dez livros, cujas edições se encontram no intervalo de 1999 a 2005. Apesar de não ter sido realizada a análise de todos os livros didáticos adotados no Ensino Médio, sabe-se que a maioria dos livros aqui analisados são adotados ou indicados por boa parte dos professores de Matemática no Ensino Médio, de modo que podemos considerá-la uma amostra representativa.

Essa investigação procurou mostrar como os livros de Matemática do Ensino Médio estão abordando os temas relacionados com Estatística e Probabilidade e se os mesmos atendem aos objetivos dos PCN+. A análise dos livros foi realizada em termos dos conceitos, exemplos e atividades propostas pelos mesmos.

Considera-se que o livro didático é um instrumento essencial para o professor realizar o seu trabalho; mais do que isso, na maioria das vezes, é o único instrumento à disposição do professor, de modo que os conceitos, os exemplos e as atividades propostas devem ser apresentados de forma adequada para que a qualidade do ensino e a formação do aluno não fiquem prejudicadas.

Da leitura realizada, refletida na conclusão de cada tema abordado, emergiram dados sobre o ensino de Probabilidade e Estatística apresentado nos livros didáticos de Ensino Médio e sua variabilidade.

Como a análise desses livros didáticos desenvolve-se em um período em que o ensino deve estar voltado para as reformas propostas pelo Governo brasileiro, a Estatística e a Probabilidade incluem diferentes formas de pensar em Matemática, envolvendo diferentes contextos de aplicações.

> A **Estatística** e a **Probabilidade** devem ser vistas, então, como um conjunto de idéias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, mais especialmente aquelas provenientes de outras áreas (PCN+ ENSINO MEDIO, 2002).

Os docentes, na elaboração de um livro didático, devem ter clareza de que os livros, assim como as palavras, formam elos comunicativos entre o autor, os professores e os alunos e, tal como elas, podem também dificultar o entendimento, principalmente na Matemática e na Estatística, que já se tornaram um tabu para boa parte dos alunos.

Nesse sentido, os PCN+ asseguram que a compreensão da linguagem Matemática faz parte do aprendizado em Matemática e que aprendê-la, contextualizada, exige a apropriação da sua linguagem específica. Além disso, a promoção da prática dessa linguagem, tal como a interação que ela propicia, favorece a formação da autonomia comunicativa do aluno.

Os símbolos empregados nos conteúdos relacionados com Estatística e Probabilidade são variados e, muitas vezes, complexos para os alunos do Ensino Médio, uma vez que não apresentam uniformidade e podem ainda ser complicados pelos contextos utilizados.

Além disso, as fórmulas apresentadas nesses livros variam de um para outro com muita freqüência e podem provocar dificuldades ao entendimento do conteúdo pelos alunos.

A aprendizagem dos conceitos está associada aos símbolos que devem ser usados para representá-los. As notações devem ser utilizadas de forma adequada e consistente, pois por meio delas podemos propiciar o raciocínio dos alunos. Há, entretanto, uma diversidade de símbolos utilizados nos livros didáticos, os quais podem representar para os alunos significados diferentes para um mesmo conteúdo.

No capítulo de Probabilidade dos livros didáticos, os conceitos e propriedades são apresentados de forma complexa para um nível introdutório de Ensino Médio, uma vez que não respeitam a gradualidade dos conteúdos desenvolvidos. O mesmo ocorre com as atividades que poderiam levar os alunos à construção desses conceitos, o que vem reforçar a idéia de alguns autores, como Celi Aparecida Espasandin Lopes, que propõem o ensino da Estatística e da Probabilidade nas séries iniciais do Ensino Fundamental, com continuidade no Ensino Médio. Segundo esses autores, os conceitos poderiam ser construídos ao longo da trajetória dos estudantes, com níveis crescentes de complexidade, diminuindo a aflição do professor da graduação, o qual, ao invés de alfabetizar matematicamente o aluno, poderia aprofundar o assunto, uma vez que hoje a maioria desses cursos tem somente uma disciplina de Estatística.

Uma das dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Médio tem relação com a forma como os conceitos são apresentados. Poucos livros apresentam um material atraente e ilustrativo, em que os conceitos sejam precedidos por exemplos motivadores, que justifiquem sua introdução no conjunto de saberes pertinentes, levando o aluno a questionar: ”para que serve isto?”.

