

Nelso Rugero Bedin Neto

Controlador Não-Linear para Servomecanismos de Alto Desempenho em Tempo Discreto

Porto Alegre - RS, Brasil

2014

Nelso Rugero Bedin Neto

Controlador Não-Linear para Servomecanismos de Alto Desempenho em Tempo Discreto

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sinais, Sistemas e Tecnologia da Informação

Linha de Pesquisa: Automação e Sistemas.

Pontifícia Universidade do Rio Grande do Sul – PUCRS

Faculdade de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Orientador: Aurélio Tergolina Salton

Coorientador: Jeferson Vieira Flores

Porto Alegre - RS, Brasil

2014



Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
FACULDADE DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLADOR NÃO-LINEAR PARA SERVOMECANISMOS DE ALTO DESEMPENHO EM TEMPO DISCRETO

CANDIDATO: NELSO RUGERO BEDIN NETO

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.



DR. AURELIO TERGOLINA SALTON - ORIENTADOR



DR. JEFERSON VIEIRA FLORES - CO-ORIENTADOR

BANCA EXAMINADORA



DR. JOÃO MANOEL GOMES DA SILVA JUNIOR - ESCOLA DE ENGENHARIA - UFRGS



**DR. MAURÍCIO ZARDO OLIVEIRA - CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
- UCS**



DR. ALEXANDRE ROSA FRANCO - DO PPGE/FENG - PUCRS

PUCRS

Campus Central

Av. Ipiranga, 6681 - Prédio 30 - Sala 103 - CEP: 90619-900

Telefone: (51) 3320.3540 - Fax: (51) 3320.3625

E-mail: engenharia.pg.eletrica@pucrs.br

www.pucrs.br/feng

*À Fernanda, meu pai, minha mãe e minhas irmãs por todo amor, carinho e
compreensão ao longo desta jornada.*

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Aurélio Tergolina Salton, por ter tornado possível a realização deste trabalho através da sua disposição e conhecimento. Não menos importante, agradeço o meu coorientador por toda ajuda e dedicação ao longo do mestrado. Agradeço também toda a comissão coordenadora e a equipe administrativa do PPGEE.

Agradeço aos mestrando, bolsistas e voluntários os quais tive o prazer de trabalhar no GACS. Um agradecimento especial ao Henrique e Leandro Lisboa pelos conselhos, ajudas, parceria e pelo tempo em que estivemos na Argentina; ao Leandro Disiuta e a Nathássia pelas conversas, almoços e trabalhos ao longo destes dois anos. Sem vocês, estes dois anos não seriam tão agradáveis.

Finalmente, um agradecimento especial a minha família pelo apoio, incentivo e dedicação para tornar este sonho uma realidade. À minha esposa Fernanda, por todos os finais de semana em casa acompanhando-me enquanto escrevia a dissertação, por todo amor, carinho e apoio, imprescindíveis para a conclusão do trabalho.

*“Mantenha seus pensamentos positivos, porque seus pensamentos tornam-se suas
palavras.
Mantenha suas palavras positivas, porque suas palavras tornam-se suas atitudes.
Mantenha suas atitudes positivas, porque suas atitudes tornam-se seus hábitos.
Mantenha seus hábitos positivos, porque seus hábitos tornam-se seus valores.
Mantenha seus valores positivos, porque seus valores...
Tornam-se seu destino.”*
(Mohandas Karamchand Gandhi)

Resumo

Este trabalho aborda controladores de tempo ótimo no domínio discreto, sendo eles: *Proximate Time Optimal Servomechanism* (PTOS) e *Dynamically Damped Proximate Time Optimal Servomechanism* (DDPTOS). Para garantir a estabilidade destes controladores é utilizado a Teoria de Lyapunov e como solução a formulação por desigualdade linear matricial (em inglês, linear matrix inequalities - LMI). Considerando isso, são dois os objetivos principais deste trabalho: apresentar a formulação discreta para o controlador DDPTOS e; relaxar as restrições da prova clássica de estabilidade destes controladores, possibilitando a extensão da técnica para sistema com atrito. Inicialmente, a prova de estabilidade do sistemas em malha fechada é avaliada enquadrando a função não-linear do controlador PTOS dentro de um setor delimitado, conduzindo a um conjunto de restrições LMIs a ser satisfeita pelos parâmetros do controlador. Em seguida, uma formulação similar é aplicada no controlador discreto DDPTOS, onde a sua principal diferença é a utilização do modelo de sistemas lineares com dependência paramétrica para representar a não-linearidade que adiciona amortecimento ao sistema. Como consequência, forma-se um politopo com os limites obtidos através desta representação. As duas abordagens propostas são validadas através de exemplos de simulação e experimento em um sistema físico composto por um servomecanismo com atrito.

Palavras-chaves: Controlador de tempo ótimo, controle não-linear, servomecanismos, PTOS, DDPTOS, LMI.

Abstract

This work addresses discrete time optimal controllers, in particular: the Proximate Time Optimal Servomechanism (PTOS) and the Dynamically Damped Proximate Time Optimal Servomechanism (DDPTOS). Lyapunov theory is used to ensure the stability of the controllers by casting the problem in terms of Linear Matrix Inequalities (LMI). Considering this, there are two main objectives of this work: shown the discrete formulation of the DDPTOS and; relaxed constraints of the classic proof of stability of these controllers, allowing an extension of these techniques to damped systems. Initially, the stability of the closed-loop system is assessed by casting the PTOS nonlinearities in a sector-bounded framework, leading to a set of LMI conditions to be satisfied by the controller parameters. Then, a similar formulation is applied to the discrete DDPTOS, where a linear parametric varying model is used to represent the nonlinearity that adds damping to the system. As a result, a polytopic approach is taken on the limits of the varying parameter given by this representation. The two proposed approaches are validated through experiments in a physical system consisting of a damped servomechanism.

Key-words: Time optimal control, nonlinear control, servomechanisms, PTOS, DDPTOS, LMI

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de blocos de um sistema integrador duplo com controle limitado pela saturação.	19
Figura 2 – Sinal de controle teórico do controle de tempo ótimo.	20
Figura 3 – Saída em posição do sistema integrador duplo controlado pelo TOC. . .	21
Figura 4 – Efeito chattering no sistema com o controlador TOC.	21
Figura 5 – Estabilidade no sentido de Lyapunov.	24
Figura 6 – Diagrama de blocos de um sistema não-linear na forma de Lur’e. . . .	27
Figura 7 – Não-linearidade do tipo saturação.	28
Figura 8 – Região de linearidade, respectivamente, não delimitada e delimitada. .	29
Figura 9 – Condição de setor clássica - não-linearidade do tipo zona-morta descentralizada.	30
Figura 10 – Diagrama de blocos da transformação do laço de Lur’e para uma não-linearidade $\Psi(\cdot)$, um sistema $H(s)$ e um setor $[\Omega_{min}, \Omega_{max}]$	32
Figura 11 – Resposta ao degrau do controlador PTOS para diversos valores de coeficiente α	38
Figura 12 – Resposta ao degrau do controlador PTOS para $\alpha = 1$	38
Figura 13 – Região saturada \mathbb{U} e as possíveis trajetórias do sistema.	40
Figura 14 – Função não-linear ψ_c e seus respectivos setores usados em simulação. .	42
Figura 15 – Conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ para diferentes valores do fator de aprimoramento da aceleração.	48
Figura 16 – Trajetórias começando no limite de $\mathcal{E}(P, 1)$ para $\alpha = 4$	49
Figura 17 – Resposta ao degrau unitário da comparação dos controladores. Note que $\alpha = 1, 9$ não apresenta sobressinal, diferente de $\alpha = 4, 0$	50
Figura 18 – Sinal de controle da comparação dos controladores. Note o efeito do aumento do valor do α no sinal de controle.	50
Figura 19 – Resposta ao degrau de 10mm do sistema integrador duplo com os controladores CNF e TOC.	55
Figura 20 – Resposta normalizada para referências de 9,5mm, 10mm e 10,5mm do sistema integrador duplo com o controlador CNF.	55
Figura 21 – Resposta normalizada para referências de 9,5mm, 10mm e 10,5mm do sistema integrador duplo com o controlador PTOS.	56
Figura 22 – Coeficientes de amortecimento do sistema em malha fechada para diferentes valores de α	57
Figura 23 – Função não-linear ψ_a	59
Figura 24 – Conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ para o controlador DDPTOS com $\alpha = 4$. .	66

Figura 25	–Trajetórias começando no limite de $\mathcal{E}(P, 1)$ para o controlador DDP-TOS com $\alpha = 4$	66
Figura 26	–Resposta temporal do sistema integrador duplo com os controladores PTOS e DDPTOS para uma referência de 0,1m com $\alpha = 4$	67
Figura 27	–Sinal de controle dos controladores PTOS e DDPTOS para uma referência de 0,1m com $\alpha = 4$	67
Figura 28	–Modelo experimental do servomecanismo.	70
Figura 29	–Diagrama do sistema integrador duplo, onde + e – significam alimentação positiva e negativa, respectivamente, CHA e CHB os canais do encoder, S1 e S2 as comunicações seriais e μp microprocessador.	70
Figura 30	–Sinal PRBS utilizado como entrada do sistema integrador duplo para identificação.	72
Figura 31	–Comparação da saída em posição obtida através da simulação da função de transferência identificada com a saída real para uma entrada pseudo-randômica.	73
Figura 32	–Setor da função não-linear ψ_c com $\alpha = 1,65$	76
Figura 33	–Conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ para o controlador PTOS com $\alpha = 1,65$	76
Figura 34	–Saída do sistema real comparado com a saída do sistema simulado controlado pela lei PTOS com $\alpha = 1,65$	77
Figura 35	–Sinal de entrada do sistema real comparado com o sinal de entrada do sistema simulado controlado pela lei PTOS com $\alpha = 1,65$	77
Figura 36	–Conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ para o controlador DDPTOS com $\alpha = 1,65$	78
Figura 37	–Saída do sistema real comparado com a saída do sistema simulado controlado pela lei DDPTOS com $\alpha = 1,65$	79
Figura 38	–Sinal de entrada do sistema real controlado pela lei DDPTOS com $\alpha = 1,65$	79
Figura 39	–Saída do sistema real controlado pela lei PTOS com $\alpha > 1$ e $\alpha = 1$	81
Figura 40	–Sinal de entrada do sistema real controlado pela lei PTOS com $\alpha > 1$ e $\alpha = 1$	81
Figura 41	–Saída do sistema real controlado pela lei DDPTOS comparado com a saída controlada pela lei PTOS, ambos com $\alpha = 1,65$	82
Figura 42	–Sinal de entrada real controlado pela lei DDPTOS comparado com a saída controlada pela lei PTOS, ambos com $\alpha = 1,65$	82

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros utilizados na simulação do controlador PTOS.	47
Tabela 2 – Parâmetros utilizados na simulação para os controladores DDPTOS e PTOS.	64
Tabela 3 – Parâmetros utilizados na simulação e no experimento para os controladores DDPTOS e PTOS.	74

Lista de abreviaturas e siglas

CNC	<i>Computer Numerical Control</i>
CNF	<i>Composite Nonlinear Control</i>
CPR	<i>Counts per Revolution</i>
DDPTOS	<i>Dynamically Damped Proximate Time Optimal Servomechanism</i>
HDD	<i>Hard Disk Drive</i>
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
LPV	<i>Linear Parameter Varying</i>
PD	Proporcional-Derivativo
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
PPM	<i>Pulse Position Modulation</i>
PRBS	<i>Pseudorandom Binary Sequence</i>
PTOS	<i>Proximate Time Optimal Servomechanism</i>
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i>
TOC	<i>Time Optimal Control</i>

Lista de símbolos

A'	transposta da matriz A
$A \geq (>)0$	matriz semi (definida) positiva
$rank(A)$	posto da matriz A
$diag\{A, B\}$	matriz bloco-diagonal formada pelas matrizes A e B , isto é, $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$
$sat(\cdot)$	função saturação
$sgn(\cdot)$	função sinal
\dot{y}	a primeira derivada de y em relação ao tempo
\ddot{y}	a segunda derivada de y em relação ao tempo
$ a $	valor absoluto do escalar a
$\ x\ $	a norma do vetor x
$\mathcal{E}(P, 1)$	elipsoide definido por $x'Px \leq 1$
\mathbb{N}	conjunto de números naturais
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	espaço euclidiano de ordem n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$
*	utilizado em matrizes simétricas para representar o respectivo elemento transposto da matriz
□	fim da prova

Sumário

1	Introdução	15
2	Preliminares	18
2.1	Servomecanismos	18
2.2	Controle de Tempo Ótimo	19
2.3	Estabilidade de Sistemas Não-Lineares	22
2.3.1	Estabilidade por Lyapunov	22
2.3.1.1	Estabilidade Interna de Sistemas Contínuos	23
2.3.1.2	Estabilidade Interna de Sistemas no Tempo Discreto	26
2.3.2	Estabilidade Absoluta	26
2.3.2.1	Sistema com Saturação de Controle	27
2.3.2.2	Região de Linearidade	28
2.3.2.3	Condição de Setor Clássica	29
2.3.2.4	Condição de Setor Modificada	30
2.3.2.5	Tranformação de Laço	31
2.3.3	Estabilidade de Sistemas Quasi-LPV	31
2.3.4	Métodos LMI's	33
2.3.4.1	Complemento de Schur	33
2.3.4.2	S-Procedure	34
3	Sistemas Amortecidos Controlados por <i>Proximate Time Optimal Servomechanism</i>	35
3.1	<i>Proximate Time Optimal Control</i>	36
3.2	Fator de Desconto da Aceleração	40
3.3	Condições de Estabilidade	41
3.4	Resultados por Simulação	47
3.5	Conclusão	49
4	Construção do Controlador <i>Dynamically Damped Proximate Time Optimal Servomechanism</i> no Tempo Discreto	52
4.1	<i>Composite Nonlinear Feedback</i>	53
4.2	<i>Dynamically Damped Proximate Time Optimal Servomechanism</i>	56
4.2.1	Extensão para Sistemas no Tempo Discreto	58
4.3	Função Não-linear do Controlador	60
4.4	Condições de Estabilidade	60

4.5	Resultados por Simulação	64
4.6	Conclusão	65
5	Resultados Experimentais	69
5.1	Descrição do experimento	69
5.2	Identificação do sistema	71
5.3	Controle de Tempo Ótimo Aplicado em Servomecanismos	74
5.3.1	Resultados Experimentais com Controlador PTOS	74
5.3.2	Resultados Experimentais com Controlador DDPTOS	75
5.3.3	Comparação entre os Controladores	80
5.4	Conclusão	83
6	Conclusão	84
	Referências	86

1 Introdução

Diversos sistemas encontrados na Engenharia são atuados por servomotores, por exemplo: atuadores robóticos, discos rígidos (HDDs), *Computer Numerical Control* (CNC), entre outros. Muitas vezes denominado como integrador duplo, esse sistema possui uma vasta aplicação exigindo novas abordagens dentro da teoria de controle a fim de melhorar a produtividade e qualidade em sistemas de controle automático. Sendo assim, pode-se destacar o problema de obter o tempo ótimo do sistema, seguindo a referência sem sobressinal e garantindo a estabilidade do sistema sujeito a saturação do atuador.

O controlador *Time-Optimal Control* (TOC) (ARTHUR; BRYSON; HO, 1975), também conhecido como *bang-bang control*, foi apresentado como o limite teórico para alto desempenho em sistemas tipo integrador duplo sujeito a saturação no atuador. Assim como outros controladores comutáveis, o TOC sofre efeito indesejável do *chattering* (KHALIL, 2002), ou seja, a saída do sistema apresenta oscilação sustentável em torno da referência por consequência do sinal de controle alternar entre os níveis de saturação. Esse problema prático levou a busca de técnicas que se aproximem da performance de tempo ótimo sem os efeitos indesejados do *chattering*.

Proposto por Workman, Kosut e Franklin (1987), o *Proximate Time-Optimal Control* (PTOS) tem uma resposta próxima ao desempenho de tempo ótimo sem a presença do efeito indesejado do *chattering*. Sua estratégia de controle é uma adaptação da lei TOC, onde primeiramente é utilizada a função não-linear baseada no TOC e, conforme o sistema aproxima-se da referência, troca-se esta função para um controle linear Proporcional-derivativo (PD). Esta troca faz com que o sistema tenha uma performance inferior ao controlador teórico *bang-bang*, contudo este controlador é implementável, uma vez que não apresenta *chattering*, e pode ser aplicado em diversos servomecanismos, por exemplo (HREDZAK; HERRMANN; GUO, 2006) (LISBOA et al., 2013).

Outra importante técnica de controle com objetivo de atender o desempenho ótimo do sistema a ser estudada é o *Composite Nonlinear Feedback* (CNF) (LEWIS, 1953) (CHEN et al., 2003). Esta estratégia sugere o projeto de uma lei de controle que proporcione baixa taxa de amortecimento associado com uma função não-linear que gradualmente adiciona amortecimento ao sistema conforme o mesmo aproxima-se da referência, desta forma evitando o sobressinal. Esta ideia tem como principal vantagem de não ser limitada apenas para servomecanismos, podendo ser aplicado em diferentes sistemas. Contudo, quando aplicada em servomecanismos, a desempenho do sistema torna-se dependente da entrada dada, isto é, diferentes ganhos são necessários para diferentes referências.

Além disso, é importante ressaltar que outros métodos de controle alcançam alta

performance podendo ser aplicados em diversos sistemas. Estes incluem a abordagem *Linear Quadratic Gaussian* (LQG) (LEWIS; SYRMOS, 1995), o controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) não-linear (SU; SUN; DUAN, 2005), controladores por modos deslizantes (*sliding mode control*) (UTKIN, 1992), controle preditivo baseado no modelo (GOODWIN; SERON; DONÁ, 2004), e muitos outros. Parte dessas leis de controle consideram a saturação no seu projeto, outras são leis com chaveamento. Mas, o mais importante, são estratégias gerais, podendo ser aplicadas em vários sistemas. Como consequência, seus desempenhos são inferiores aos alcançados com controladores projetados especificamente para uma determinada planta, como o caso do PTOS para servomecanismos.

Recentemente, uma integração da lei de controle PTOS com a ideia de amortecimento dinâmico (CNF) para alto-desempenho de plantas integrador duplo foi proposta em (SALTON; CHEN; FU, 2012). Conhecida como *Dynamically Damped Proximate Time-Optimal Servomechanism* (DDPTOS), esta lei de controle mantém a função não-linear baseada no controlador *bang-bang* e, conforme o sistema aproxima-se da referência, realiza a troca de função, não mais para um simples PD, mas para uma função não-linear que adiciona amortecimento ao sistema. Por razão disto, diminui-se o conservadorismo presente na parte linear e no fator de desconto da aceleração do controlador PTOS, sem a presença de sobressinal.

A prova de estabilidade desenvolvida, apenas em tempo contínuo, para o controlador DDPTOS (SALTON, 2011) foi baseada na prova de estabilidade do controlador PTOS (WORKMAN, 1987). Realizada de forma analítica, a mesma apresenta restrições quanto a escolha dos parâmetros do controlador, tais como: o fator de desconto da aceleração, os ganhos e o coeficiente de amortecimento referente a lei CNF. Atualmente, a formulação por desigualdade linear matricial (em inglês, Linear Matrix Inequalities - LMI) (BOYD et al., 1994) aparece como uma importante ferramenta para lidar com uma vasta variedade de problemas de otimização e controle. Muitos destes problemas encontrados no projeto de controladores podem ser expressados em termos de um conjunto de restrições baseadas em LMI's e solucionados através dos *solvers* existentes, como *SDPT3* (TOH; TODD; TUTUNCU, 1996) e *SeDuMi* (STURM, 1999). Sendo assim, é possível desenvolver condições na forma de LMIs para a análise de estabilidade de sistemas não-lineares sujeitos a saturação na entrada de controle (CASTELAN; MORENO; PIERI, 2007), (CASTELAN; TARBOURIECH; QUEINNEC, 2008) e (GOMES DA SILVA JR. et al., 2013).

Considerando os problemas discutidos acima, os objetivos principais do trabalho são: apresentar a formulação do controlador PTOS para sistemas amortecidos e desenvolver o controlador DDPTOS no tempo discreto. A prova de estabilidade é feita considerando a formulação LMI, permitindo relaxar algumas restrições imposta na prova de estabilidade dos controladores PTOS e DDPTOS. Estes relaxamentos conduzem a uma

extensão destes controladores para sistemas amortecidos.

O trabalho está organizado em 6 capítulos.

Inicialmente, no Capítulo 2 são apresentados os conceitos básicos e ainda uma revisão bibliográfica. Neste capítulo pode-se destacar a definição do problema, o qual motiva este trabalho seguido de ferramentas matemáticas utilizadas no desenvolvimento apresentado.

Nos Capítulos 3 e 4 os controladores PTOS e DDPTOS são estudados juntamente com suas respectivas provas de estabilidade. Neste caso, são desenvolvidas condições sob a forma LMIs para determinar uma estimativa da região de estabilidade do sistema em malha fechada. Tais condições são solucionadas através de *software* com a inclusão de método de otimização a fim de aumentar esta região. Finalizando, resultados de simulação validam a extensão das técnicas para sistemas amortecidos com saturação no sinal de controle.

O Capítulo 5 expõe os resultados experimentais obtidos com os controladores PTOS e DDPTOS em uma planta tipo integrador duplo. Primeiramente é apresentado de forma detalhada o sistema e os métodos utilizados para realizar a identificação deste servomecanismo. Em seguida, resultados experimentais para cada controlador são apresentados introduzindo uma comparação entre as duas técnicas de controle com diferentes valores do coeficiente de desconto da aceleração. O presente trabalho será finalizado com uma conclusão e perspectivas.

Durante o desenvolvimento do trabalho foi publicado o artigo (SALTON; NETO; FLORES, 2013) com uma visão global sobre o conceito de atuadores do tipo *macro/micro* abordando recentes patentes e estudos sobre o projeto, controle e aplicação deste atuadores. Com os resultados do trabalho, foi publicado um trabalho na conferência *Conference on Decision and Control (CDC)* (FLORES et al., 2013) apresentando os resultados obtidos com a extensão do controlador PTOS para sistemas amortecidos e está em submissão um artigo para a revista *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* (FLORES et al., 2014) apresentando os resultados obtidos com a discretização e extensão da técnica de controle DDPTOS.