Entre os conceitos apresentados, ocorre uma certa confusão, comum à maioria dos livros didáticos do Ensino Médio, no que se refere à introdução de espaço amostral eqüiprovável, uma vez que eqüiprobabilidade é um atributo de modelo de probabilidade, e não do espaço amostral.

Poucos livros estudam as probabilidades geométricas, conteúdo apropriado à noção de probabilidade contínua, o qual propicia exemplos bastante motivadores.

Os exemplos apresentados pelos livros didáticos não são significativos e poucos mostram sua importância em relação à interdisciplinaridade. Além disso, no conjunto de atividades propostas para os alunos, poucos deles se referem a situações em que o cálculo das probabilidades esteja envolvido em problemas com um significado relevante para os alunos. É altamente significativa a ausência de problemas envolvendo tomada de decisões, tema de grande aplicabilidade no mundo atual.

Nenhum dos livros didáticos analisados faz a conexão entre a Probabilidade e a Estatística. Nenhum deles tira partido dos histogramas como representação de modelos teóricos. Não se preocupam em mostrar a diferença entre distribuição de freqüências e distribuição de probabilidade.

No capítulo de Estatística, os livros didáticos apresentam os conceitos de forma pouco atraente para os alunos de Ensino Médio, uma vez que estão mais preocupados com os resultados numéricos que com o significado. Como a Estatística é um conteúdo propício à interdisciplinaridade, poderia apresentar exemplos contextualizados e mais relacionados com o cotidiano dos alunos. A Geografia e a História são fontes de distribuições e gráficos. Na Física e na Química, podemos ilustrar graficamente vários tipos de variáveis. No entanto, nada disso é explorado.

Quanto ao tipo de variável, os livros deixam a desejar, pois não mostram com clareza as diferenças entre variáveis quantitativas e qualitativas, discretas e contínuas. Alguns livros dificultam para os alunos a compreensão, pois propõem situações confusas, como, por exemplo, quando definem “altura” como variável contínua e, apesar disso, a representam em centímetros, tornando-a discreta.

Os livros didáticos ensinam como coletar dados, como organizá-los em tabelas e gráficos, mas não mostram a importância desses dados para se fazerem estimativas. Não mostram pesquisas, freqüentes em jornais, por meio das quais poderiam explorar o tipo de amostragem. Não fazem menção ao erro amostral.

Quanto à apresentação dos dados em forma de gráficos, os livros são bem atraentes, reproduzindo o estilo usado em revistas e jornais para ilustrar seus textos, mas pecam na uniformidade.

As medidas de posição e de variabilidade têm foco nos resultados numéricos, muitas vezes desgastantes e contrários ao desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Esse tema pode proporcionar atividades interessantes com os alunos do Ensino Médio, por exemplo, quando mostram que, em certas situações, a mediana é mais conveniente do que a média, ou quando comparam a variância da população com a variância da amostra. Infelizmente, não existe motivação para o estudo dessas medidas nos livros didáticos.

Docentes de Matemática que trabalham com Estatística sabem que os exercícios e problemas propostos apresentam cálculos extensos, de modo que, fazê-los sem o uso de uma calculadora ou de um computador, torna-os desinteressantes e desgastantes, pois desviam a atenção do aluno dos aspectos conceituais das atividades. Portanto, os autores dos livros didáticos de Matemática deveriam dar mais ênfase a esses instrumentos.

A realização desta pesquisa proporcionou-me momentos positivos e outros negativos, na análise dos livros. Os momentos positivos estão relacionados com o aprofundamento dos meus conhecimentos na busca de novos saberes. Os momentos negativos caracterizam-se pela constatação de que, apesar de a maioria dos livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio apresentarem os conteúdos de Estatística e de Probabilidade, os mesmos aparecem de maneira repetida e, na maioria das vezes, sem relação com o dia-a-dia dos alunos, o que vem contra os objetivos dos PCN+.

A Probabilidade e a Estatística ainda estão muito distantes das propostas apresentadas nos PCN+, pois a maioria dos livros didáticos do Ensino Médio não aborda os conteúdos com o objetivo de incentivar a curiosidade, motivar seu estudo e propor atividades interessantes, por exemplo, em uma feira de ciências da escola.

Os livros didáticos não se preocupam em escrever textos que abordem temas de cultura geral, propícios à interdisciplinaridade. Nos dias de hoje, esses materiais deveriam possibilitar aos alunos e aos professores formas de diversificar a apresentação dos conteúdos, propiciando aulas mais motivadoras, que contribuíssem de forma mais incisiva para a aprendizagem dos alunos. Deveriam conduzir a uma abordagem contextualizada, voltada para situações cotidianas em que a Probabilidade e a Estatística se fazem presentes.