2 Preliminares

Neste capítulo serão apresentados conceitos fundamentais utilizados no desenvolvimento do trabalho juntamente com uma revisão bibliográfica. Os principais tópicos abordados serão: sistema integrador duplo; controlador de tempo ótimo; estabilidade de sistemas no sentido Lyapunov em tempo contínuo e discreto.

O sistema de interesse será apresentado em conjunto com a teoria de controle de tempo ótimo. Seguindo, destacam-se conceitos fundamentais para a realização da prova de estabilidade de sistemas sujeito a não-linearidade saturação, tais como: teoria de Lyapunov para sistemas não lineares e técnicas para a utilização da abordagem LMI. Caso haja necessidade, o leitor poderá obter maiores informações nas referências citadas no decorrer do texto.

2.1 Servomecanismos

Nesta seção será apresentado o sistema integrador duplo, descrito como:

$$\ddot{y}M = \text{sat}(u) - c\dot{y} \quad (1)$$

onde y é a posição do atuador, M é a massa do sistema, c é o coeficiente de atrito e u é a força de entrada aplicada ao sistema sujeita a uma saturação,

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} \bar{u} & \text{se } u > \bar{u} \\ u & \text{se } -\bar{u} \leq u \leq \bar{u}, \\ -\bar{u} & \text{se } u < -\bar{u} \end{cases} \quad (2)$$

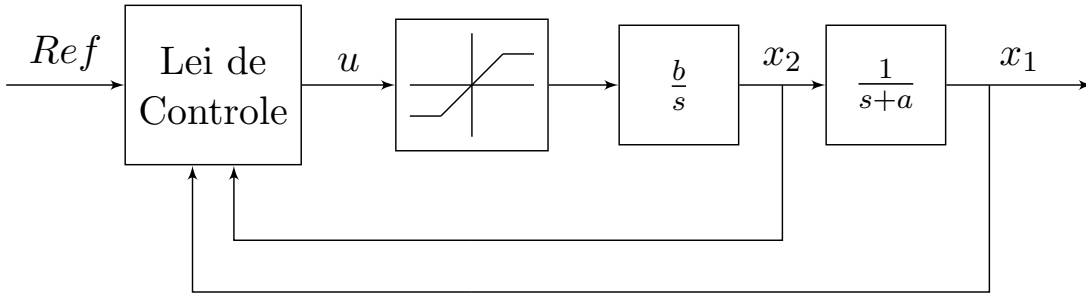
onde $\bar{u} > 0$ representa o nível de saturação do sistema. Reescrevendo a equação (1) na forma de estados resulta em:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= b \text{sat}(u) - ax_2 \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (3)$$

onde $b = \frac{1}{M}$ e $a = \frac{c}{M}$.

A equação (3) representa um servomecanismo em sua forma mais geral com uma entrada de controle saturada, conforme mostrado na Figura 1.

Figura 1: Diagrama de blocos de um sistema integrador duplo com controle limitado pela saturação.



Fonte: O autor.

Assumindo o uso de um compensador de atrito, (ZHENG; FU, 2008), (SALTON et al., 2011), (CHOI et al., 1998) e (TAO; KOKOTOVIC, 1994), ou levando em consideração que o atrito c é muito pequeno a equação (3) é reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= b \operatorname{sat}(u). \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (4)$$

O sistema formado por (4) passa a ser denominado integrador duplo.

2.2 Controle de Tempo Ótimo

A ideia de controle de tempo ótimo (em inglês, *Time Optimal Control* - TOC) é obter a mais rápida resposta possível considerando uma entrada do tipo salto ou degrau. Para isso, sua lei de controle faz com que o sistema obtenha a máxima aceleração seguido da máxima desaceleração seguindo a trajetória de velocidade ótima predefinida para alcançar o destino final no menor tempo possível.

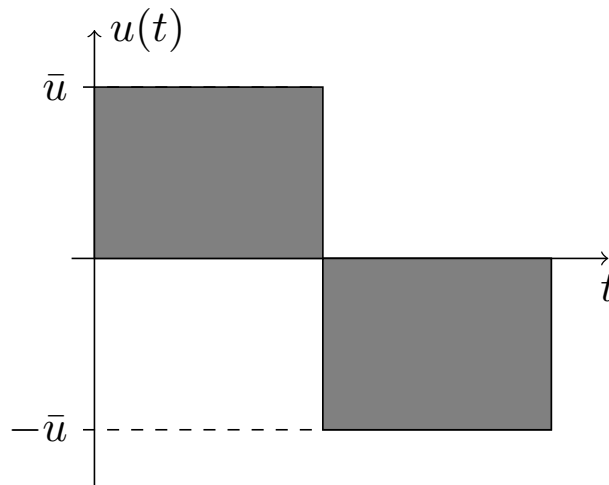
Sendo assim, a melhor performance pode ser alcançada trocando o sinal de controle entre os dois níveis extremos de entrada, conforme ilustrado na Figura 2. Por este motivo, esta lei de controle também é conhecida como *bang-bang*.

A lei de controle TOC pode ser definida como:

$$u = -\bar{u} \operatorname{sgn} \left(\operatorname{sgn}(e) \sqrt{\frac{2\bar{u}|e|}{M}} + \dot{y} \right),$$

$$e = y - r$$

Figura 2: Sinal de controle teórico do controle de tempo ótimo.



Fonte: O autor.

onde r representa a referência do sistema e a função $sgn(\cdot)$ é dada por:

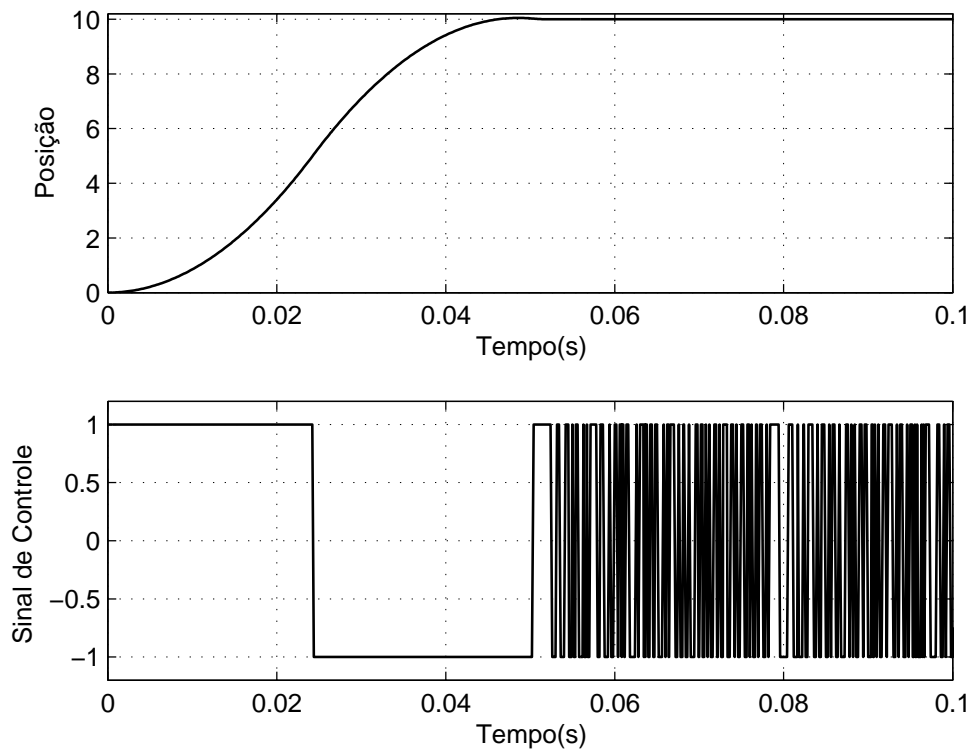
$$sgn(e) = \begin{cases} +1, & e \geq 0 \\ -1, & e < 0 \end{cases} . \quad (5)$$

A saída deste controlador resulta no tempo ótimo do sistema ilustrado na Figura 3, porém a sua implementação torna-se uma árdua tarefa devido a presença do fenômeno *chattering*. Este fenômeno é causado pela mudança abrupta entre os níveis de saturação máximo e mínimo no controle provocando uma oscilação sustentável na saída, conforme Figura 4. Este é um fenômeno indesejável, pois diminui a precisão do controlador, provoca desgaste mecânico nas partes do sistema e gera grandes perdas de calor nos circuitos eletrônicos (UTKIN; LEE, 2006). A principal razão da ocorrência deste fenômeno são dinâmicas rápidas não modeladas, podendo ser elas provenientes do servomecanismo, dos sensores ou do processador utilizado no sistema.

Generalizando, o problema do *chattering* na saída do sistema fez com a ideia do controlador de tempo ótimo (TOC) apresentasse uma série de desvantagens inviabilizando a sua aplicação prática. A fim de contornar este problema, surgiram controladores de tempo quase ótimo, ou seja, leis de controle baseadas na ideia do TOC alteradas de forma a serem aplicadas em servomecanismos.

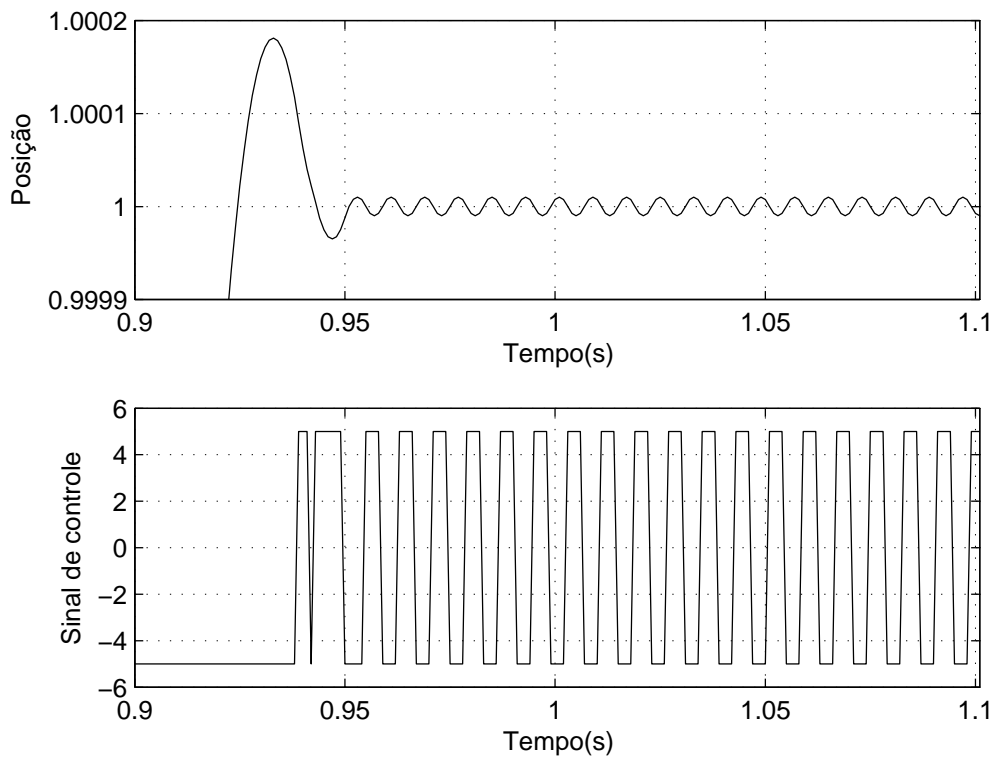
A principal mudança a ser feita no controlador TOC, para o tornar implementável, é evitar que a saída de controle apenas assuma os níveis de saturação. Levando isto em consideração e expandido a ideia da lei de controle TOC, Workman (1987) desenvolveu o *Proximate Time Optimal Servomechanism* de forma a evitar os problemas do TOC alcançando um ótimo desempenho para sistemas tipo integrador duplo. A grande vantagem no uso do PTOS em relação a outras técnicas de controle é seu projeto ser dedicado para

Figura 3: Saída em posição do sistema integrador duplo controlado pelo TOC.



Fonte: O autor.

Figura 4: Efeito chattering no sistema com o controlador TOC.



Fonte: O autor.

servomecanismos, obtendo uma melhor resposta quando comparado com controlados não dedicados. Por outro lado, o desempenho do sistema é comprometido uma vez que o fator de desconto da aceleração tem que ser levado em conta a fim de evitar sobressinal na resposta, uma explicação detalhada do controlador PTOS é apresentada no Capítulo 3. Com o intuito de reduzir o sobressinal na resposta do sistema, o controlador *Dynamically Damped Proximate Time Optimal Servomechanism* foi desenvolvido a fim de adicionar amortecimento ao sistema durante a frenagem, possibilitando o uso do coeficiente de desconto da aceleração próximo ao unitário e recuperando um pouco da característica do controle de tempo ótimo perdida no PTOS.

Todavia, a prova de estabilidade de ambos controladores citados apresentam algumas restrições quanto a escolha dos parâmetros do controlador, sendo a restrição no coeficiente de desconto da aceleração, onde o mesmo deve ser menor ou igual a um, crítica quando lida-se com sistemas com atrito. Isto porque a força de atrito auxilia na frenagem do sistema, possibilitando que o mesmo permaneça um maior tempo acelerando, ou seja, o coeficiente de desconto da aceleração pode assumir valores maiores que o unitário, sendo fundamental a obtenção de novas condições de estabilidade. Além disso, há a necessidade de obter uma representação no domínio discreto para o controlador DDPTOS possibilitando o uso de microcontroladores para sua implementação prática.

2.3 Estabilidade de Sistemas Não-Lineares

Esta seção tem o objetivo de familiarizar o leitor com as ferramentas utilizadas para o desenvolvimento das novas condições de estabilidade para os controladores PTOS e DDPTOS, sendo dividida em quatro partes: estabilidade de sistemas pela teoria de Lyapunov, estabilidade absoluta, sistemas lineares com dependência paramétrica e métodos LMIs.

Primeiramente será apresentada a teoria de estabilidade de Lyapunov para sistemas não-lineares no domínio contínuo e em seguida será realizada a extensão para sistemas no tempo discreto. Após, importantes definições utilizadas na formulação e solução de problemas baseados em desigualdades lineares matriciais serão apresentadas, tais como: região de linearidade, condição de setor e transformação de laço. A estabilidade de sistemas Quasi-LPV será apresentada. Completando, são abordadas ferramentas para lidar com LMIs.

2.3.1 Estabilidade por Lyapunov

A questão mais importante sobre qualquer sistema de controle é a estabilidade. Qualitativamente, um sistema é estável se os estados do mesmo convergem sempre para um determinado ponto de equilíbrio. Porém, há uma diferença entre a estabilidade de

um sistema linear para um sistema não-linear. Sendo um sistema linear invariante no tempo, sua estabilidade é dependente apenas da matriz do sistema, isto é, independente das condições iniciais e das entradas do sistema em análise. No caso de sistemas não-lineares, esta análise torna-se mais complexa. Esta classe de sistemas pode apresentar múltiplos pontos de equilíbrio (ponto onde as derivadas dos estados do sistema são iguais a zero) ou até mesmo ciclo limite (oscilações de amplitude e período fixo sem excitação externa). Isto posto, a estabilidade de um sistema não-linear é caracterizada em relação a seus pontos de equilíbrio, sendo a Teoria de Lyapunov usualmente aplicada para avaliar estes sistemas (KHALIL, 2002).

O problema de determinar a estabilidade de sistemas não-lineares pelo método de Lyapunov inclui duas soluções: método da linearização e método direto. O método da linearização permite investigar a estabilidade de um sistema não-linear através do seu modelo linearizado. O método direto é baseado no conceito da energia: constrói-se um função escalar baseada na energia do sistema e examina-se esta função ao longo do tempo. Atualmente, o método da linearização representa a justificação teórica de sistemas lineares, enquanto o método direto é a ferramenta mais importante para análise e projeto de sistemas não-lineares (SLOTINE; LI, 1991).

Como o foco deste trabalho é obter condições de estabilidade para sistemas não-lineares esta subseção apresentará o método direto de Lyapunov e alguns conceitos importantes relacionados com a estabilidade interna do sistema.

2.3.1.1 Estabilidade Interna de Sistemas Contínuos

Primeiramente, alguns conceitos importantes serão introduzidos para o entendimento da estabilidade interna, tendo como base o seguinte sistema autônomo ¹ não-linear em tempo contínuo:

$$\dot{x} = f(x) \tag{6}$$

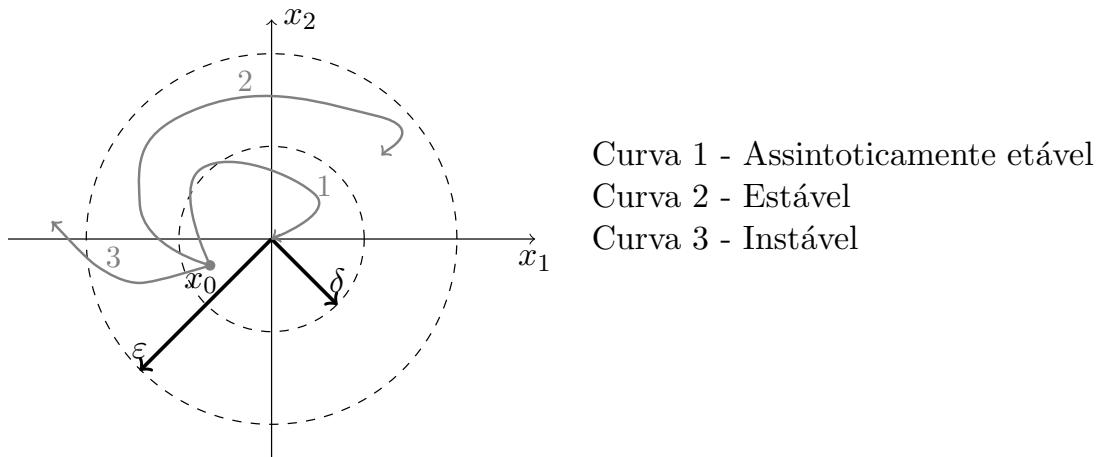
onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $f(x)$ é uma função localmente *Lipschitz* (KHALIL, 2002) mapeada em um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$.

Muitos problemas de estabilidade podem ser formulados com respeito ao ponto de equilíbrio do sistema, sendo assim define-se:

Definição 2.3.1. (SLOTINE; LI, 1991) Um estado x^* é dito um ponto de equilíbrio do sistema se, quando o estado $x(t)$ é igual à x^* , ele permanece em x^* para todo o tempo futuro.

¹ No caso da função do sistema ser independente do tempo, diz-se que o sistema é autônomo ou invariante no tempo.

Figura 5: Estabilidade no sentido de Lyapunov.



Fonte: O autor.

Usualmente considera-se a origem como ponto de equilíbrio do sistema. Porém, caso isso não se verifique, pode-se transladar o ponto de equilíbrio x^* para a origem (SLOTINE; LI, 1991).

Definição 2.3.2. (KHALIL, 2002) O ponto de equilíbrio x^* de (6) é

- estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de modo que

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0 \quad (7)$$

- uniformemente estável se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ independente de t , de forma que (7) é satisfeita.
- instável se não for estável.
- assintoticamente estável se é estável e δ pode ser escolhido de forma que:

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Definindo agora

$$B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x^*\| \leq r, r > 0\},$$

onde r representa o raio do círculo formado pela região $B(r)$, formando-se as regiões $B(\delta)$ e $B(\varepsilon)$. A partir destas regiões analisa-se a estabilidade do sistema de forma que qualquer trajetória que comece dentro da região $B(\delta)$ convirja e permaneça dentro da região $B(\varepsilon)$ centrada no ponto de equilíbrio $x = 0$. Neste caso o sistema é dito estável, do contrário, instável. Além disto, quando a trajetória converge ao ponto de equilíbrio tem-se a estabilidade assintótica para este ponto. A Figura 5 ilustra as três definições de estabilidade.

O método direto de Lyapunov estuda a estabilidade de um sistema com base em seus pontos de equilíbrios. O princípio básico deste método é gerar uma função escalar baseada em energia para a dinâmica do sistema e examinar a variação temporal desta função. Sendo assim, se a energia total do sistema é dissipada o mesmo deve se acomodar em um ponto de equilíbrio. Formalizando esta análise, anuncia-se o seguinte teorema relativo ao método direto de Lyapunov.

Teorema 2.3.1. (KHALIL, 2002) *Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio para (6) e $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo $x = 0$. Seja $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que*

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \text{ e } V(x) > 0 \text{ em } D - \{0\} \\ \dot{V}(x(t)) &\leq 0 \text{ em } D. \end{aligned}$$

Se isto se verifica, então $x = 0$ é um ponto de equilíbrio estável. Além disso, se

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \text{ em } D,$$

então $x = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Além de determinar se a trajetória converge para o ponto de equilíbrio, é importante saber o conjunto de condições iniciais para os quais todas as trajetórias do sistema convergem para o ponto de equilíbrio conforme $t \rightarrow \infty$. Este problema da origem à definição de região de atração (também conhecida como domínio de atração ou base).

Definição 2.3.3. (KHALIL, 2002) A região de atração R_A de um dado ponto de equilíbrio x^* é o conjunto de todos os pontos os quais as trajetórias iniciadas nos mesmos convergem assintoticamente para o equilíbrio. É definida matematicamente como:

$$R_A = \{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x, t_0) \rightarrow x^* \text{ se } t \rightarrow \infty\},$$

onde $\phi(x, t_0)$ é uma trajetória do sistema iniciada em x no tempo $t = t_0$.

A determinação exata da região de atração pode ser uma tarefa complexa (SABER; LIN; TEEL, 1995; ROMANCHUK, 1996; TARBOURIECH et al., 2011; CHESI, 2011). No entanto, ainda que de forma conservadora, curvas de nível associadas às funções de Lyapunov podem ser usadas para estimar esta região. Definindo um domínio de Lyapunov

$$\phi_c = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq \varrho\},$$

se a função de Lyapunov V satisfaz as condições de estabilidade assintótica ao longo do domínio D e $\phi_c \in D$, então toda trajetória iniciada em ϕ_c permanece em ϕ_c e tende ao ponto de equilíbrio conforme $t \rightarrow \infty$. Desta forma, ϕ_c é vista como uma estimativa da região de atração do ponto de equilíbrio.