Os livros didáticos deveriam ser fontes de idéias, ponto de partida para a investigação, para a resolução de problemas e até mesmo para a proposição de novos problemas. Os livros deveriam mostrar a Matemática como uma ciência em desenvolvimento, propor a construção dos conceitos do simples para o complexo e apresentar suas limitações. Deveriam levar o aluno a formular intuitivamente os conceitos, antes de apresentarem as relações formais e as propriedades.

Os livros didáticos deveriam apresentar sugestões sobre a aplicação dos conhecimentos advindos de outras disciplinas, indicação de leituras que pudessem contribuir para o aperfeiçoamento do trabalho do professor, assim como sugestões de procedimentos, decorrentes de experiências bem sucedidas, a serem adotadas em relação a alunos com maiores dificuldades de aprendizagem.

Acredito que esta pesquisa não seja conclusiva, mas o inicio de muitas outras que poderão surgir, pois podemos nos aprofundar muito mais neste assunto, uma vez que, hoje, principalmente nas escolas estaduais, uma parcela muito pequena de professores trabalha com Probabilidade e Estatística, devido à dificuldade do tema, ou por esses temas estarem relegados aos capítulos finais dos livros didáticos.

Esta pesquisa tem como um de seus resultados mostrar de maneira mais clara ainda o quanto a Estatística e a Probabilidade, como conteúdos da Matemática no Ensino Médio, podem ser significativas para a aprendizagem dos alunos. Além da Probabilidade e da Estatística, a análise combinatória ou contagem compõe um dos temas estruturadores do Ensino Médio que não foi enfocada neste trabalho. A sugestão desta pesquisa é de que se busquem esses outros temas e se procure verificar como são tratados pelos livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio. Será mais uma contribuição que pesquisadores poderão trazer para o ensino e, talvez, para o aprimoramento dos livros didáticos.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, Manoel J. **Matemática para o Ensino Médio**. São Paulo: Scipione, 2001.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2004

BORBA, Marcelo. Tecnologias Informáticas na Educação. **Matemática e Reorganização do Pensamento**. In: BICUDO, Maria A Viggiani (Org). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: Unesp, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação – SEB. **Coleção. Explorando o Ensino de Matemática**. Brasília, MEC, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Programa Nacional do Livro Didático 2004. **Guia de livros didáticos 1ª a 4ª séries**. v.2, 275 p. Brasília: MEC, 2003-a. Disponível em <http://www.mec.gov.br/sef/fundamental/ ftp/volume 2. pdf>. Acesso em: 01 jun. 2003.

BUCCHI, Paulo. **Curso Prático de Matemática**. São Paulo, Moderna, 1999.

BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A . **Estatística básica**. São Paulo: Saraiva, 2002.

CARNEIRO, Eny Maia Moaci. **A Reforma do Ensino Médio em questão**. São Paulo: Biruta, 2000.

CIENCIAS DA NATUREZA, MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática - Contextos & Aplicações**. São Paulo, Ática, 2003.

DENCKER, Ada de Freitas Maneti. **Pesquisa e interdisciplinaridade no Ensino Superior**. São Paulo: Aleph, 2002.

GENTIL, Nelson; GRECO, Sergio Emilio; SANTOS, Carlos Alberto Marcondes. **Matemática para o Ensino Médio**. São Paulo: Ática, 1999.

GIOVANNI, Jose Rui et al. **Matemática Completa**. São Paulo: FTD, 2002.

GOULART, Márcio Cintra. **Matemática no Ensino Médio**. São Paulo: Scipione, 1999.

HOEL, Paul G. **Estatística elementar**. Tradução: Carlos Roberto Vieira Araújo. São Paulo: Atlas, 1979.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática - Ciências e Aplicações**.

KIYUKAWA, Rokusaburo; SHIGEKIYO, Carlos Tadashi; YAMAMOTO, Kazuhito. **Os Elos da Matemática**. São Paulo: Saraiva, 1992.

KUENZER, Acácia. **Ensino Médio**: Construindo uma proposta para os que vivem de trabalho. São Paulo: Cortez, 2002.