2.3.1.2 Estabilidade Interna de Sistemas no Tempo Discreto

Os resultados apresentados para estabilidade interna de sistemas contínuos podem ser estendidos para o caso discreto de forma a buscar uma função $V(x)$ definida positiva tal que a sua variação

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k))$$

seja negativa definida ao longo das trajetórias do sistema (VIDYASAGAR, 2002).

Considere agora o seguinte sistema discreto

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad x(k_0) = x_0 \quad (8)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistemas, $f(x(k))$ é uma função matricial e $k \in \mathbb{N}$.

De forma análoga ao apresentado para sistemas no tempo contínuo, a teoria de Lyapunov é aplicada em sistemas discretos para verificar a estabilidade interna dos pontos de equilíbrio do sistema. Sendo assim, é apresentado o seguinte teorema referente a estabilidade interna de sistemas discretos.

Teorema 2.3.2. (VIDYASAGAR, 2002) *O ponto de equilíbrio x^* do sistema (8) é estável se existe uma função $V : B(r) \rightarrow \mathbb{R}$ e uma constante $r > 0$ de forma que V seja localmente positiva definida e*

$$\Delta V(k, x) \leq 0, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall x \in B(r).$$

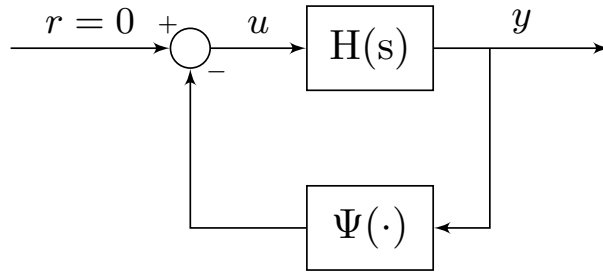
Se V é decrescente, então x^ é uniformemente estável.*

2.3.2 Estabilidade Absoluta

Muitos sistemas não-lineares podem ser representados através de um sistema linear realimentado por um elemento não-linear. Esta representação depende particularmente do sistema envolvido, podendo ser simples ou complexa.

O problema da análise de estabilidade destes sistemas não-lineares pode ser abordado através desta representação, sendo conhecida como Problema de Lur'e (ou Problema de Estabilidade Absoluta) (KHALIL, 2002). Ao decorrer desta subseção será apresentado

Figura 6: Diagrama de blocos de um sistema não-linear na forma de Lur'e.



Fonte: O autor.

o problema de Lur'e e técnicas de análise baseadas em não-linearidades de setor importantes para o estudo da estabilidade absoluta.

2.3.2.1 Sistema com Saturação de Controle

Sendo o sistema não-linear invariante no tempo representado pela Figura 6 descrito como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (9)$$

$$u(t) = -\Psi(v(t)) \quad (10)$$

$$v(t) = Kx(t) \quad (11)$$

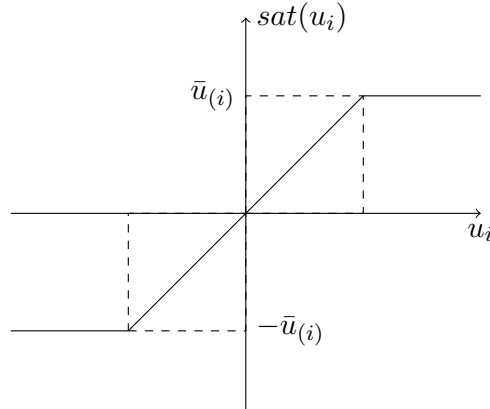
onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$, a matrix A é *Hurwitz*, o par (A, B) é controlável e a não-linearidade $\Psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é sem memória, descentralizada, localmente *Lipschitz* (KHALIL, 2002) e satisfaz as condições de setor, conforme será visto na seção 2.3.2.3.

A não-linearidade saturação satisfaz estes requisitos, pois é sem memória e descentralizada. Desta forma a não-linearidade $\Psi(v(t)) = \text{sat}(v(t))$, definida por (2) é representada pela Figura 7.

Contudo, note que a presença da não-linearidade de saturação pode fazer com que o sistema linear (9) não seja assintoticamente estável, isso porque a estabilidade de um sistema é dependente da amplitude e/ou energia do sinal de entrada, neste caso limitado pela não-linearidade. A fim de superar este problema e enquadrar o sistema (9)-(11) na forma proposta por Lur'e define-se a não-linearidade zona-morta descentralizada $\phi(v(t)) = \text{sat}(v(t)) - v(t)$, ou equivalente:

$$\phi(v) = \begin{cases} \bar{u} - v & \text{se } v > \bar{u} \\ 0 & \text{se } -\bar{u} \leq v \leq \bar{u}, \\ -\bar{u} - v & \text{se } v < -\bar{u} \end{cases} \quad (12)$$

Figura 7: Não-linearidade do tipo saturação.



Fonte: O autor.

Aplicando (12) ao sistema em malha fechada (9)-(11) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + B\tilde{u}(t) \\ \tilde{u}(t) &= -\phi(v(t)) \\ v(t) &= Kx(t) \end{aligned} \quad (13)$$

2.3.2.2 Região de Linearidade

O sistema em malha fechada (9)-(11) pode ser descrito conforme:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\text{sat}(Kx(t)). \quad (14)$$

Considerando a definição de saturação (2) e o sistema em malha fechada (14), para estados perto da origem ($x = 0$) tem-se que

$$u(t) = \text{sat}(Kx(t)) = Kx(t),$$

ou seja, o sistema não está saturado. Sendo assim, a seguinte definição pode ser feita:

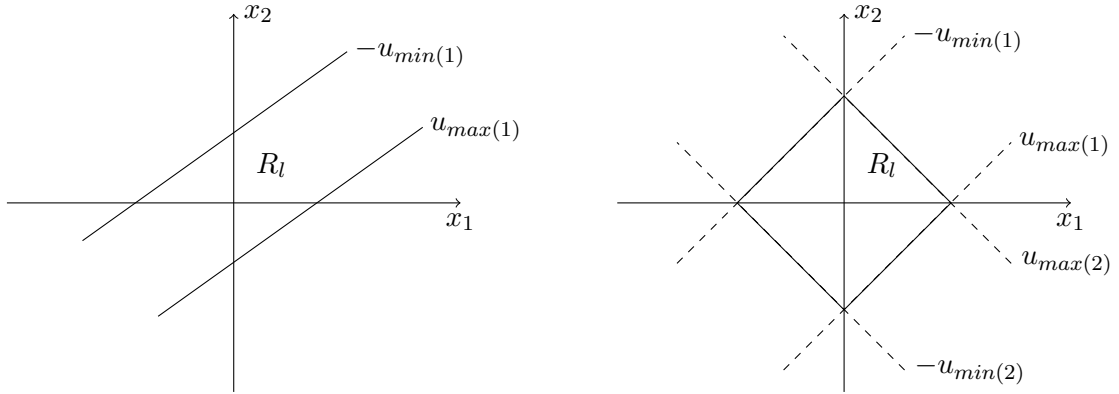
Definição 2.3.4 (Tarbouriech and et. al., 2011). A região de linearidade do sistema (14), denotada R_l , é definida como o conjunto de todos os estados $x \in \mathbb{R}^n$ de forma que $\text{sat}(Kx) = Kx$.

Com isso, R_l é definida como o seguinte conjunto poliédrico no espaço de estados:

$$R_l = S(K, u_{min}, u_{max}) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_{min(i)} \leq K_{(i)}x(t) \leq u_{max(i)}\}.$$

O conjunto $S(K, u_{min}, u_{max})$ apresenta as seguintes características geométricas:

Figura 8: Região de linearidade, respectivamente, não delimitada e delimitada.


 (a) R_l com $(m = 1, n = 2, \text{rank}(K) = 1)$.

 (b) R_l com $(m = n = 2, \text{rank}(K) = 2)$.

Fonte: O autor.

- Se $u_{\min(i)} = u_{\max(i)}, \forall i = 1 \dots m$ o conjunto é simétrico, caso contrário, assimétrico.
- Se $\text{rank}(K) = n$ o conjunto é delimitado;
- Se $\text{rank}(K) < n$ o conjunto é não delimitado;

Com o sistema inserido na região de linearidade, os estados se comportam com a seguinte a dinâmica:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t). \quad (15)$$

A Figura 8 apresenta os dois últimos casos acima mencionados. Note também que o espaço de estados é dividido em duas regiões. A primeira é definida por $S(K, u_{\min}, u_{\max})$ na qual o sistema em malha fechada é descrito pelo modelo linear (15). Na segunda região a saturação está ativa, isto é, pelo menos uma entrada de controle está saturada, e o sistema em malha fechada apresenta um comportamento não-linear.

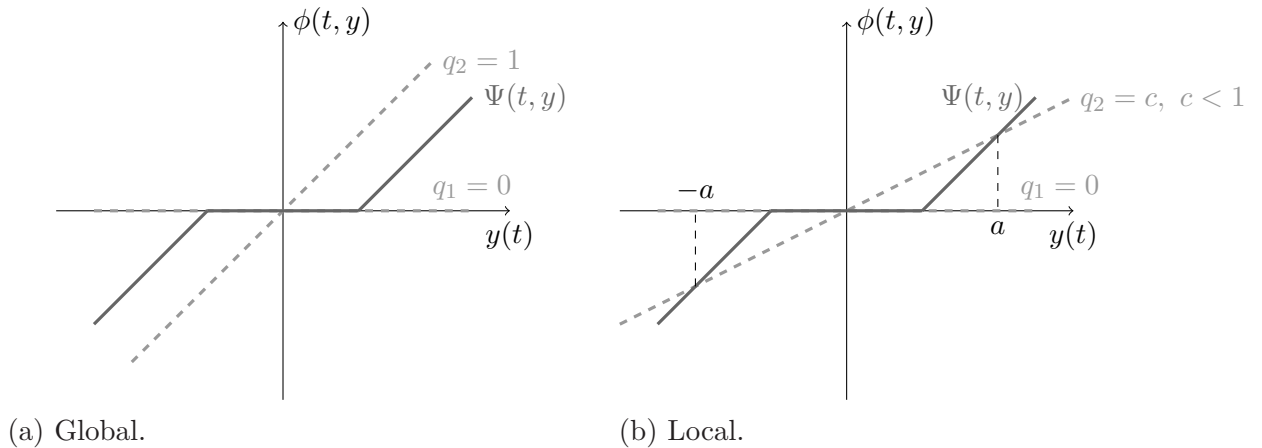
2.3.2.3 Condição de Setor Clássica

Uma função não-linear $\Psi(v(t))$ é dita uma não-linearidade de setor se ela satisfaz as seguintes condições:

Definição 2.3.5. (KHALIL, 2002) Sejam q_1 e q_2 dois coeficientes tal que $q = q_2 - q_1$ seja positivo. Então $\Psi(v(t))$ pertence ao setor (q_1, q_2) , $\forall v(t) \in \Theta \subset \mathbb{R}^{n_v}$, se

$$[\Psi(v(t)) - q_1 v(t)]' [\Psi(v(t)) - q_2 v(t)] \leq 0 \quad (16)$$

Figura 9: Condição de setor clássica - não-linearidade do tipo zona-morta descentralizada.



Fonte: O autor.

onde Θ é definido como a região de validade da condição de setor. Se Θ está estritamente contido no \mathbb{R}^{n_v} , então a condição do setor (16) é satisfeita localmente. Se Θ corresponde a todo espaço \mathbb{R}^{n_v} , então a condição de setor é satisfeita globalmente.

A Figura 9 ilustra a condição de setor para uma não-linearidade do tipo zona-morta descentralizada (12). Por exemplo, considerando a equação (13) onde $v(t) = Kx(t)$ e $\Psi(t, y) = \psi(Kx(t))$ a condição de setor (16) é verificada nos seguintes casos:

- Globalmente se $q_1 = 0$ e $q_2 = 1$. Neste caso o conjunto Θ corresponde a todo \mathbb{R}^{n_v} ;
- Localmente se $q_1 = 0$ e $q_2 = c$, $c < 1$. Neste momento, o conjunto Θ pode ser definido como $\mathcal{S}_c = \{x \in \mathbb{R}^{n_v}; |K(x(t))| \leq a\}$.

2.3.2.4 Condição de Setor Modificada

A condição de setor modificada é uma versão da condição de setor clássica aplicada exclusivamente para não-linearidades do tipo zona-morta (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005). O interesse no estudo da condição de setor generalizada é a obtenção de resultados menos conservativos se comparado com a condição de setor clássica devido a adição de um grau de liberdade às condições resultantes.

A fim de estabelecer a condição do setor modificada define-se a região de validade desta condição como

$$S(v - w, \bar{u}) = \{v, w \in \mathbb{R}^m; -\bar{u} \leq v - w \leq \bar{u}\}.$$

Baseado no conjunto $S(v - w, \bar{u})$ o seguinte lema pode ser enunciado:

Lema 2.3.3. (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA JR., 2006) Se v e w são elementos do conjunto $S(v - w, \bar{u})$, então a não-linearidade $\phi(v)$ satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\phi(v)'T(\phi(v) + w) \leq 0$$

para qualquer matriz diagonal positiva definida $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

2.3.2.5 Transformação de Laço

A transformação de laço é uma ferramenta útil para a análise de sistemas não-lineares (KHALIL, 2002). Levando em consideração o sistema na forma de Lur'e, Figura 6, onde um dos componentes não satisfaz uma determinada condição (por exemplo, condição de estabilidade, condição de setor, entre outras) pode-se reconfigurar a conexão de realimentação em uma conexão que satisfaça a condição desejada mantendo as mesmas propriedades do sistema.

Sendo $H(s)$ um sistema invariante no tempo e $\Psi(\cdot)$ uma não-linearidade pertencente a um setor $[\Omega_{min}, \Omega_{max}]$ pode-se realizar uma transformação no laço de forma a mapear a não-linearidade em um setor $[0, \Omega]$, onde $\Omega = \Omega_{max} - \Omega_{min}$ é uma constante positiva definida.

Acrescentando uma realimentação com o limite inferior do setor, ω_{min} , no laço da não-linearidade consegue-se anular o efeito provocado pela inclusão da mesma realimentação no sistema $H(s)$, resultando no digrama equivalente ilustrado na Figura 10. Com isso, a condição de setor resulta em $[\Omega_{min} - \Omega_{min}, \Omega_{max} - \Omega_{min}]$, que é equivalente a $[0, \Omega]$.

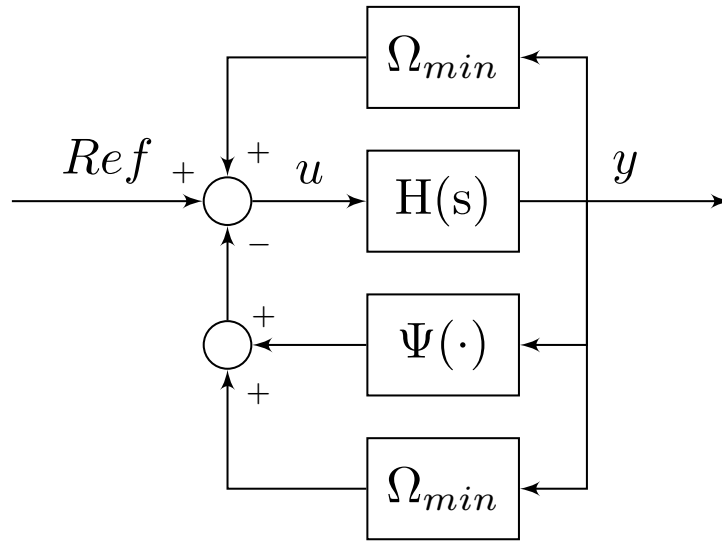
A grande vantagem no uso da transformação de laço para este trabalho é a utilização de um setor local menos conservador quando comparado com o setor $[0, \bar{\Omega}]$.

2.3.3 Estabilidade de Sistemas Quasi-LPV

Uma abordagem para representar sistemas variantes no tempo são os modelos de sistemas lineares com dependência paramétrica (em inglês, *Linear Parameter Varying - LPV*). Sua principal vantagem é permitir a aplicação de técnicas de projeto linear em modelos lineares ou não-lineares complexos (REBERGA et al., 2005; ROTONDO; NEJJARI; PUIG, 2013). Esta técnica é comumente usada para garantir estabilidade, performance e/ou robustez de sistemas de controle, possibilitando o uso da formulação LMI.

Sendo assim, muitos sistemas não-lineares podem ser representados como sistemas LPV ou Quasi-LPV (RUGH; SHAMMA, 2000), no qual se diferenciam pela aplicação

Figura 10: Diagrama de blocos da transformação do laço de Lur'e para uma não-linearidade $\Psi(\cdot)$, um sistema $H(s)$ e um setor $[\Omega_{min}, \Omega_{max}]$.



Fonte: O autor.

em sistemas lineares variantes no tempo ou em sistemas não-lineares variantes no tempo, respectivamente.

Basicamente, um sistema na forma $\dot{x} = f(x)$ é descrito por um sistema dependente de parâmetros

$$\dot{x} = A(\xi(x))x, \quad \xi(x) \in \Xi$$

onde $\xi(x)$ é um vetor de parâmetros contendo as não-linearidades do sistema original com limites restritos a um conjunto convexo Ξ .

Assumindo que as não-linearidades contidas no vetor $\xi(x)$ variem entre uma faixa de valores mínimos e máximos conhecidos, de forma que

$$\delta \in \mathcal{B}_\delta = \{\delta_i : \underline{\delta}_i \leq \delta_i \leq \bar{\delta}_i, \quad i = 1, \dots, h\}$$

onde \mathcal{B}_δ é o politopo² (GEROMEL; OLIVEIRA; HSU, 1998) que define os valores admissíveis das incertezas com 2^h vértices.

Como principal vantagem do uso desta abordagem obtém-se um conjunto convexo, possibilitando a aplicação direta na obtenção das LMIs. Por outro lado, a desvantagem de utilizar a aproximação Quasi-LPV é o aumento do grau de conservadorismo da região de estabilidade, isto porque este método forma um politopo com os limites da aproximação linear diminuindo o grau de liberdade das condições LMIs e, conseqüentemente, afetando a região de estabilidade.

² Definido como um conjunto convexo fechado representado por uma combinação convexa de vértices.

2.3.4 Métodos LMI's

Nos últimos anos, o método de desigualdade linear matricial emergiu como uma poderosa ferramenta para abordar problemas na área de controle que são difíceis ou até mesmo impossíveis de resolver na forma analítica. Embora seu uso seja recente, a história das LMI's começa em 1890 quando Lyapunov publicou seu trabalho introduzindo a tão conhecida teoria de Lyapunov. Já em 1940 ocorreu o segundo marco na história das LMI's, onde Lur'e, Postnikov e outros pesquisadores da União Soviética aplicaram os métodos de Lyapunov para resolver alguns problemas práticos na área de controle, com ênfase na estabilidade de sistemas de controle com não-linearidades no atuador (BOYD et al., 1994).

Apesar do grande avanço ocorrido na década de 40, a partir dos anos de 60 houve uma inovação nas técnicas de resolução de LMI's e conseqüentemente um aumento no número de problemas a ela relacionada. Contudo, a grande revolução ocorreu a partir dos anos 90 com o aumento da capacidade computacional e o surgimento de algoritmos de solução para LMI, por exemplo *LMI Control Toolbox* (GAHINET et al., 1994). Em seguida, surgiram novos pacotes computacionais capazes de solucionar LMI's de uma forma rápida e eficiente, como: *SDPT3* (TOH; TODD; TUTUNCU, 1996) e *SeDuMi* (STURM, 1999); além de softwares específicos como o *Yalmip* (LÖFBERG, 2004) que permite traduzir o problema LMI para uma forma genérica e assim utilizar os algoritmos para a solução.

Devido a grande capacidade de tratar sistemas com incertezas através da formulação LMI, a mesma tornou-se uma ferramenta muito usada dentro da teoria de controle robusto e posteriormente expandida para as outras áreas dentro do controle com intuito de obter condições de estabilidade e estabilização.

Esta seção tem o objetivo de apresentar duas importantes ferramentas matemáticas comumente utilizadas na solução de problemas LMIs, sendo elas: complemento de Schur e *S-Procedure*.

2.3.4.1 Complemento de Schur

O complemento de Schur permite converter desigualdades não-lineares em LMI's, sendo uma ferramenta muito importante para a manipulação de desigualdades matriciais.

Teorema 2.3.4. (DULLERUD; PAGANINI, 2000) *Supondo que Q, M e R são matrizes e que M e Q são auto-adjuntas³. Então as seguintes considerações são equivalentes*

(a) *As desigualdades matriciais $Q > 0$ e*

$$M - RQ^{-1}R' > 0 \text{ se verifica;}$$

³ Uma matriz é dita auto-adjunta se for idêntica à sua transposta conjugada.

(b) A desigualdade matricial

$$\begin{bmatrix} M & R \\ R' & Q \end{bmatrix} > 0 \text{ é satisfeita.}$$

Observe que temos resultados idênticos para o caso negativo definido, apenas substituindo ">" por "<".

2.3.4.2 S-Procedure

Outra ferramenta muito utilizada para a manipulação de desigualdades matriciais é o *S-Procedure*. Em alguns problemas, tem-se que algumas funções quadráticas devem ser negativas sempre que outras funções são negativas. Com o *S-Procedure* pode-se substituir este problema por uma desigualdade a ser satisfeita introduzindo um escalar positivo a ser determinado (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005).

Existem diferentes versões do *S-Procedure*. Neste caso será apresentado o *S-Procedure* para funções quadráticas e desigualdades não estritas.

Lema 2.3.5. (BOYD et al., 1994) Sejam F_0, \dots, F_p funções quadráticas na variável $\zeta \in \mathbb{R}^n$ definida por

$$F_i(\zeta) \triangleq \zeta^T T_i \zeta + 2u_i^T \zeta + v_i, \quad i = 0, \dots, p \text{ e } T_i = T_i^T.$$

Se existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \leq 0$, tal que $\forall x$

$$F_0(x) - \sum_{i=1}^p \lambda_i F_i(x) \leq 0$$

então

$$F_0(x) \leq 0 \quad \forall x \text{ tal que } F_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Quando $p = 1$, o inverso se verifica se existe x_0 de forma que $F_1(x_0) > 0$.

3 Sistemas Amortecidos Controlados por *Proximate Time Optimal Servomechanism*

O controlador *Proximate Time Optimal Servomechanism* (PTOS) tem como principal objetivo obter uma saída que se aproxime do tempo ótimo para servomecanismos. Sua grande importância dentro desta classe de sistemas dá-se devido a alta performance obtida no tempo de acomodação e, principalmente, por considerar a saturação do atuador na sua lei de controle. Com o projeto do controlador considerando a limitação na entrada do controle esta técnica não apresenta dependência do sinal de referência no processo de ajuste dos ganhos do controlador, diferentemente de outras técnicas que não consideram a saturação e apresentam esta dependência, por exemplo: LQG, CNF e PID.

Outra questão fundamental a respeito do controlador PTOS é garantir a estabilidade do sistema em malha fechada já que, por sua construção, é um controlador não-linear saturado (SALTON; CHEN; FU, 2012). Em particular, a não-linearidade saturação pertence a um setor limitado. Isso sugere que a estabilidade do sistema em malha fechada possa ser determinada usando o conceito de estabilidade absoluta (KHALIL, 2002; KOKOTOVIĆ; ARCAK, 2001). Neste contexto, alguns trabalhos recentes na literatura direcionam a análise de estabilidade de sistemas não-lineares do tipo Lur'e com leis de controle de realimentação de estados saturadas (CASTELAN; MORENO; PIERI, 2007), (CASTELAN; TARBOURIECH; QUEINNEC, 2008) e (GOMES DA SILVA JR. et al., 2013). Inspirando-se nestes trabalhos, desenvolve-se condições de estabilidade para a técnica de controle PTOS.

Este capítulo propõe uma extensão da técnica de controle PTOS para sistemas de segunda ordem amortecidos. A curva de troca do PTOS é distorcida obtendo uma melhor performance em sistemas com níveis consideráveis de atrito. Novos resultados de estabilidade que acomodam a saturação intrínseca e a lei de controle não-linear serão fundamentais para fornecer a teoria básica necessária para justificar a implementação da técnica proposta. Este controlador será adaptado para se enquadrar nas condições de setor apresentadas em (CASTELAN; TARBOURIECH; QUEINNEC, 2008) e (GOMES DA SILVA JR. et al., 2013), resultando em um conjunto de condições LMI para garantir a estabilidade local do sistema em malha fechada. Uma vez que as condições resultantes garantem somente estabilidade local, um procedimento de otimização será apresentado com o objetivo de maximizar uma estimativa da região de atração do sistema em malha fechada.

Ao decorrer do capítulo será apresentada a técnica de controle PTOS e em seguida

será dado ênfase no fator de desconto da aceleração. Como principal contribuição, a prova de estabilidade da extensão da técnica PTOS para sistemas amortecidos será apresentada. Finalizando, resultados de simulação irão demonstrar a melhoria do controlador proposto quando aplicado em sistemas com alto coeficiente de atrito.

3.1 Proximate Time Optimal Control

Lembrando que o objetivo do PTOS consistem em atingir um desempenho similar ao TOC para o sistema (4), reescrito aqui para para ajudar o leitor:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= b \operatorname{sat}(u), \\ y &= x_1\end{aligned}$$

mas sem apresentar o efeito indesejado do *chattering*.

Workman, Kosut e Franklin (1987) propuseram uma lei de controle baseada no tempo ótimo com o objetivo principal de usar a máxima aceleração apenas quando o sistema está longe da referência. Para melhor entender o PTOS, pode-se dividir o raciocínio em três passos, sendo eles:

1. Elimina-se a função $\operatorname{sgn}(\cdot)$ (5) na função do TOC, onde for possível, a fim de contornar o problema do *chattering*. Ainda mais, adiciona-se um parâmetro livre k para regular a entrada de controle, resultando em

$$u = k(-f(x_1) - x_2),$$

onde

$$f(x_1) = \operatorname{sgn}(x_1)\sqrt{2b\bar{u}|x_1|}$$

sendo x_1 o erro de seguimento de referência, definido como $x_1 = e - r$ onde $r = 0$.

Analisando esta lei de controle nota-se um alto ganho que satura o controle e faz o mesmo convergir para a curva de troca em tempo ótimo $x_2 = -f(x_1)$ com máxima aceleração. Contudo, quando alcança a curva de troca a entrada de controle torna-se zero. Sendo assim, deve-se adicionar outro termo para que a entrada de controle varie de um nível de saturação para outro, ou seja, de \bar{u} para $-\bar{u}$.

2. Saturar-se o controlador durante a desaceleração adicionando um termo $\text{sgn}(x_1)\bar{u}$ na função linear, corrigindo a desaceleração do controlador;

$$u = k(-f_p(x_1) - x_2)$$

onde $f_p(x_1)$ é definida como:

$$f_p(x_1) = \text{sgn}(x_1)\left(\sqrt{2b\bar{u}|x_1|} - \frac{\bar{u}}{k}\right). \quad (17)$$

Embora o controle garanta a saturação durante aceleração e desaceleração não pode garantir o seguimento de referência. Na verdade, o ponto de equilíbrio resultante é dado por:

$$\dot{y} = \dot{v} = 0 \rightarrow u = v = 0 \rightarrow f_p(x_1) = 0,$$

resultando em

$$|x_1| = \frac{\bar{u}}{2bk^2}.$$

3. Para garantir a estabilidade assintótica é feita uma troca de função no controlador conforme o sistema se aproxima da referência. Assim, troca-se da função não-linear agressiva (17) para o controle proporcional-derivativo (PD) pouco agressivo. Como consequência da troca, a saída do sistema sempre apresentará sobressinal. Para superar este problema foi incluído na função $f_p(x_1)$ um fator de desconto da aceleração, α . Esse coeficiente faz com que o sistema permaneça um menor tempo acelerando, fazendo com que o sistema consiga desacelerar mais e entre na faixa em que o $x_1 < y_l$ com menos energia. O principal problema da inclusão do coeficiente α é a perda de desempenho decorrente da diminuição do tempo de aceleração.

Assim a lei de controle do PTOS é dada por:

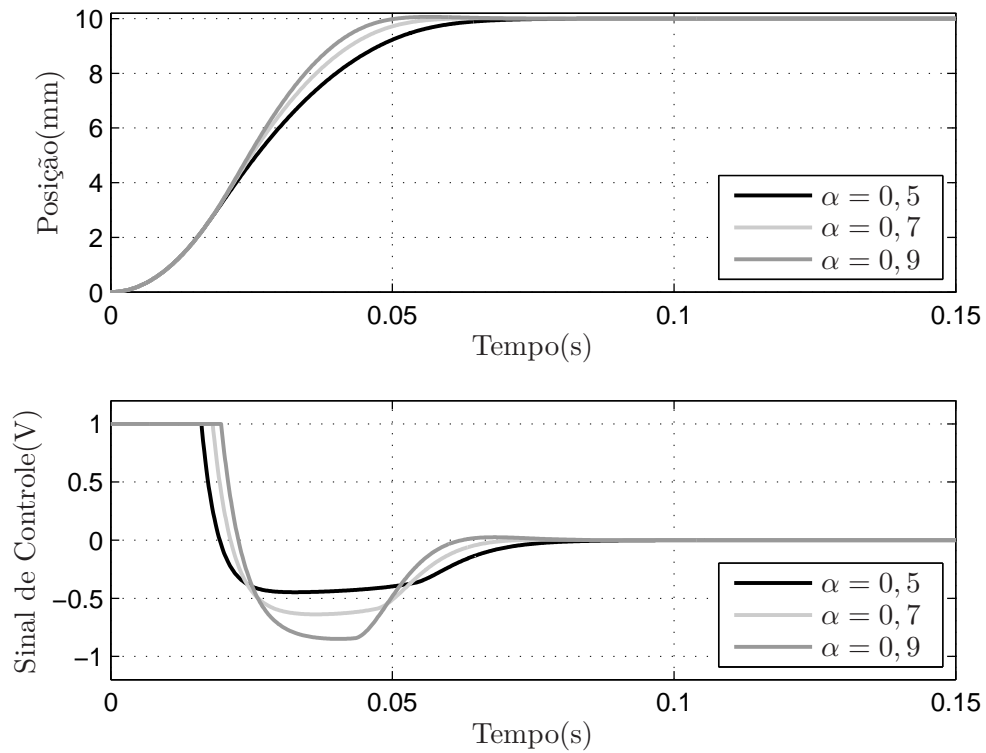
$$u = k_2(-f_{ptos}(x_1) - x_2) \quad (18)$$

Onde:

$$f_{ptos}(x_1) = \begin{cases} \frac{k_1}{k_2}x_1 & , |x_1| \leq y_l \\ \text{sgn}(x_1)\left(\sqrt{2b\bar{u}\alpha|x_1|} - \frac{\bar{u}}{k_2}\right) & , |x_1| > y_l, \end{cases} \quad (19)$$

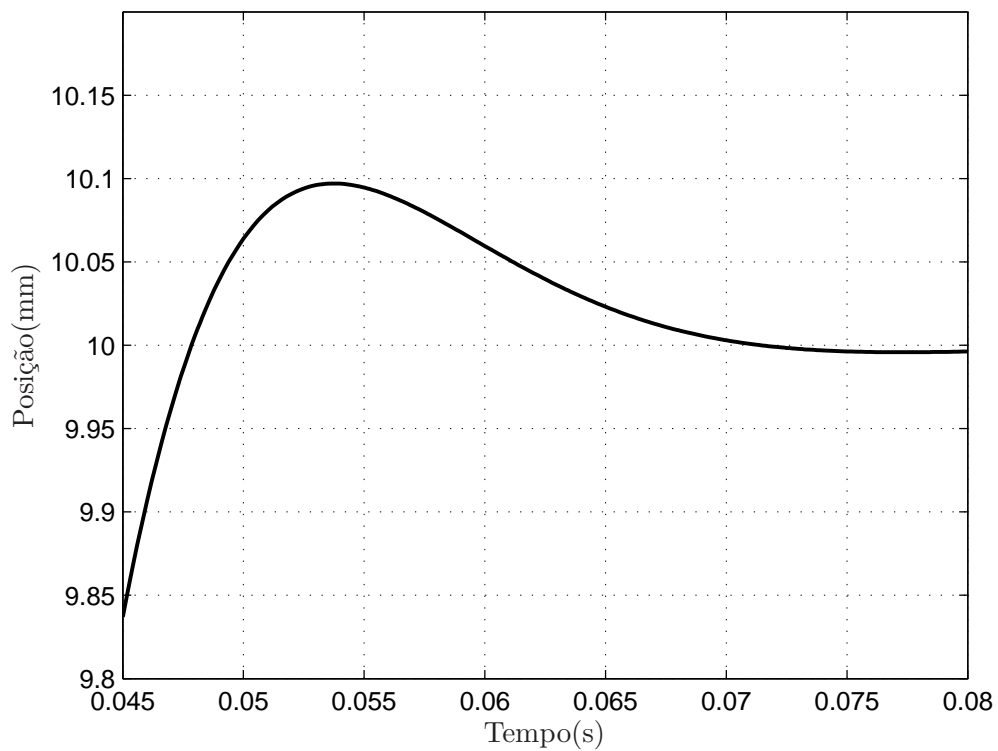
e os ganhos k_1 e k_2 são, respectivamente, o ganho proporcional e o ganho derivativo decorrentes da adição do controlador PD.

Figura 11: Resposta ao degrau do controlador PTOS para diversos valores de coeficiente α .



Fonte: O autor.

Figura 12: Resposta ao degrau do controlador PTOS para $\alpha = 1$.



Fonte: O autor.

A presença do fator de aceleração $0 < \alpha < 1$ permite ajustar o desempenho do sistema na presença de dinâmicas não-modeladas, tais como: atraso no envio de sinal por qualquer dispositivo eletrônico e falhas na estrutura mecânica. Porém, o custo da inserção deste fator é o aumento no tempo de resposta.

Para finalizar, garante-se a continuidade do controlador quando

$$\begin{aligned} f_{ptos}^-(x_1) &= f_{ptos}^+(x_1) \\ \frac{d f_{ptos}^-(x_1)}{dt} &= \frac{d f_{ptos}^+(x_1)}{dt}, \end{aligned}$$

onde f_{ptos}^- e f_{ptos}^+ representam a linha superior e inferior de (19), respectivamente. Estas condições resultam nas restrições:

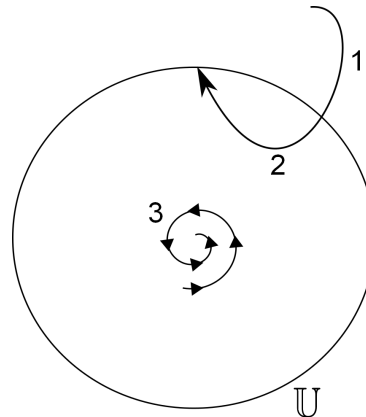
$$y_l = \frac{\bar{u}}{k_1} \quad (20)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2k_1}{b\alpha}}. \quad (21)$$

A Figura 11 apresenta a resposta ao degrau característica de um sistema tipo integrador duplo dado pela equação (4) controlado por PTOS com diferentes valores de α . Como dito anteriormente, o coeficiente α deteriora a resposta do sistema. Sendo assim, nota-se os efeitos da diminuição deste coeficiente, onde o sistema permanece um menor tempo acelerando e, conseqüentemente, utiliza menos energia para frear o sistema. Com isso, afeta-se a resposta temporal deixando o sistema mais lento. Ainda mais, há a não saturação do sinal de controle durante a desaceleração de forma que o sistema se aproxime do ponto de troca com menos energia para que o controlador PD garanta o seguimento da referência sem ou com baixo sobressinal, dependendo do valor α . Ao aumentar o valor do α para um, conforme ilustra a Figura 12, fica evidente a presença do sobressinal.

A prova de estabilidade do controlador PTOS apresentada em Workman (1987) é desenvolvida através de solução analítica. Considerando a Figura 13, pode-se resumir a ideia em três etapas, sendo elas:

1. Dada uma região \mathbb{U} saturada, qualquer trajetória que começar fora de \mathbb{U} entra em \mathbb{U} em um tempo finito;
2. Qualquer trajetória que começar em \mathbb{U} irá permanecer dentro de \mathbb{U} indefinidamente;
3. Se a trajetória estiver dentro de \mathbb{U} então a trajetória converge para a origem.

Figura 13: Região saturada \mathbb{U} e as possíveis trajetórias do sistema.

Fonte: O autor.

Apesar da prova de estabilidade ser global, há algumas restrições quanto a escolha dos parâmetros do sistema (WORKMAN, 1987). Entre elas destaca-se a restrição do parâmetro $0 > \alpha > 1$, mencionada anteriormente. Esta restrição faz com que o controlador PTOS não seja a melhor opção para servomecanismos sobre a influência do atrito por não permitir valores de α maiores que um.

3.2 Fator de Desconto da Aceleração

Quando aplicada em uma planta tipo integrador duplo, a lei de controle (18) apresenta um indesejado sobressinal por que o controlador PD, sobre as restrições (20) e (21), não é agressivo o suficiente para frear o sistema a tempo. Originalmente, o chamado fator de desconto da aceleração α em (19) foi proposto para resolver o problema.

Visto que o fator de desconto da aceleração deteriora a resposta do sistema, outras técnicas de controle foram criadas a fim de permitir que o valor α seja próximo de um evitando o efeito indesejado do sobressinal (SALTON; CHEN; FU, 2012). Observe que $\alpha = 1$ é o limite de tempo ótimo para o integrador duplo, ou seja, para valores acima deste limite, o sistema tardará muito para alternar o sinal de controle entre os níveis superior e inferior de saturação e, conseqüentemente ocorrerá sobressinal na saída, mesmo o sistema saturando durante a desaceleração. Somado a isso, a prova de estabilidade apresentada originalmente para o PTOS depende que $0 > \alpha > 1$ (PASCOAL et al., 1989).

Quando se trata de sistemas amortecidos este não é necessariamente o caso. Não somente $\alpha = 1$ pode ser usado sem sobressinal mas dependendo do nível de atrito pode-se optar por valores acima de um. Isto porque a força de atrito agindo contra o movimento permite que o sistema tenha uma dissipação de energia maior durante a desaceleração permitindo que o mesmo permaneça um maior tempo acelerando. Sendo assim, em alguns sistemas é interessante que α seja aumentado até que ocorra o sobressinal. Neste caso, α

faz o papel de um fator de aprimoramento da aceleração.

Com isso, propõe-se uma extensão da técnica PTOS para sistemas com atrito. A prova de estabilidade será realizada através da formulação LMI para sistemas sujeitos a saturação no atuador. Mesmo que esta nova prova de estabilidade seja válida somente localmente, a mesma não apresenta restrições quanto a escolha dos parâmetros, conseguindo ótimos resultados para sistemas com atrito utilizando $\alpha > 1$ e com região de estabilidade grande o suficiente para atender diversos mecanismos servo-controlados.

3.3 Condições de Estabilidade

A fim de obter uma solução prática, é proposto a extensão da técnica PTOS para sistemas amortecidos com base em sistemas no tempo discreto. Para isto, deve-se considerar uma versão discretizada da planta (3), obtida através do método de discretização *forward* (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998), dado por:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + B \text{sat}(u[k]) \\ y[k] &= Cx[k] \end{aligned} \quad (22)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_s \\ 0 & a - t_s \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ t_s b \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1]$$

onde t_s representa o período de amostragem.

Sendo assim, o sinal de controle discreto (WORKMAN; KOSUT; FRANKLIN, 1987) pode ser escrito como

$$u[k] = Fx[k] - \psi_f(L_c x[k]) \quad (23)$$

com $F = [0 \quad -k_2]$, $\psi_f(L_c x[k]) = k_2 f_{ptos}(x_1[k])$ e $L_c = [1 \quad 0]$.

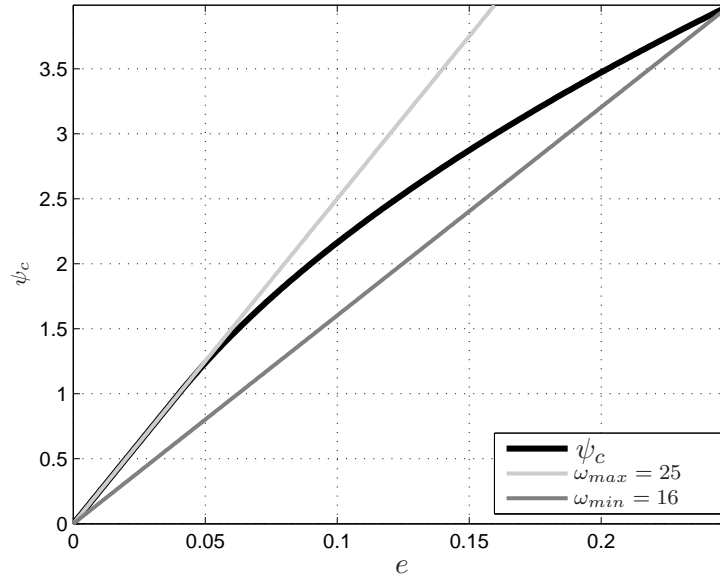
De (22) e (23) tem-se o sistema em malha fechada definido por

$$\begin{aligned} x[k+1] &= (A + BF)x[k] - B\phi(L_c x[k]) - B\psi_f(L_c x[k]) \\ y[k] &= Cx[k] \\ u[k] &= Fx[k] - \psi_f(L_c x[k]) \end{aligned} \quad (24)$$

onde

$$\phi(u[k]) = u[k] - \text{sat}(u[k]) \quad (25)$$

é a não-linearidade zona-morta descentralizada, conforme apresentado na subseção (2.3.2.1).

Figura 14: Função não-linear ψ_c e seus respectivos setores usados em simulação.

Fonte: O autor.

No intuito de aplicar ideias similares as apresentadas nos periódicos (CASTELAN; MORENO; PIERI, 2007), (CASTELAN; TARBOURIECH; QUEINNEC, 2008) e (GOMES DA SILVA JR. et al., 2013) e chegar em condições LMI para avaliar o sistema em malha fechada, os autovalores de $A + BF$ devem estar inseridos no interior do círculo unitário centrado na origem do plano complexo. Infelizmente, como $F = [0 \ -k_2]$ e $B = [0 \ t_s b]'$, com o controlador apresentado em (23), um desses autovalores está sempre posicionado sobre o círculo unitário. Para superar esta limitação, considera-se a adição de uma realimentação do erro na formulação do PTOS. Neste caso, a lei de controle resulta

$$u[k] = -\psi_f(L_c x[k]) + Kx[k] \quad (26)$$

onde

$$K = [-k_e \ -k_2].$$

Nesta nova formulação, todos os autovalores de $A+BK$ podem ser alocados dentro do círculo unitário através de uma escolha apropriada do ganho k_e .

Outra importante suposição para aplicar esta formulação é considerar o sistema em malha fechada (24) como uma conexão de um sistema linear e de duas não-linearidades pertencentes a um setor.

Por construção, a não-linearidade $\psi_f(L_c x[k])$ é ímpar e pertence localmente a um

setor $[\omega_{min}, \omega_{max}]$, conforme ilustrado na Figura 14. Sendo assim, existe um escalar positivo definido θ que verifica

$$(\psi_f(L_c x[k]) - \omega_{min} L_c x[k])' \theta (\psi_f(L_c x[k]) - \omega_{max} L_c x[k]) \leq 0$$

para todo $x[k] \in \mathcal{S}_1 \subseteq \mathbb{R}^2$, onde $\mathcal{S}_1 = \{x[k] \in \mathbb{R}^2; |L_c x[k]| \leq \rho_1, \rho_1 > 0\}$.