LIMA, Elon Lages. **Exame de Textos**: **análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Impa, 2001.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Probabilidade.** Tradução de Rutth Ribas Itacarabi. São Paulo: Makron Books, 1993.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. **A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental:** uma análise curricular. 1998. 125p. Dissertação (Mestrado em Educação) Faculdade de Educação da UNICAMP, Campinas: 1998. Disponível em <http://www.ime.unicamp.br/~lem/publica/ce_lopes/est_prop.pdf >. Acesso em: 24 nov. 2005.

MEYER, Paul L. **Probabilidade:** Aplicações à Estatística. Tradução de Ruy de C. B. Lourenço Filho. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. O Ensino e as Propostas Pedagógicas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Conceitos, linguagem e aplicações**. São Paulo: Moderna, 2002.

PONTE, J. P.; MATOS, J. M. ; ABRANTES, P. **Investigação em Educação Matemática**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998

PONTE, João Pedro, BROCARDO; Joana, OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SANDRIN, Maria de Fátima Neves; PUORTO, Giuseppe; NARDI, Roberto. Serpentes e acidentes ofídicos – um estudo sobre erros conceituais em livros didáticos. In: NARDI, Roberto; BASTOS, Fernando; DINIZ, Renato Eugênio da Silva. **Pesquisas em ensino de Ciências**. São Paulo: Escrituras, 2004.

SANTOS, Carlos Alberto Marcondes. **Matemática – Série Novo Ensino Médio**. Compacta, 2003.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática - Ensino Médio**. São Paulo: Saraiva, 2003.

SOUZA, Maria Helena Soares; SPINELLI, Walter. **Matemática**. São Paulo: Scipione, 1999.

SPIEGEL, Murray R. **Estatística**. Tradução e revisão técnica de Pedro Consentino. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 1993.

STEVENSON, William J. **Estatística aplicada à Administração.** Tradução de Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 19

VIALI, Lorí. Utilizando recursos computacionais (planilhas) no ensino do Cálculo de Probabilidades. In: CURY, Helena Noronha (Org.). **Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores: reflexões, relatos, propostas**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

YOUSSEF, Antonio N.;FERNANDEZ, Vicente P. **Matemática - de olho no mundo do trabalho**. São Paulo: Scipione, 2005.

ANEXO A – Questionário aplicado aos professores de Matemática do Ensino Médio

Este questionário tem como objetivo destacar a importância do desenvolvimento de conteúdos relacionados com Análise Combinatória, Probabilidade e Estatística no Ensino Médio. Nesse contexto, gostaria da opinião dos professores de Matemática, do Ensino Médio, de escolas públicas e privadas do município de Porto Alegre. A partir desse momento, você e seus colegas podem ajudar a mudar um pouco dessa história. Obrigado.

Tempo de magistério: ....anos

Grau de Instrução:
(   ) graduação   (   ) Especialização   (   ) Mestrado   (   ) Doutorado

1 Você tem conhecimento das Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)?

(   ) Sim   (   ) Não

2 Você já trabalhou com os PCN+?

(   ) Sim   (   ) Não

2.1 Caso afirmativo, de que forma a proposta se refletiu em seu trabalho?

2.2 Se você respondeu **não**, por quê?

3 Dos temas abaixo, quais são abordados durante o ano?

( ) Probabilidade ( ) Estatística

4 Se os temas são abordados, em qual série?

5 Você adota o livro didático?

( ) Sim ( ) Não

6 Se você respondeu **sim**, na questão 5, você acha adequado

a) o conceito de Probabilidade?

( ) Sim ( ) Não

b) e de Estatística?

( ) Sim ( ) Não

Caso queira, justifique sua resposta ....
....

7 Se você achar necessário fazer um comentário sobre o assunto, o mesmo será muito bem aceito.

ANEXO B – Lista das escolas nas quais os professores que responderam ao questionário exercem suas atividades

Escolas Estaduais:

a) Colégio Estadual Cândido José de Godoy

b) Colégio Estadual Cônego Paulo de Nadal

c) Colégio Estadual Dom João Becker

d) Colégio Estadual Julio de Castilhos

e) Colégio Estadual Padre Réus

f) Colégio Estadual Tiradentes

g) Escola Estadual Odila Gay da Fonseca

h) Escola Estadual de 1º e 2º Graus Paraná

i) Escola Estadual de 2º Graus Parobé

Escolas Municipais:

Escola Municipal de Ensino Médio Emílio Meyer

Escolas Privadas:

a) Colégio Americano

b) Colégio Assunção

c) Colégio Leonardo da Vince

d) Colégio Mãe de Deus

e) Colégio Marista Rosário

Escolas Federais:

Colégio Militar de Porto Alegre