Aplicando uma transformação no laço de (24), onde a não-linearidade $\psi_f(L_c x[k])$ é limitada pelo setor $[\omega_{min}, \omega_{max}]$, tem-se

$$x[k+1] = (A + BK - B\omega_{min}L_c)x[k] - B\phi(u[k]) - B\psi_c(L_c x[k])$$

com $\mathbb{A} = (A + BK - B\omega_{min}L_c)$, sendo reescrita como

$$x[k+1] = \mathbb{A}x[k] - B\phi(u[k]) - B\psi_c(L_c x[k]) \quad (27)$$

com $\psi_c(L_c x[k]) = \psi_f(L_c x[k]) - \omega_{min}L_c x[k]$ limitada pelo setor $[0, \omega_c]$ onde $\omega_c = \omega_{max} - \omega_{min}$. Neste caso, a condição de setor resultante

$$\psi_c(L_c x[k])' \theta (\psi_c(L_c x[k]) - \omega_c L_c x[k]) \leq 0 \quad \forall x[k] \in \mathcal{S}_c \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (28)$$

é satisfeita localmente em \mathcal{S}_c com

$$\mathcal{S}_c = \{x[k] \in \mathbb{R}^2; |L_c x[k]| \leq \rho, \rho > 0\}.$$

A partir dos resultados apresentados em (FLORES et al., 2013), se $x[k] \in \mathcal{S}$ com

$$\mathcal{S} = \{x[k] \in \mathbb{R}^2; |(K - H)x[k]| + (1 - N)\psi_c \leq \bar{u}\},$$

então a condição de setor modificada

$$\phi(u[k])' T (\phi(u[k]) - Hx[k] - N\psi_c(L_c x[k])) \leq 0 \quad (29)$$

é satisfeita para toda matriz diagonal positiva definida T . Neste caso $H \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ e N são variáveis livres a serem determinadas. Com isso, pode-se estabelecer as condições de estabilidade para o PTOS discreto.

Teorema 3.3.1. *Considerando ω_c e K fixados a priori de forma que $\mathbb{A} = A + BK - B\omega_{min}L_c$ seja Hurwitz. Se existe uma matriz simétrica positiva definida $P^{-1} = Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,*

uma matriz $X \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ e escalares positivos ν , θ_c e θ_2 de forma que as seguintes LMIs sejam verificadas

$$\begin{bmatrix} -Q & * & * & * \\ \omega_c L_c Q & -2\theta_c & * & * \\ X & \theta_2 & -2\nu & * \\ \mathbb{A}Q & -B\theta_c & -B\nu & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} Q & * & * \\ -\omega_c L_c Q & 2\theta_c & * \\ KQ - X & \theta_c - \theta_2 & \bar{u}^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} Q & * \\ L_c Q & \rho^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (32)$$

então as trajetórias de (24) que começam no conjunto elipsoidal

$$\mathcal{E}(P, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2; x'Px \leq 1\}$$

permanecem limitadas neste conjunto e convergem assintoticamente para a origem.

Prova: Considere $V(x) = x[k]'Px[k]$ uma função quadrática candidata de Lyapunov e $\Delta V(x) = x[k+1]'Px[k+1] - x[k]'Px[k]$ sua diferença. Assumindo $x \in \mathcal{S}_c \subset \mathcal{S}$ de forma que (28) e (29) são satisfeitas se¹

$$\Delta V(x) - 2\psi'_c \theta (\psi_c - \omega_c L_c x) - 2\phi' T (\phi - Hx - N\psi_c) < 0 \quad (33)$$

então, $\forall \theta, T > 0$, segue que $\Delta V(x) < 0$. Substituindo (27) na diferença da função candidata de Lyapunov resulta em

$$\Delta V(x) = (\mathbb{A}x - B\phi + B\psi_c)'P(\mathbb{A}x - B\phi + B\psi_c) - x'Px. \quad (34)$$

Considerando a equação (34) segue que (33) pode ser reescrita na forma $\xi' \Lambda \xi < 0$ com $\xi = [x' \ \psi'_c \ \phi']$ e

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbb{A}'P\mathbb{A} & * & * \\ \theta\omega_c L_c - B'P\mathbb{A} & -2\theta + B'PB & * \\ TH - B'P\mathbb{A} & TN + B'PB & -2T + B'PB \end{bmatrix} < 0.$$

Vale a pena ressaltar que $\Lambda < 0$ implica que (34) é verificada e consequentemente $\Delta V(x) < 0$. Por outro lado, observe que Λ pode ser reescrito na forma

¹ Por simplicidade, no desenvolvimento da prova será usado a notação ϕ e ψ_c para representar $\phi(u[k])$ e $\psi_c(L_c x[k])$, respectivamente.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -P & * & * \\ \theta\omega_c L_c & -2\theta & * \\ TH & TN & -2T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{A}' \\ -B' \\ -B' \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \mathbb{A} & -B & -B \end{bmatrix}.$$

E agora, utilizando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) tem-se que $\Lambda < 0$ é equivalente a

$$\bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} -P & * & * & * \\ \theta\omega_c L_c & -2\theta & * & * \\ TH & TN & -2T & * \\ \mathbb{A} & -B & -B & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (35)$$

Considere agora $Q = P^{-1}$, $\nu = \kappa^{-1}$, $\theta_c = \delta_c^{-1}$, $X = HQ$ e $\theta_2 = \delta_c^{-1}\rho$. Multiplicando (35) a esquerda e a direita por $\text{diag}\{Q, \nu, \theta_c, I\}$ resulta que (30) é equivalente a $\bar{\Lambda} < 0$ e portanto conclui-se que (30) implica que (33) é satisfeita. Então, a satisfação da condição (30) implica que

$$\Delta V(x) < 0 \Rightarrow V(x[k]) \leq V(x[0]), \quad \forall x[0] \in \mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{S}_c,$$

garantindo que $\mathcal{E}(P, 1)$ é um conjunto invariante e que $x[k] \rightarrow 0$ conforme $k \rightarrow \infty$, isto é, $\mathcal{E}(P, 1)$ está incluído na região de atração do sistema em malha fechada.

Para continuar a prova de estabilidade, será necessário primeiramente provar que $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{S}$. Note que $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{S}$ se

$$|(K - H)x + (1 - N)\psi_c| \leq \bar{u} \quad (36)$$

e

$$x'Px \leq 1. \quad (37)$$

Elevando os dois lados da equação (36) ao quadrado e considerando $K - H = \bar{K}$ e $1 - N = \bar{N}$, obtém-se (38).

$$x'\bar{K}\frac{1}{\bar{u}^2}\bar{K}x + \psi_c'\bar{N}\frac{1}{\bar{u}^2}\bar{N}\psi_c \leq x'Px \leq 1. \quad (38)$$

Reescrevendo (38) resulta em

$$\begin{bmatrix} x \\ \psi_c \end{bmatrix}' \left(\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{K}' \\ \bar{N}' \end{bmatrix} \frac{1}{\bar{u}^2} \begin{bmatrix} \bar{K} & \bar{N} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ \psi_c \end{bmatrix} \geq 0 \quad (39)$$

$$\forall x, \psi_c \text{ tal que } \psi_c' \theta (\psi_c - \omega_c L_c x) \leq 0. \quad (40)$$

Utilizando *S-Procedure* a fim de restringir a condição baseado no setor (40) resulta em

$$\begin{bmatrix} x \\ \psi_c \end{bmatrix}' \left(\begin{bmatrix} P & * \\ \theta \omega_c L_c & 2\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{K}' \\ \bar{N}' \end{bmatrix} \frac{1}{\bar{u}^2} \begin{bmatrix} \bar{K} & \bar{N} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ \psi_c \end{bmatrix} \geq 0.$$

Aplicando agora o complemento de Schur segue que (39) é satisfeita se

$$\begin{bmatrix} P & * & * \\ -\theta \omega_c L_c & 2\theta & * \\ \bar{K} & \bar{N} & \bar{u}^2 \end{bmatrix} > 0. \quad (41)$$

Por fim, multiplicando a esquerda e a direita (41) por $\text{diag}(Q, \theta_c, 1)$ segue que (31) implica em (39).

E, finalmente, prova-se que $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{S}_c$. De forma análoga ao apresentado anteriormente, têm-se que a equação (37) deve ser satisfeita e

$$|x' L_c x| < \rho^2 \quad (42)$$

Rearranjando os termos da equação (42) resulta

$$x' L_c' \frac{1}{\rho^2} L_c x < x' P x < 1. \quad (43)$$

Aplicando o complemento de Schur em (43) e multiplicando a direita e a esquerda por $\text{diag}(Q, I)$ obtêm-se

$$\begin{bmatrix} Q & * \\ L_c Q & \rho^2 \end{bmatrix} > 0. \quad (44)$$

Com isso, concluí-se a prova do Teorema 3.3.1. \square

Observe que a utilização deste método garante a estabilidade do controlador PTOS a partir de restrições na forma de LMIs, relaxando algumas condições na escolha de $f_{ptos}(x_1[k])$. Em particular, α pode assumir qualquer valor desde que ψ_c permaneça no setor $[0, \Omega]$ localmente.

Observação 1. Um problema de otimização implícito é a maximização da $\mathcal{E}(P, 1)$ de forma que as condições do Teorema 3.3.1 sejam satisfeitas. Em (TARBOURIECH et al., 2011) são apresentados os critérios para a maximização do tamanho da elipse $\mathcal{E}(P)$ (em

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação do controlador PTOS.

α	k_1	k_2	k_e	y_l
0,99	25	27,52	0.2	0,04
1,9	25	19,38	0.2	0,04
4	25	13,36	0.2	0,04

inglês, *size criteria*) mais comuns. No exemplo numérico a ser apresentado é considerado a maximização do menor eixo da $\mathcal{E}(P, 1)$ como:

$$\max \lambda : \begin{cases} Q - \lambda I \geq 0 \\ (30) - (32) \end{cases}.$$

3.4 Resultados por Simulação

Esta seção apresentará os resultados obtidos através da simulação do controlador PTOS considerando o modelo amortecido (22). Os resultados numéricos foram obtidos através de simulação pelo software Matlab R2011b com Yalmip (LÖFBERG, 2004) e pacote SeDuMi 1.3 (STURM, 1999).

Considerando o espaço de estados (22) com uma massa $M = 15kg$, um coeficiente de atrito $c = 15kg/s$, um limite de saturação $\bar{u} = 1N$ e um período de amostragem $t_s = 50ms$, resulta em $a = 1s^{-1}$ e $b = 0,07kg^{-1}$. Os parâmetros do controlador são apresentados na Tabela 1, onde os valores para α foram obtidos de forma empírica e o valor do ganho k_e é escolhido de forma a obter o menor valor que satisfaça as condições LMI's.

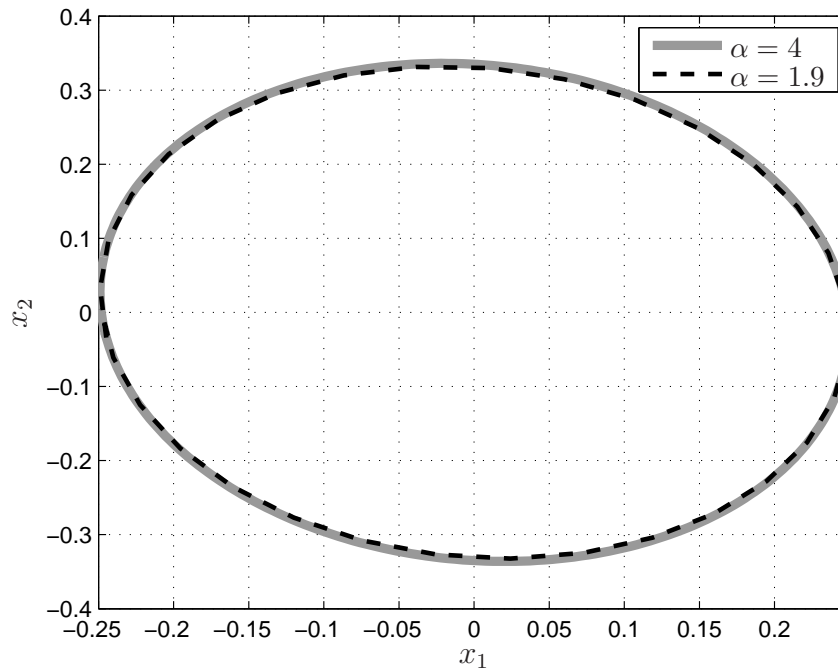
O ganho k_1 pode ser obtido através da análise da largura de banda do sistema. Maiores larguras de banda resulta em uma diminuição mais rápida do erro de posição, mas grandes larguras de banda necessitam de um modelo preciso do sistema, o que não acontece devido as dinâmicas não modeladas do sistema. Sendo assim, o ganho k_1 determina a largura de banda do sistema, devendo ser fixado levando em consideração as altas frequências não modeladas, e os valores de y_l e k_2 seguem as restrições (20) e (21), respectivamente.

Sendo o sistema descrito acima controlado pelo controlador PTOS com os parâmetros da Tabela 1, resulta em uma não-linearidade pertencente a um setor limitado ψ_c que satisfaz localmente (28) com o setor $[16 \ 25]$, conforme Figura 14, em um conjunto

$$\mathcal{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}; |x_1[k]| < 0,25, \forall k > 0\}.$$

Solucionando o problema de otimização 1 para $\alpha = 1,9$ e $\alpha = 4,0$ da Observação 1 resulta em, respectivamente,

Figura 15: Conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ para diferentes valores do fator de aprimoramento da aceleração.



Fonte: O autor.

$$P = \begin{bmatrix} 16,2371 & 0,9822 \\ 0,9822 & 8,9099 \end{bmatrix}$$

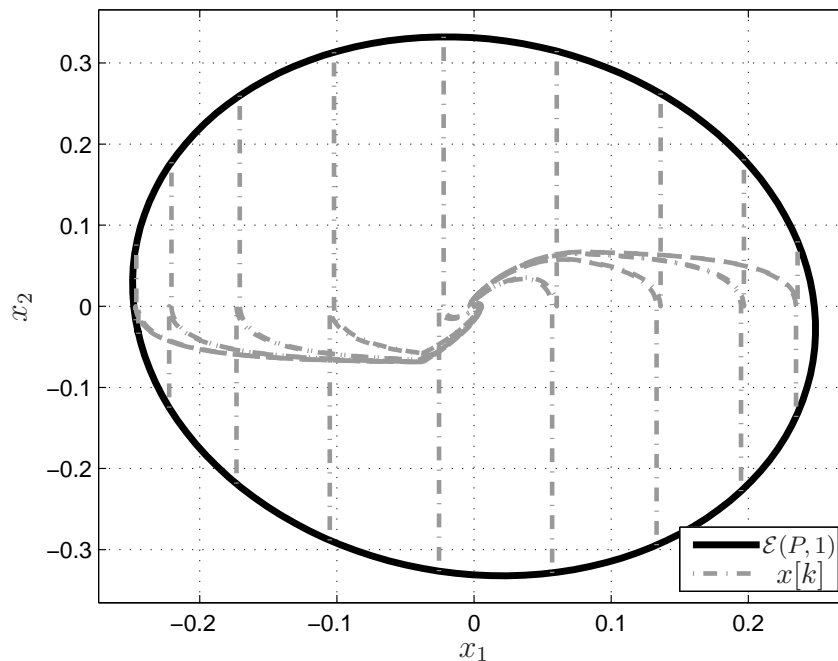
com $\lambda = 0,06110$ e

$$P = \begin{bmatrix} 16,2396 & 1,0054 \\ 1,0054 & 9,1175 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = 0,06105$. O conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ obtido pelas matrizes P acima são apresentados na Figura 15. Repare na similaridade das regiões obtidas, sendo a região com $\alpha = 4,0$ um pouco mais conservadora que a com $\alpha = 1,9$, conforme mostra a redução nos valores da matriz P para $\alpha = 4$. Estes resultados para a estabilidade são satisfatórios pois consegue-se variar o fator α gerando pouco impacto na região de estabilidade do sistema.

A Figura 16 ilustra o comportamento de trajetórias aleatórias incluindo algumas começando no limite do conjunto $\mathcal{E}(P, 1)$ para $\alpha = 4$. É importante ressaltar que todas as trajetórias convergem para a origem conforme $k \rightarrow \infty$. Com base nesta Figura, verifica-se que a estabilidade está garantida para posições com comprimento superior a $0,25m$ e velocidades próximas a $0,3m/s$.

A resposta do sistema é ilustrada na Figura 17, onde é feita uma comparação entre

Figura 16: Trajetórias começando no limite de $\mathcal{E}(P, 1)$ para $\alpha = 4$.

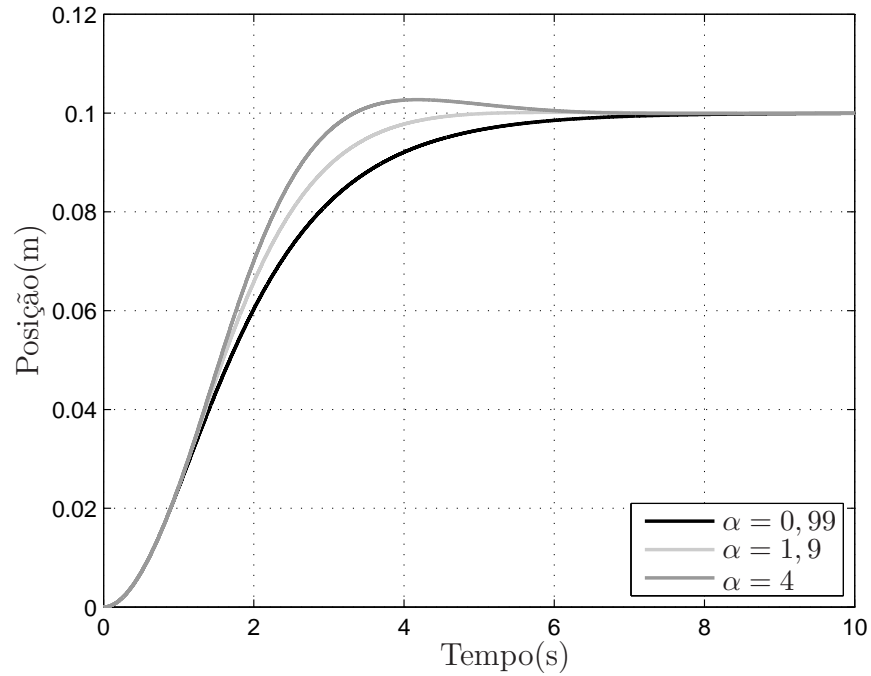
Fonte: O autor.

os controladores PTOS com $\alpha = 0,99$, $\alpha = 1,9$ e $\alpha = 4$ para uma referência de $0,1m$. Observe que o contorno das curvas dos três controladores são muito similares devido a saturação inicial. Entretanto, o fator de aprimoramento da aceleração faz com que o sistema permaneça acelerado por um período de tempo maior, com isso alcançando a referência em um menor tempo conforme aumenta-se o valor de α . Contudo, se este valor for muito alto, ilustrado no caso de $\alpha = 4$, nota-se a presença de sobressinal na saída do sistema menor que 1%, o qual pode ser aceitável em algumas aplicações. Entretanto, quando $\alpha = 1,9$ não há sobressinal. As vantagens da abordagem proposta também fica evidente na Figura 18, que demonstra que o sinal de controle é usado de uma maneira mais eficiente durante a trajetória, acelerando por um maior período de tempo e utilizando mais potência para frear o sistema. Isto posto, nota-se que ainda há banda disponível para o sinal de controle, podendo frear o sistema com maior intensidade. Como será visto posteriormente, ao adicionar amortecimento ao sistema durante o período em que $x_1 < y_l$ através de um controlador mais agressivo do que o PD consegue-se reduzir o sobressinal para maiores valores de α de forma frear o sistema com mais intensidade.

3.5 Conclusão

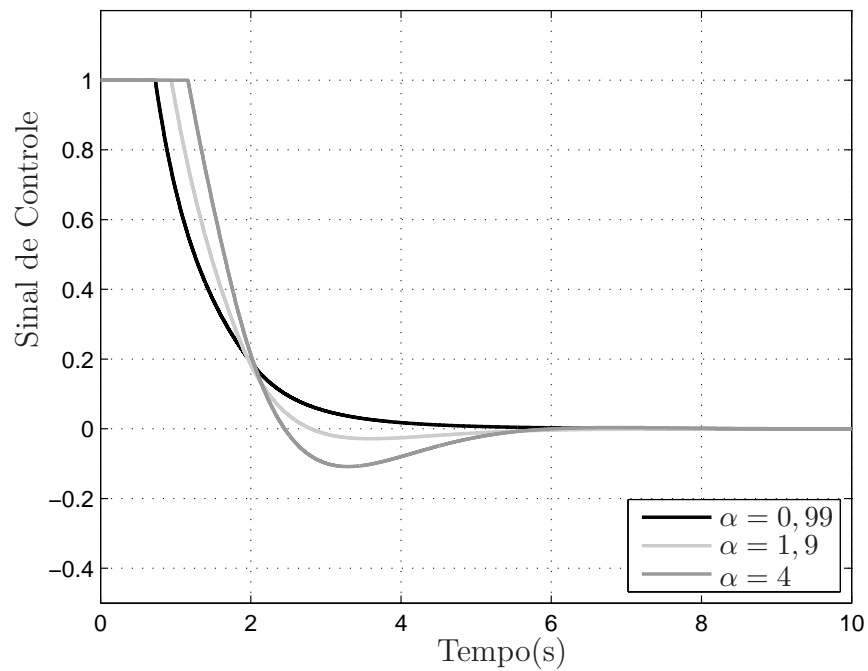
Este capítulo apresentou a versão discreta do controlador PTOS utilizando a formulação LMI na realização da prova de estabilidade. Com a aplicação desta nova técnica,

Figura 17: Resposta ao degrau unitário da comparação dos controladores. Note que $\alpha = 1,9$ não apresenta sobressinal, diferente de $\alpha = 4,0$.



Fonte: O autor.

Figura 18: Sinal de controle da comparação dos controladores. Note o efeito do aumento do valor do α no sinal de controle.



Fonte: O autor.

conseguiu-se relaxar algumas condições imposta pela prova de estabilidade original beneficiando sistemas do tipo servomecanismos com atrito.

A construção do controlador PTOS foi apresentada incluindo a ideia básica por trás da prova de estabilidade original. O fator de desconto da aceleração, considerando o seu uso para sistemas com atrito, foi nomeado como fator de aprimoramento da aceleração, uma vez que mantém o sistema acelerado um maior tempo e utiliza o atrito natural do sistema para auxiliar na frenagem. Em seguida, a prova de estabilidade através da formulação LMI foi desenvolvida. O Teorema 3.3.1 expõe as condições LMIs encontradas. Através da solução destas condições, a seção de resultados apresenta as regiões de estabilidade e valida-se a técnica proposta através da resposta ao degrau para um servomecanismo com atrito utilizando variados α .

4 Construção do Controlador *Dynamically Damped Proximate Time Optimal Servomechanism* no Tempo Discreto

O controlador *Dynamically Damped Proximate Time Optimal Servomechanism* (DDPTOS) foi desenvolvido recentemente por Salton (SALTON, 2011) com o objetivo de melhorar o desempenho de sistemas do tipo integrador duplo mantendo a base da teoria de controle de tempo ótimo PTOS associada com a teoria do controlador CNF, desenvolvido para sistemas de segunda ordem com saturação no atuador. Sua principal vantagem é utilizar o valor do fator de desconto da aceleração próximo a um sem ocasionar sobressinal na resposta. Além disso, seu estudo é de grande importância devido ao alto desempenho alcançado na resposta, a consideração da saturação no projeto da lei de controle e o fato de não apresentar dependência do sinal de referência no processo de ajuste dos ganhos.

Contudo, o trabalho desenvolvido por Salton (2011) apresenta o controlador DDPTOS somente no tempo contínuo. Sendo assim, uma extensão para o tempo discreto é necessária a fim de utilizar microcontroladores para executar o algoritmo de controle. Para utilizar esta extensão, torna-se fundamental garantir a estabilidade deste controlador no domínio discreto. Em particular, sua lei de controle é composta de duas funções não-lineares, onde a não-linearidade saturação pertence a um setor limitado e pode ser determinada através do conceito de estabilidade absoluta (KHALIL, 2002; KOKOTOVIĆ; ARCAK, 2001), em uma formulação análoga a apresentada no capítulo anterior. Em contrapartida, a função não-linear resultante do controlador CNF é par e por isso não satisfaz as condições de setor. A fim de superar este problema, é proposto a utilização da abordagem *Quasi-LPV* (HUANG, 1999) para representar esta função não-linear como uma aproximação linear com dependência paramétrica.

Este capítulo propõe a extensão do controlador DDPTOS para sistemas discreto tanto do tipo integrador duplo quanto sistemas com atrito. A estabilidade será apresentada com base na abordagem LMI para tratamento de sistema não-lineares com saturação no atuador juntamente com a abordagem *Quasi-LPV*. Como as condições resultantes garantem somente a estabilidade local, um procedimento de otimização será apresentado a fim de maximizar uma estimativa da região de atração do sistema em malha fechada.

Durante este capítulo, será explorado o projeto do controlador DDPTOS, incluindo suas particularidades, seguido da sua prova de estabilidade no tempo discreto. Para finalizar, resultados de simulação irão validar o controlador DDPTOS no tempo discreto e seu desempenho será comparado com o controlador PTOS.

4.1 Composite Nonlinear Feedback

Sendo sistemas descritos por equações diferenciais de segunda ordem, como o caso do integrador duplo, sua resposta temporal pode ser descrita através dos parâmetros do sistema ω_n , frequência natural, e ζ , o coeficiente de amortecimento. Contudo, se o sistema tiver um baixo coeficiente de amortecimento, o mesmo está sujeito a sobressinal na resposta. Ao contrário, com um alto coeficiente de amortecimento a resposta do sistema fica lenta, mas sem o sobressinal. Sendo assim, o projeto da lei de controle fica com um compromisso entre a velocidade de resposta e o sobressinal (LEWIS, 1953).

Portanto, Lewis (1953) desenvolveu uma lei de controle por realimentação que causa uma variação no amortecimento do sistema durante o período transiente. Posteriormente, Lin, Pachter e Banda (1998) aprimoraram a ideia deste controlador desenvolvendo uma lei de controle não-linear para uma classe de sistemas de segunda ordem sujeitos a saturação no atuador conhecida como CNF.

Este controle consiste na composição em uma lei de controle linear associada com uma lei de controle não-linear, sem realizar troca de função. A realimentação linear é projetada para obter um sistema em malha fechada com uma pequena taxa de amortecimento resultando em uma rápida resposta e ao mesmo tempo não excedendo os limites do atuador para os níveis de comandos desejados na entrada. A lei de controle não-linear é usada para aumentar a taxa de amortecimento conforme o sistema aproxima-se da referência, assim reduzindo o sobressinal causado pela parte linear subamortecida.

Para melhor entender o CNF, considere o sistema (4) em sua representação em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bsat(u) \\ y &= Cx \end{cases}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^p$ e são, respectivamente, o estado, a entrada de controle e a saída medida. A , B , C são matrizes constantes com dimensões apropriadas. Ainda mais, lembrando que $x_1 = e$.

Sendo assim, pode-se projetar a lei de controle CNF seguindo três etapas. Na primeira etapa é projetada uma lei de controle linear por realimentação de estados, na segunda etapa é projetada a lei de controle não linear e por último realiza-se a combinação

das duas leis de controle.

1. Projeto da lei linear:

$$u_l = Kx \quad (45)$$

onde K pode ser projetado de forma que $A + BK$ seja uma matriz assintoticamente estável e o sistema de controle em malha fechada tenha as propriedades desejadas, isto é, baixo fator de amortecimento. Ressalta-se também que K pode ser calculado por outras técnicas, por exemplo, métodos de otimização.

2. Projeto da lei não-linear:

$$u_{nl} = Wxv(x_1) \quad (46)$$

onde o ganho W é projetado de forma análoga ao ganho da parte linear K e a função $v(x_1)$ é utilizada para modificar o amortecimento do sistema em malha fechada conforme o mesmo aproxima-se da referência. Uma possível função $v(x_1)$ candidata é:

$$v(x_1) = exp^{-\beta|x_1|}$$

onde exp representa o número de Euler e β é um escalar positivo escolhido para obter a performance desejada.

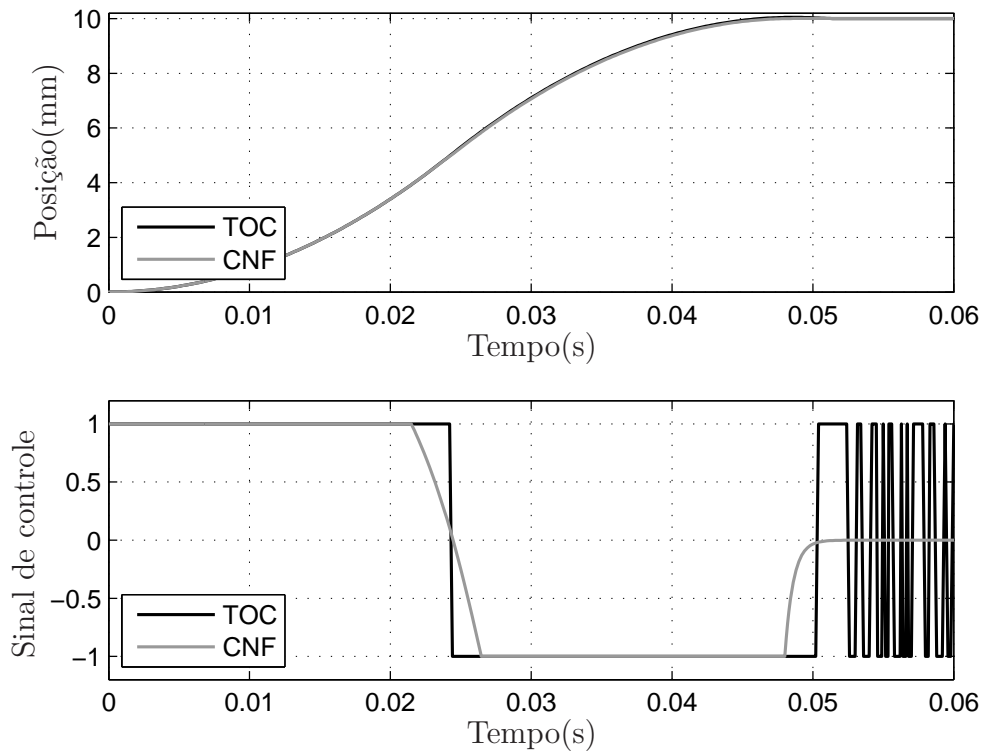
3. Composição de (45) e (46):

$$u_{cnf} = Kx + Wxv(x_1)$$

Relembrado a lei de controle PTOS, discutida anteriormente, tem-se duas leis de controles distintas, onde uma lei de controle não linear atuando quando o erro é menor que o valor y_l seguido de uma lei linear atuando no restante do tempo. Com isto, o PTOS realiza uma troca de função durante o transiente. Se mal projetado, pode gerar uma resposta sem a suavidade desejada de forma a limitar a performance do sistema (CHEN et al., 2003). Neste quesito, a técnica CNF destaca-se por atingir o tempo quase ótimo sem realizar a troca de função. Contudo, esta técnica apresenta uma dependência do degrau dado ao sistema, sendo necessário reajustar os ganhos do controlador se houver variação na referência, tornando-se muito difícil a sua utilização prática.

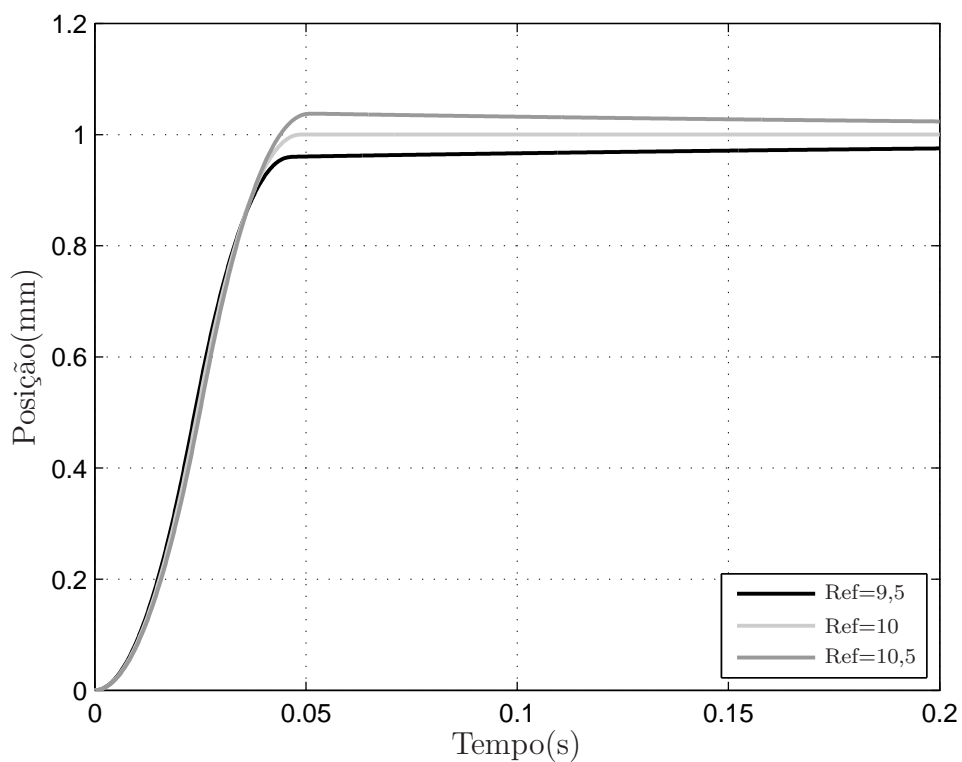
A Figura 19 mostra o desempenho da lei de controle CNF aplicada em um sistema integrador duplo comparada com a lei de controle teórica TOC, para uma referência de 10mm. Note os sinais de controle, onde o sinal do CNF se aproxima do sinal obtido com o controle TOC. Com isso, é dito que o controlador CNF resulta na performance quase ótima do sistema. Já a Figura 20 ilustra uma comparação normalizada entre três referências distintas aplicadas no mesmo sistema, ficando evidente a dependência do sinal

Figura 19: Resposta ao degrau de 10mm do sistema integrador duplo com os controladores CNF e TOC.



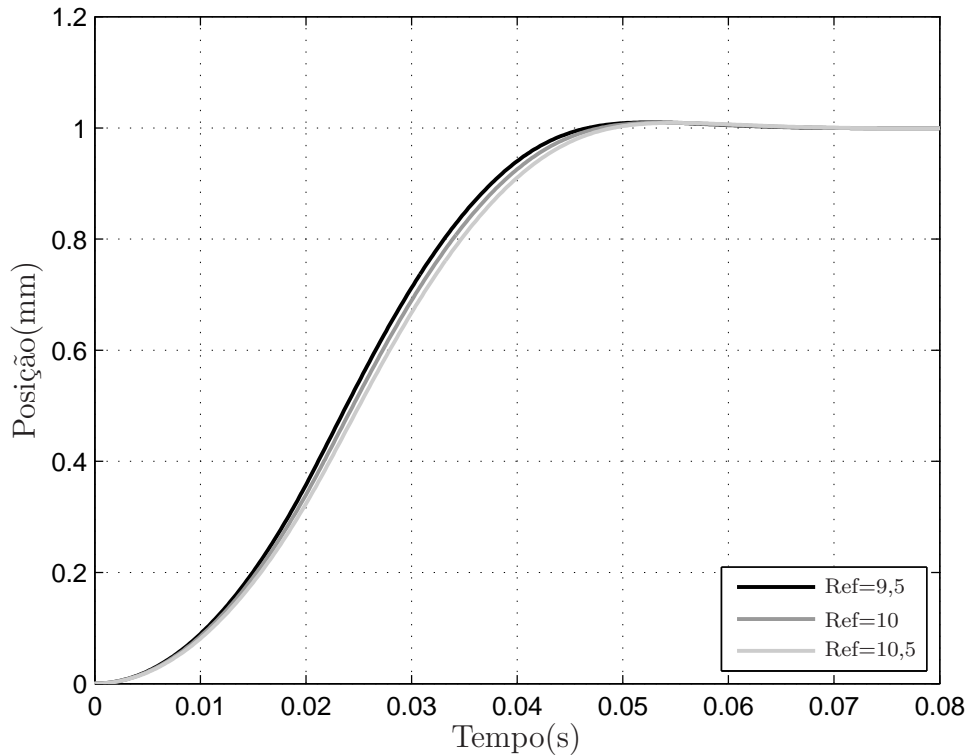
Fonte: O autor.

Figura 20: Resposta normalizada para referências de 9,5mm, 10mm e 10,5mm do sistema integrador duplo com o controlador CNF.



Fonte: O autor.

Figura 21: Resposta normalizada para referências de 9,5mm, 10mm e 10,5mm do sistema integrador duplo com o controlador PTOS.



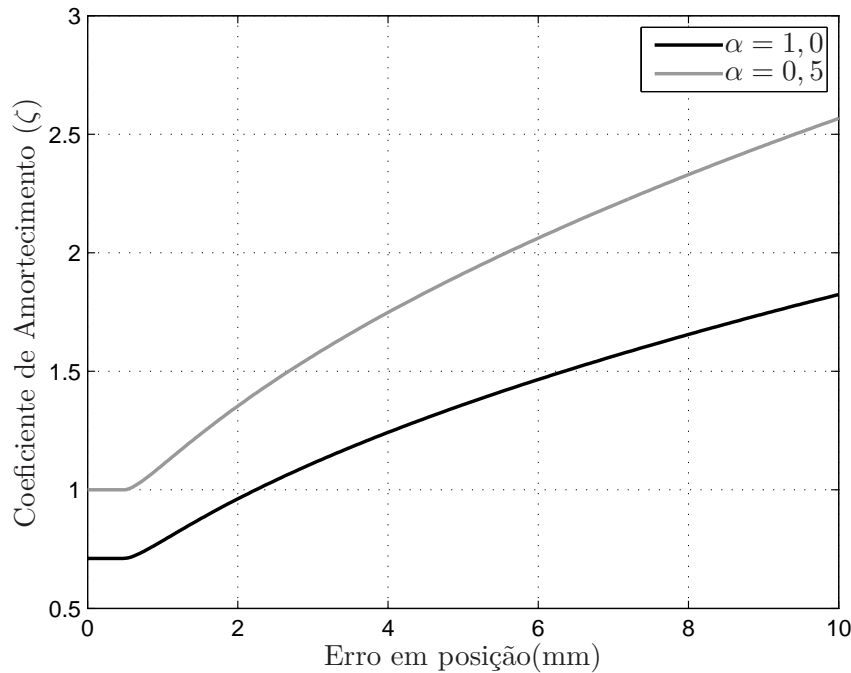
Fonte: O autor.

de referência na lei de controle CNF. Explorando melhor este tema, esta dependência ocorre devido ao controlador CNF não considerar a saturação no projeto de sua lei de controle, de forma que a variação do amortecimento do sistema seja dependente da referência aplicada. Com isso, ao aumentar o valor da referência o sistema torna-se amortecido tardiamente ocasionando o sobressinal e demorando para alcançar a referência, uma vez que o sistema tem um coeficiente de amortecimento muito alto. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para a referência menor que a utilizada para ajustar os ganhos, só que agora o sistema amortece muito cedo, resultando em uma resposta lenta. Uma comparação deste sistema controlado pelo PTOS pode ser feita através da Figura 21, onde a resposta aos degraus obtidas apresentam apenas uma pequena variação no tempo de acomodação, não prejudicando o seguimento da referência.

4.2 Dynamically Damped Proximate Time Optimal Servomechanism

A ideia básica do controlador DDPTOS é conseguir uma lei de controle quase ótima baseada no controlador PTOS, onde o fator de desconto de aceleração consiga assumir

Figura 22: Coeficientes de amortecimento do sistema em malha fechada para diferentes valores de α .



Fonte: O autor.

valores próximo ao unitário. Como dito anteriormente, esta constante foi adicionada ao controlador PTOS a fim de evitar o sobressinal na saída do sistema devido a troca de função no controlador ocorrer para um simples PD, onde o mesmo não consegue frear o sistema suficientemente para evitar o sobressinal.

Como mostrado em (CHOI; JEONG; GWEON, 2006), para sistemas do tipo integrador duplo a relação entre o fator de desconto da aceleração e o coeficiente de amortecimento do sistema em malha-fechada é dada por

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}. \quad (47)$$

Fica evidente pela equação (47) que pequenos valores de α resultam em grandes valores do coeficiente de amortecimento do sistema em malha fechada. Por exemplo, o valor mínimo deste coeficiente, quando $\alpha \rightarrow 1$, é 0.707 (XIONG; WEERASOORIYA; LOW, 1996), resultando em um grande sobressinal. A Figura 22 mostra que o PTOS tem um alto coeficiente de amortecimento no começo e quando entra na região linear este coeficiente torna-se constante.

Com o intuito de superar este problema diminuindo o conservadorismo presente na lei de controle PTOS, trocou-se a função linear PD por uma função não-linear agressiva

que adiciona amortecimento ao sistema conforme o mesmo se aproxima da referência, de acordo com o trabalho de Lin et. al. em (LIN; PACHTER; BANDA, 1998). Em oposição as ideias de (XIONG; WEERASOORIYA; LOW, 1996), o controlador proposto utiliza um amortecimento dinâmico somente quando o sistema entra na faixa $|e| \leq y_l$. Isto permite ao sistema evitar o sobressinal enquanto mantém um alto desempenho ($\alpha \rightarrow 1$) e a simplicidade do PTOS. Além do mais, como a faixa de atuação da função não-linear baseada no CNF é fixa, isto é, o valor de y_l depende apenas da saturação do sistema e do ganho k_1 , pode-se alterar o valor da referência não ocorrendo o efeito indesejado de dependência da referência ocorrida no controlador CNF.

Sendo assim, a lei de controle resulta em:

$$u = -\psi_f(x_1) - \psi_a(x_1)x_2. \quad (48)$$

Onde:

$$\psi_f(x_1) = \begin{cases} k_1 x_1 & , |x_1| \leq y_l \\ \text{sgn}(x_1) k_2 (\sqrt{2\alpha |x_1| \bar{u} b} - \frac{\bar{u}}{k_2}) & , |x_1| > y_l \end{cases}, \quad (49)$$

e

$$\psi_a = k_2(1 + \rho(x_1)) \quad (50)$$

com

$$\rho(x_1) = \begin{cases} \beta(|x_1| - y_l)^2 & , |x_1| \leq y_l \\ 0 & , |x_1| > y_l \end{cases},$$

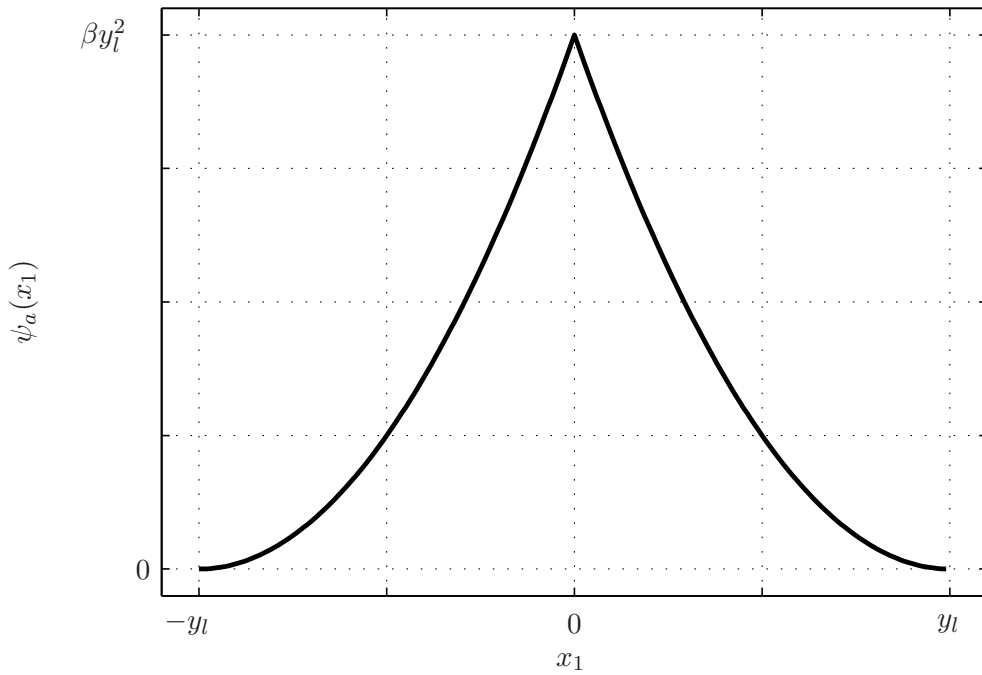
sendo a constante β é um parâmetro livre para ajustar o amortecimento adicionado ao sistema (SALTON et al., 2011).

Repare que, enquanto $|x_1| > y_l$ o controlador aplicado é o tradicional PTOS, mas para $|x_1| \leq y_l$, um ganho dinâmico é aplicado na realimentação de velocidade a fim de adicionar amortecimento, sendo exatamente a ideia do CNF, discutida anteriormente. A Figura 23 ilustra bem este comportamento, onde nota-se o aumento do amortecimento conforme o estado x_1 tende à zero.

4.2.1 Extensão para Sistemas no Tempo Discreto

O controlador DDPTOS pode ser discretizado apenas fazendo uma aproximação da lei de controle no domínio contínuo (48) para o discreto. Isto porque, conforme aumenta a taxa de amostragem, o sistema no domínio discreto tende a se comportar de forma idêntica a um sistema de controle contínuo amostrado. Esse fato não significa que a taxa

Figura 23: Função não-linear ψ_a .



Fonte: O autor.

de amostragem será muito alta ou maior do que se usaria se fosse escolhida de outra forma, conforme (WORKMAN, 1987) e (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998).

Sendo assim, a lei de controle no tempo discreto resulta em:

$$u[k] = -\psi_f(x_1[k]) - \psi_a(x_1[k])x_2[k]. \quad (51)$$

Onde:

$$\psi_f(x_1[k]) = \begin{cases} k_1 x_1[k] & , |x_1[k]| \leq y_l \\ \text{sgn}(x_1[k]) k_2 (\sqrt{2\alpha |x_1[k]| \bar{u} b} - \frac{\bar{u}}{k_2}) & , |x_1[k]| > y_l \end{cases}$$

e

$$\psi_a[k] = k_2 (1 + \rho(x_1[k]))$$

com

$$\rho(x_1[k]) = \begin{cases} 1 + \beta (|x_1[k]| - y_l)^2 & , |x_1[k]| \leq y_l \\ 1 & , |x_1[k]| > y_l \end{cases}. \quad (52)$$

4.3 Função Não-linear do Controlador

A fim de utilizar a abordagem LMI para solução de problemas de estabilidade de sistema não-lineares é importante que o sistema tenha uma solução baseada nas condições de Lyapunov. Para isto, a função não-linear do controlador deve satisfazer uma determinada condição de setor. Uma análise gráfica da condição do setor apresentada na seção 2.3.2.3 pode ser feita considerando-se duas retas $\theta_1 e$ e $\theta_2 e$ passando pela origem com inclinações θ_1 e θ_2 , respectivamente. A condição de setor para uma função não-linear $\Psi(t, e)$ é satisfeita se esta função estiver entre as duas retas.

Analisando as funções (49) e (50), respectivamente Figuras 14 e 23, conclui-se que $\psi_f(x_1)$ satisfaz a condição do setor localmente, porém com uma escolha adequada de valores a mesma pode ser satisfeita globalmente. Entretanto, o mesmo não ocorre com a função ψ_a devido a mesma ser par e não se enquadrar dentro das condições de setor.

Com o propósito de utilizar a abordagem LMI para provar a estabilidade do controlador DDPTOS e levando em consideração o problema da função ψ_a ser par, torna-se necessário a utilização da abordagem *Quasi-LPV* para representar a função não-linear como um função linear com dependência paramétrica.

Sendo a função $\rho(x_1)$, equação (52), a parte não linear de ψ_a , pode-se representá-la como:

$$\delta = \beta(|x_1| - y_l)^2$$

onde $\underline{\delta} < \delta < \bar{\delta}$. Note que o estado x_1 , durante a atuação da função ψ_a , assume valores que variam de y_l até 0, resultando em $0 < \delta < \beta y_l^2$.

Sendo assim, a função ψ_a é descrita como

$$\psi_a = k_2(1 + \rho(x_1)) = \begin{cases} k_2(1 + \delta) & , x_1 \leq y_l \\ k_2 & , x_1 > y_l \end{cases} .$$

Com esta aproximação consegue-se reescrever a função do controlador DDPTOS para se enquadrar nas condições de setor, resultando em conjunto de condições na forma LMI que garantem a estabilidade do sistema em malha fechada, conforme será apresentado na próxima seção.

4.4 Condições de Estabilidade

O desenvolvimento da condição de estabilidade para o controlador DDPTOS é muito similar ao desenvolvimento apresentado na Seção 3.3 para o controlador PTOS. Por isso, esta seção apresentará o desenvolvimento necessário para chegar nas condições LMIs seguido da prova do teorema de estabilidade do controlador DDPTOS apresentada de forma resumida.

Aplicando a abordagem *Quasi-LPV* apresentada na seção 4.3 para representar a função não linear $\psi_a([k])$ resulta na lei de controle

$$u[k] = -\psi_f(L_c x[k]) - Fx[k] \quad (53)$$

onde $L_c = [1 \ 0]$ e $F = [0 \ k_\delta]$ com $k_\delta = k_2(1 + \delta)$.

A fim de obter nas condições LMI para avaliar o sistema em malha fechada, os autovalores de $A + BF$ devem estar inserido no interior do círculo unitário centrado na origem no plano complexo. Infelizmente, sendo $F = [0 \ k_\delta]$ e $B = [0 \ t_s b]'$, com o controlador apresentado em (51) um desses autovalores está sempre posicionado sobre o círculo unitário. Para superar esta limitação, considera-se a adição de uma realimentação do erro na formulação do DDPTOS. Neste caso, a lei de controle resulta

$$u[k] = \psi_f(L_c x[k]) - Fx[k] - k_e x_1[k]. \quad (54)$$

Substituindo (53) em (22) resulta no sistema em malha fechada definido por

$$\begin{cases} x[k+1] &= (A + BK)x[k] - B\phi(u[k]) - B\psi_f(L_c x[k]) \\ y[k] &= Cx[k] \\ u[k] &= \psi_f(L_c x[k]) + Kx[k] \end{cases} \quad (55)$$

Onde $\phi(u[k])$, definida na equação (25), é a não-linearidade da zona morta e K é definido como $K = [-k_e \ -k_\delta]$.

Por construção, a não-linearidade $\psi_f(L_c x[k])$ é ímpar e pertence localmente a um setor $[\omega_{min}, \omega_{max}]$. Sendo assim, existe um escalar positivo definido θ que verifica

$$(\psi_f(L_c x[k]) - \omega_{min} L_c x[k])' \theta (\psi_f(L_c x[k]) - \omega_{max} L_c x[k])$$

para todo $x[k] \in \mathcal{S}_1 \subseteq \mathbb{R}^2$. Aplicando uma transformação no laço de (55), onde a não-linearidade $\psi_f(L_c x[k])$ é limitada pelo setor $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ tem-se

$$x[k+1] = (A + BK - B\omega_{min} L_c)x[k] - B\phi(u[k]) - B\psi_c(L_c x[k])$$

sendo reescrita como

$$x[k+1] = \mathbb{A}x[k] - B\phi(u[k]) - B\psi_c(L_c x[k]) \quad (56)$$

com $\psi_c(L_c x[k]) = \psi_f(L_c x[k]) - \omega_{min} L_c x[k]$ limitada pelo setor $[0, \omega_c]$ onde $\omega_c = \omega_{max} - \omega_{min}$. Neste caso, a condição de setor resultante

$$\psi_c(L_c x[k])' \theta (\psi_c(L_c x[k]) - \omega_c L_c x[k]) \leq 0 \quad \forall x[k] \in \mathcal{S}_c \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (57)$$

é satisfeita localmente em \mathcal{S}_c com

$$\mathcal{S}_c = \{x \in \mathbb{R}^2; |L_c x[k]| \leq \rho, \rho > 0\}.$$

A partir dos resultados apresentados em (GOMES DA SILVA JR. et al., 2013), se $x[k] \in \mathcal{S}$ com

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2; |(K - H)x[k]| + (1 - N)\psi_c \leq \bar{u}\},$$

então a condição de setor modificada

$$\phi(u[k])' T (\phi(u[k]) - Hx[k] - N\psi_c(L_c x[k])) \leq 0 \quad (58)$$

é satisfeita para alguma matriz diagonal positiva definida T . Neste caso $H \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ e N são variáveis livres a serem determinadas.

A partir destas considerações descritas acima e definindo K_j como o ganho variável nos dois extremos do politopo, sendo $j = 1$ o limite inferior e $j = 2$ o limite superior, é enunciado o teorema de estabilidade do sistema (56) com a lei de controle (53).

Teorema 4.4.1. *Considerando ω_c e K_j , $j = 1, 2$ fixados a priori de forma que $\mathbb{A}_j = A + BK_j - B\omega_{min}L_c$ seja Hurwitz. Se existe uma matriz simétrica positiva definida $P^{-1} = Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, uma matriz $X \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ e escalares positivos ν , θ_c e θ_2 de forma que as seguintes LMI's sejam verificadas*

$$\begin{bmatrix} -Q & * & * & * \\ \omega_c L_c Q & -2\theta_c & * & * \\ X & \theta_2 & -2\nu & * \\ \mathbb{A}_j Q & -B\theta_c & -B\nu & -Q \end{bmatrix} < 0, \quad j = 1, 2 \quad (59)$$

$$\begin{bmatrix} Q & * & * \\ -\omega_c L_c Q & 2\theta_c & * \\ K_j Q - X & \theta_c - \theta_2 & \bar{u}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, 2 \quad (60)$$

$$\begin{bmatrix} Q & * \\ L_c Q & \rho^2 \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, 2 \quad (61)$$

então as trajetórias de (24) que começam no conjunto elipsoidal

$$\mathcal{E}(P, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2; x'Px \leq 1\}$$

permanecem limitadas neste conjunto e convergem assintoticamente para a origem.

Prova: Considere $V(x) = x[k]'Px[k]$ uma função quadrática candidata de Lyapunov e $\Delta V(x) = x[k+1]'Px[k+1] - x[k]'Px[k]$ sua diferença. Assumindo $x \in \mathcal{S}_c \subset \mathcal{S}$ de forma que (57) e (58) são satisfeita se

$$\Delta V(x) - 2\psi'_c\theta(\psi_c - \omega_c L_c x) - 2\phi'T(\phi - Hx - N\psi_c) < 0 \quad (62)$$

então, $\forall \theta, T > 0$, segue que $\Delta V(x) < 0$. Substituindo (56) na derivada da função candidata de Lyapunov reescreve-se (62) na forma $\xi'\Lambda\xi < 0$ com $\xi = [x' \ \psi'_c \ \phi']$ e

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbb{A}'P\mathbb{A} & * & * \\ \theta\omega_c L_c - B'P\mathbb{A} & -2\theta + B'PB & * \\ TH - B'P\mathbb{A} & TN + B'PB & -2T + B'PB \end{bmatrix} < 0.$$

Vale a pena ressaltar que $\Lambda < 0$ implica que (62) é satisfeita e, conseqüentemente, $\Delta V(x) < 0$. Por outro lado, note que Λ pode ser escrita na forma de

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -P & * & * \\ \theta\omega_c L_c & -2\theta & * \\ TH & TN & -2T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{A}' \\ -B' \\ -B' \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \mathbb{A} & -B & -B \end{bmatrix}$$

e, pelo complemento de Schur (BOYD et al., 1994), resulta que $\Lambda < 0$ é equivalente a

$$\bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} -P & * & * & * \\ \theta\omega_c L_c & -2\theta & * & * \\ TH & TN & -2T & * \\ \mathbb{A} & -B & -B & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (63)$$

Considere agora $Q = P^{-1}$, $\nu = T^{-1}$, $\theta_c = \theta^{-1}$, $X = HQ$ e $\theta_2 = \theta^{-1}N$. Multiplicando (63) a esquerda e a direita por $diag\{Q, \nu, \theta_c, I\}$ resulta que (59) é equivalente a $\Lambda < 0$ e portanto conclui-se que (59) implica que (62) é satisfeita. Por argumentos de convexidade (TARBOURIECH; GARCIA, 1997), a condição (63) é válida para todo $k_\delta \in Co\{\underline{k}_\delta, \bar{k}_\delta\}$ se (63) é satisfeita com $k_\delta = \underline{k}_\delta$ e $k_\delta = \bar{k}_\delta$. Então, a satisfação de (59) implica que $\Delta V(x) < -\sigma V(x)$ para algum $0 < \sigma < 1$, onde $x \in \mathcal{S} \cap \mathcal{S}_c$. Isso resulta em $V(x[k+1]) < (1-\sigma)V(x[k]) = \sigma V(x[k])$ tal que $V(x[k]) \leq \sigma^{-k}V(x[0])$, $\forall x[0] \in \mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{S}$ garantindo que $\mathcal{E}(P, 1)$ é um conjunto invariante e que $x[k] \rightarrow 0$ conforme $k \rightarrow \infty$, isto é, que $\mathcal{E}(P, 1)$ está incluída na região de atração da origem para o sistema em malha fechada (55).

Para continuar a prova de estabilidade, é necessário provar que $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{S}$ e $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{S}_c$. As provas em questão são idênticas as apresentada na Seção 3.3, e não serão repetidas neste capítulo.

Com isso, concluí-se a prova do Teorema 4.4.1. \square

Observe que utilizando esta aproximação garante-se a estabilidade do controlador DDPTOS com relação a abordagem LMI, relaxando algumas condições na escolha da função ψ_c . Ainda mais, não está mais presente a restrição $\alpha < 1$, na verdade, α pode assumir qualquer valor desde que ψ_c permaneça no setor $[0, \omega_c] \forall x \in \mathbb{R}^2$, sendo uma importante consideração quando trata-se de sistemas com atrito.

Observação 2. Um problema de otimização implícito é a maximização da $\mathcal{E}(P, 1)$ de forma que as condições do Teorema 4.4.1 sejam satisfeitas. No exemplo numérico a ser apresentado é considerado a maximização do menor eixo da $\mathcal{E}(P, 1)$ como:

$$\max \lambda : \begin{cases} Q - \lambda I \geq 0 \\ (30) - (32) \end{cases}.$$

4.5 Resultados por Simulação

Esta seção apresentará os resultados obtidos através de simulação do sistema integrador duplo com o controlador DDPTOS juntamente com uma comparação com os resultados obtidos com o controlador PTOS. Além disso, será apresentado os resultados obtidos através da solução da formulação LMI através do software Matlab R2011b com Yalmip (LÖFBERG, 2004) e pacote SeDuMi 1.3 (STURM, 1999).

Considerando o espaço de estados (22) com uma massa $M = 15kg$, um limite de saturação $\bar{u} = 1$ e um período de amostragem $t_s = 50ms$, resulta em $a = 1s^{-1}N$ e $b = 0,07kg^{-1}$. Os parâmetros do controlador são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros utilizados na simulação para os controladores DDPTOS e PTOS.

Controlador	k_1	α	k_2	k_e	y_l	β
DDPTOS	25	4	13,36	0,2	0,04	300
PTOS	25	4	13,36	0,2	0,04	-

Sendo o sistema (22) controlado pelo controlador (51) com parâmetro $\alpha = 4$, tem-se que a não-linearidade pertencente a um setor limitado ψ_c satisfaz localmente (57) com $[\omega_{min} \ \omega_{max}] = [16,02 \ 25]$, conforme Figura 14, em um conjunto

$$\mathcal{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}; |x_1| < 0,25, \forall k > 0\}.$$

Considerando os ganhos apresentados na Tabela 2, a solução do problema de otimização da Observação 2 resulta em

$$P = \begin{bmatrix} 25,4803 & 1,8050 \\ 1,8050 & 14,4576 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = 0.0388$. O conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ obtido pela matriz P acima é apresentado na Figura 24. Com base nesta figura, pode-se garantir a estabilidade para posições com comprimento próximo a $0,2m$ e velocidades superiores a $0,3m/s$. Note também que há uma perda pequena na região de estabilidade do sistema com o controlador DDPTOS. Além disso, a Figura 25 apresenta as trajetórias do sistema controlado pelo DDPTOS iniciadas no limite da elipsoide $\mathcal{E}(P, 1)$. Note que, apesar da solução ser local, a região associada é grande o suficiente para satisfazer diversos servomecanismos com parâmetros similares aos apresentados neste exemplo.

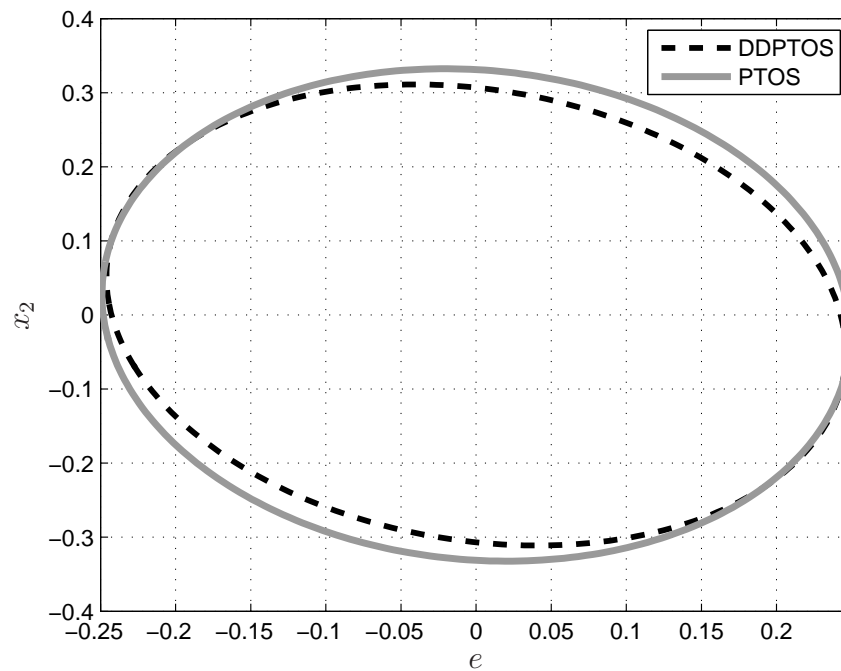
Além dos resultados obtidos através da resolução das condições LMIs, as Figuras 26 e 27 apresentam os resultados obtidos através da simulação do sistema integrador duplo com os controladores DDPTOS e PTOS. A Figura 26 ilustra a comparação da saída em posição do sistema com cada controlador enquanto a Figura 27 apresenta os respectivos sinais de controle. Note que, por consequência do aumento do parâmetro α , o sinal de ambos controladores permanece um maior tempo saturado durante a aceleração do sistema e, conseqüentemente, necessita de mais energia a fim de desacelerar o sistema sem que ocorra um sobressinal significativo. Justificando a lei de controle DDPTOS, fica nítido a melhoria causada pela adição de amortecimento no sistema durante o período em que $x_1 < y_l$, fazendo com que o sistema use mais energia para frear evitando o sobressinal, presente na resposta com o controlador PTOS.

4.6 Conclusão

Este capítulo apresentou a versão discreta do controlador DDPTOS utilizando a formulação LMI na realização da prova de estabilidade. Com a aplicação desta nova técnica, conseguiu-se estender o uso do controlador para o tempo discreto relaxando algumas condições impostas pela prova de estabilidade no tempo contínuo beneficiando sistemas do tipo servomecanismos com atrito.

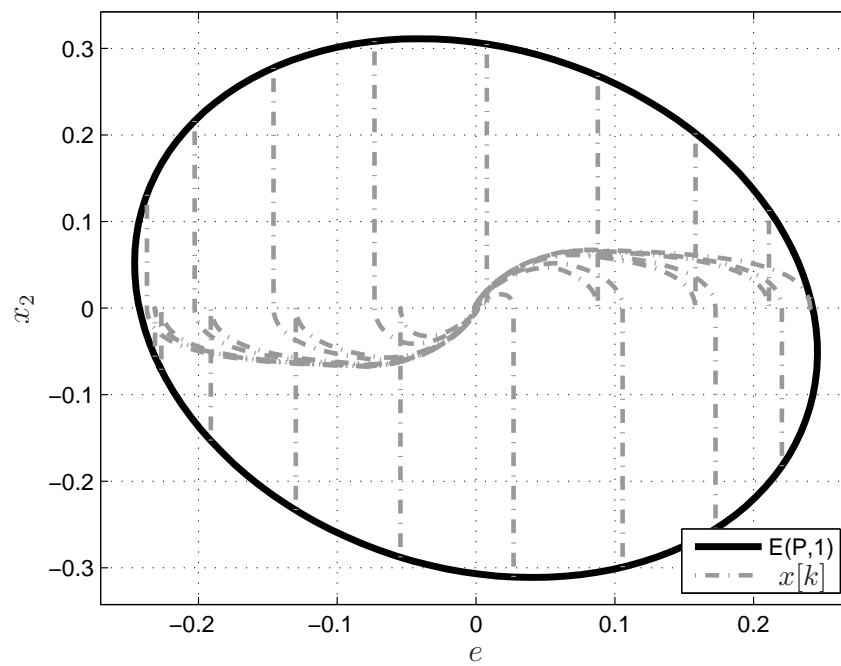
A construção do controlador CNF foi apresentada a fim de unir as ideias deste controlador com o PTOS, apresentado no Capítulo 3. A utilização da abordagem Quase-LPV tornou possível a formulação da prova de estabilidade, isso porque pode-se representar a função não-linear baseada no CNF como um parâmetro variável formando um politopo e incluí-lo nas condições LMIs. Em seguida, resultados de simulação comprovaram as melhorias proposta com o uso do DDPTOS para sistemas do tipo servomecanismos com

Figura 24: Conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ para o controlador DDPTOS com $\alpha = 4$.



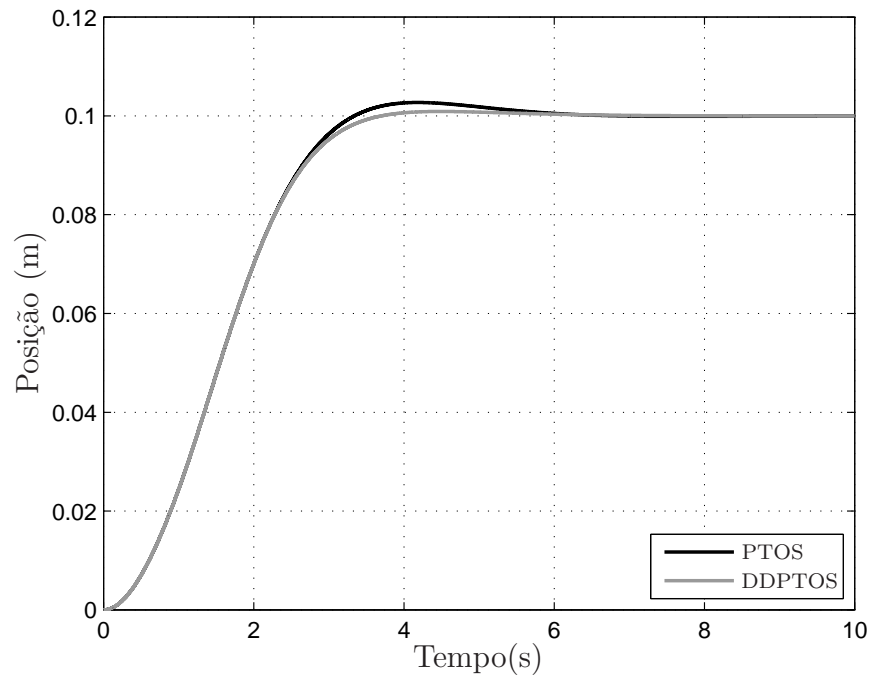
Fonte: O autor.

Figura 25: Trajetórias começando no limite de $\mathcal{E}(P, 1)$ para o controlador DDPTOS com $\alpha = 4$.



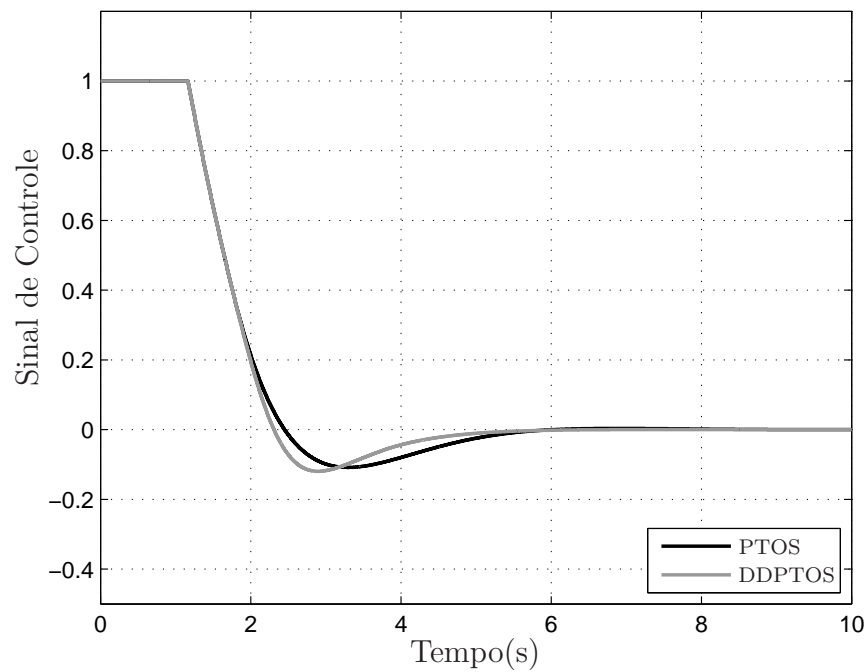
Fonte: O autor.

Figura 26: Resposta temporal do sistema integrador duplo com os controladores PTOS e DDPTOS para uma referência de 0,1m com $\alpha = 4$.



Fonte: O autor.

Figura 27: Sinal de controle dos controladores PTOS e DDPTOS para uma referência de 0,1m com $\alpha = 4$.



Fonte: O autor.

atrito, apresentando gráficos da resposta ao degrau e sinal de controle comparado com o controlador PTOS.

5 Resultados Experimentais

A fim de validar a técnica de controle proposta, será realizado experimento utilizando uma planta física que emula um servomecanismo com atrito controlada pelo controlador DDPTOS e estes resultados serão comparados com o controlador PTOS.

Ao longo do capítulo será apresentado uma descrição detalhada do experimento realizado, seguido da identificação do sistema e dos controladores aplicados na planta física.

5.1 Descrição do experimento

O sistema mecânico desenvolvido para representar o servomecanismo está ilustrado na Figura 28 sendo composto de duas partes.

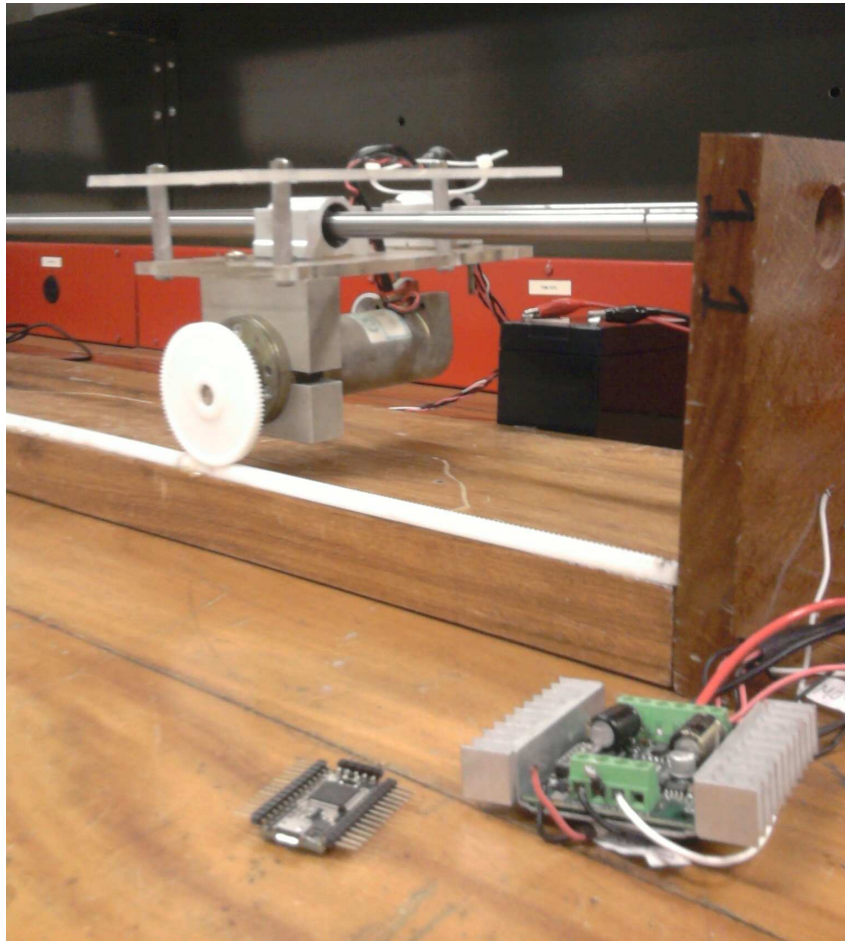
- 1^a Estrutura: projetada para dar suporte a duas guias lineares e servir de base para a cremalheira onde é realizado o deslocamento do carro;
- 2^a Carro: projetado para realizar o movimento linear sobre as guias sendo composto de um servomotor modelo PITTMAN GM9236 com uma engrenagem acoplada.

O acionamento do motor foi feito através de uma bateria selada de 12 volts(V) com 7 amperes-hora(ah) e o dispositivo de potência *Sabertooth 2 × 12*. Este dispositivo realiza o acionamento de até 2 motores com uma limitação na corrente de 12A por motor. Ainda mais, outras características favorecem a sua escolha, tais como: diferentes formas de operação, por exemplo modulação por largura de pulso (em inglês, *Pulse Width Modulation* - PWM), serial e modulação por posição de pulso (em inglês, *Pulse-position modulation* - PPM); segurança na transição entre os níveis superior e inferior de saturação; proteção térmica e de sobrecorrente, entre outras.

O sensor de velocidade, *Encoder* (PLATT, 2012), foi utilizado para medir a posição do carro ao longo do curso. Este sensor tem uma capacidade de 500 pulsos por revolução(em inglês, *count-per-revolution* - CPR) por canal e está acoplado no motor com uma taxa de redução de 5,9 : 1. Por sua vez, ao motor foi acoplada uma engrenagem com diâmetro de 63,5mm, resultando em um deslocamento de 0,0338mm por pulso de *encoder*.

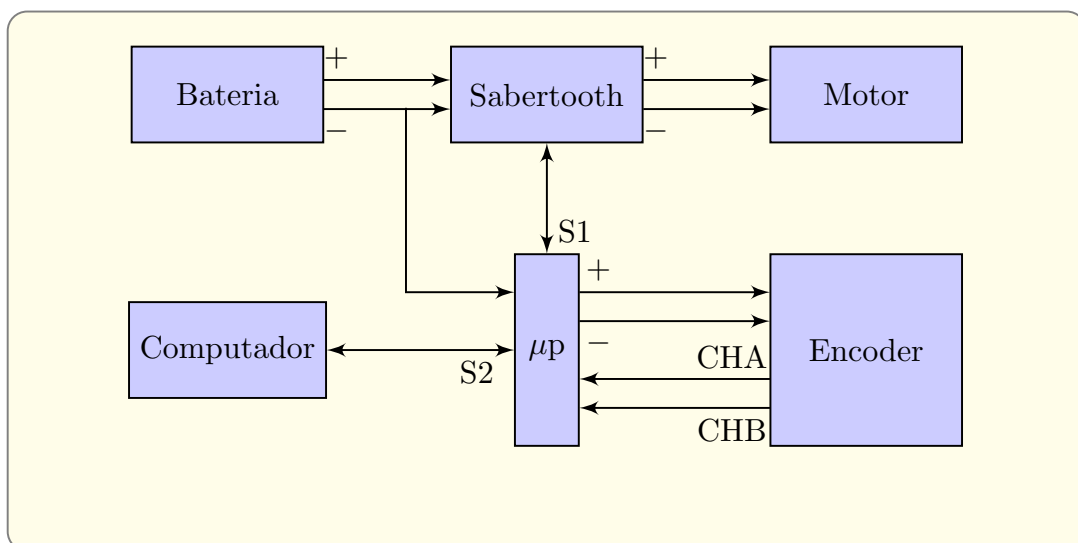
Por fim, o controle e a comunicação entre os dispositivos que constituem o sistema foi realizada utilizando o módulo de desenvolvimento comercial *Teensy 3.0*, onde o mesmo é constituído pelo microcontrolador *MK20DX128* 32 bits com arquitetura *ARM-Cortex*

Figura 28: Modelo experimental do servomecanismo.



Fonte: O autor.

Figura 29: Diagrama do sistema intergador duplo, onde + e - significam alimentação positiva e negativa, respectivamente, CHA e CHB os canais do encoder, S1 e S2 as comunicações seriais e μP microprocessador.



Fonte: O autor.

4 e 48 Mhz de frequência. Toda manipulação de dados é feita dentro do microprocessador e posteriormente esses dados são enviados a um computador via comunicação serial com período de amostragem de 5ms.

De forma resumida, a Figura 29 ilustra um diagrama do sistema incluindo os dispositivos e suas respectivas ligações e comunicações.

Os experimentos a serem realizados a fim de comparar e validar as técnicas proposta no trabalho são:

1. Identificação do sistema;
2. Simulação e validação do sistema identificado;
3. Simulação do sistema identificado para as diversas configurações dos controladores;
4. Determinação da estimativa da região de atração da origem para os ganhos utilizados;
5. Aplicação dos ganhos utilizados em simulação no sistema real.

5.2 Identificação do sistema

Métodos de identificação de sistemas são comumente usados para desenvolver modelos matemáticos de sistemas dinâmicos baseados em dados adquiridos do sistema (LJUNG, 1987). Para fins práticos, o sistema apresentado na seção anterior pode ser modelado como uma planta com um integrador e um pólo real estável.

A partir disto, a função de transferência que representa o sistema em tempo contínuo

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s(s+a)}$$

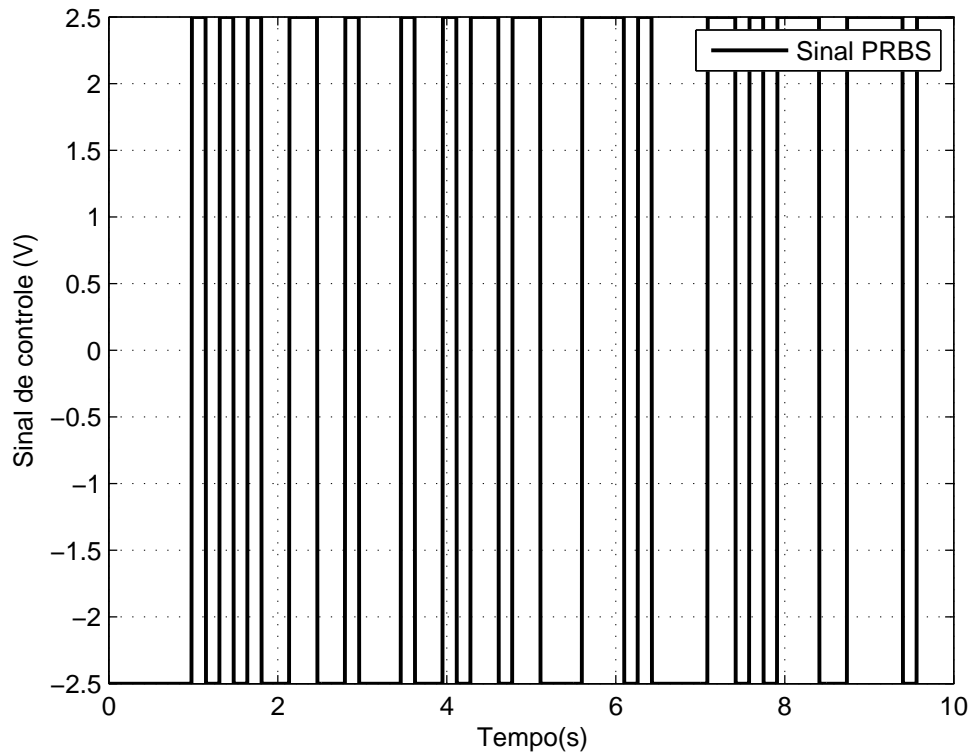
foi discretizada pelo método de Euler (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998) resultando em

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{c_1}{z^2 + c_2z + c_3},$$

onde c_i com $i = 1...3$ representa os coeficientes da função de transferência.

Com o modelo desejado, o próximo passo foi realizar a coleta de dados necessários para a utilização do algoritmo de identificação. Para isso, usou-se a sequência binária pseudo-aleatória (em inglês, pseudorandom binary sequence - PRBS) (SODERSTROM; STOICA, 1989) como sinal de entrada do sistema, Figura 30. O sinal PRBS utilizado

Figura 30: Sinal PRBS utilizado como entrada do sistema integrador duplo para identificação.



Fonte: O autor.

tem uma amplitude de $\pm 2.5V$ e uma largura de banda de $0,03Hz$. Utilizando um período de amostragem $t_s = 5ms$ foi gerado uma entrada/saída de 2000 amostras, resultando no tempo de execução de 10s.

A partir dos dados de entrada e de saída do sistema, foi realizada a identificação através do *System Identification toolbox* do software MATLAB (LJUNG, 1991), resultando na seguinte função de transferência:

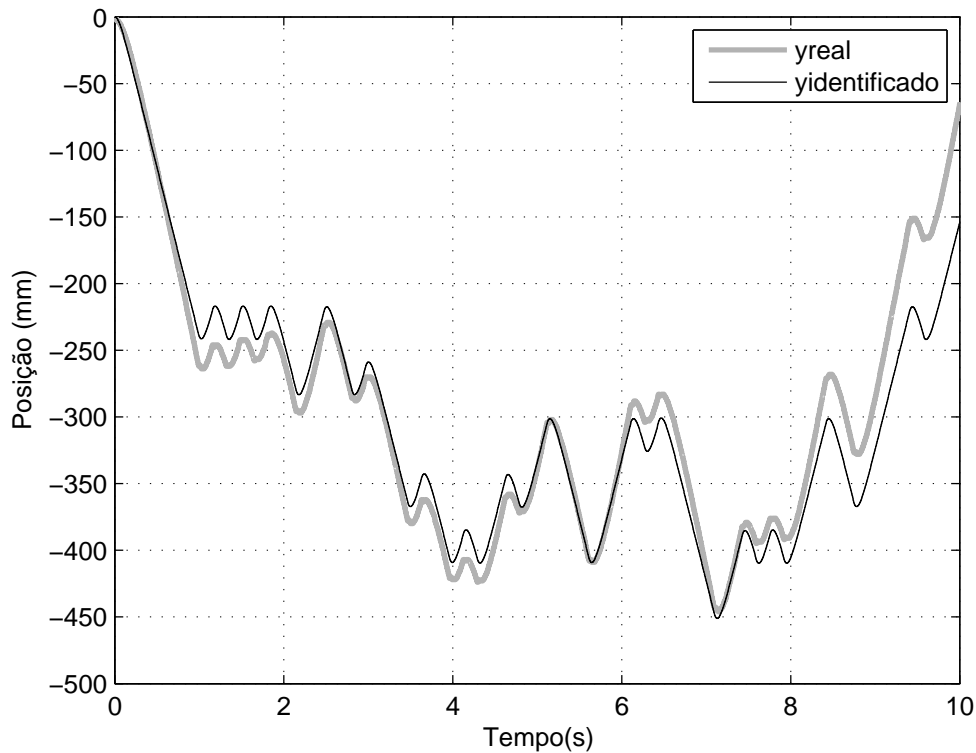
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,04746}{z^2 - 1,907z + 0,9066}. \quad (64)$$

Com base nos coeficientes obtidos através da identificação do sistema pode-se calcular os valores dos coeficientes da função de transferência contínua, sendo eles

$$b = \frac{c_1}{t_s^2} = 1898,4 \text{ e}$$

$$a = \frac{2 + c_2}{t_s} = 18,67,$$

Figura 31: Comparação da saída em posição obtida através da simulação da função de transferência identificada com a saída real para uma entrada pseudo-randômica.



Fonte: O autor.

onde o valor do coeficiente b será usado na lei de controle PTOS e DDPTOS como o parâmetro dependente da massa contido em suas respectivas leis de controle.

Para finalizar, foi realizado um novo experimento nas mesmas condições apresentadas anteriormente adquirindo um novo conjunto de dados. Este novo conjunto foi comparado ao sistema simulado com a função de transferência (64) resultando na Figura 31, onde há uma correlação aproximada de 73,93% entre os sinais. Vale ressaltar que, apesar do número de adequação não ser muito alto, o modelo tem uma dinâmica muito parecida com o sistema real. Suspeita-se que aumentando a ordem do modelo para permitir a identificação da dinâmica proveniente da eletrônica o resultado da identificação será melhor.

Com base nos resultados apresentados, valida-se a função de transferência (64) como modelo do sistema real sendo a mesma utilizada para obter os resultados posteriores.

Tabela 3: Parâmetros utilizados na simulação e no experimento para os controladores DDPTOS e PTOS.

Controlador	k_1	α	k_2	k_e	y_l	β
PTOS	0,5	1	0,023	0,042	24	-
PTOS	0,5	1,65	0,0178	0,042	24	-
DDPTOS	0,5	1,65	0,0178	0,042	24	0,0005

5.3 Controle de Tempo Ótimo Aplicado em Servomecanismos

Os controladores de tempo ótimo PTOS e DDPTOS serão aplicados no sistema integrador duplo real e simulado através de função de transferência (64). Desta forma, a seção apresentará primeiramente os resultados obtidos através da solução das condições de estabilidade seguido da resposta ao degrau com cada controlador, finalizando com uma comparação entre todos os controladores.

Para a realização dos experimentos foi utilizado uma referência no valor de 50mm, um limite máximo de saturação de 12V e o valor de 1898,4 para o parâmetro b , além dos parâmetros do controlador apresentados na Tabela 3. O solver *SDPT3* juntamente com o *software* Matlab foram utilizados para solucionar o problema de otimização associado a formulação LMI. Além disto, foi considerado três casos distintos, sendo eles:

1. Controlador PTOS com $\alpha = 1$;
2. Controlador PTOS com $\alpha > 1$;
3. Controlador DDPTOS com $\alpha > 1$.

A seguir será explorado as configurações 2 e 3 individualmente seguido da comparação entre os três casos.

5.3.1 Resultados Experimentais com Controlador PTOS

Sendo o sistema apresentado anteriormente e representado pela Figura 28, controlado pelo controlador (26) com $\alpha = 1,65$, tem-se que a não-linearidade ψ_f satisfaz localmente (27) com $[\omega_{min}, \omega_{max}] = [0,5 \ 0,43]$, conforme Figura 32, em um conjunto

$$\mathcal{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}; |x_1| < 60, \forall k > 0\}.$$

Considerando os ganhos apresentados na Tabela 3, a solução do problema de otimização da Observação 1 resulta em

$$P = 1 \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 0.2798 & 0.008 \\ 0.008 & 0.0003 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = 3573,7$. O conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P,1)$ obtido pela matriz P acima é apresentado na Figura 33. Com base nesta Figura, pode-se garantir a estabilidade para posições com comprimento superior a 60 mm e velocidades próximas a 2000 mm/s. Nota-se também a presença da trajetória realizada pelo sistema considerando uma referência de 50 mm, onde a mesma permanece dentro da elipsoide.

Além disso, as Figuras 34 e 35 apresentam os resultados obtidos através da simulação e realização do experimento para o sistema integrador duplo com o controlador PTOS sobre as condições apresentadas nesta seção. A Figura 34 ilustra a saída em posição enquanto a Figura 35 o sinal de controle. Levando em consideração os resultados experimentais, a saída do sistema alcançou a referência em 0,11s com um erro em regime de 0,54% e um sobressinal de 3,94%. Este erro em regime é decorrente da presença de uma zona-morta associada ao experimento, onde o sistema não consegue responder a pequenas entradas de controle, tal efeito comumente presente em atuadores tipo servomotor (TAO; KOKOTOVIC, 1994) e o sobressinal é decorrente do aumento do valor de α para o controlador PTOS, onde a lei do controle PD não consegue frear o sistema suficientemente para evitar este sobressinal. Além disto, nota-se uma leve diferença entre os resultados na simulação em comparação com o sistema real. Isto ocorre, provavelmente, devido a existência de pólos uma dinâmica rápida, ou seja, localizados próximo a origem do círculo unitário, os quais não foram considerados na identificação do sistema devido a restrição de largura de banda do sinal PTOS.

Nota-se também que há oscilações na trajetória realizada pelo sistema real, Figura 33, e no sinal de controle, Figura 35. Este problema ocorre devido a estimação da velocidade ser realizada pelo *encoder* através do método de diferenças finitas (BELANGER, 1992), que consiste em contar o número de pulsos durante um intervalo fixo de tempo, multiplicando pela fator de conversão de unidade correspondente e dividindo pelo duração do intervalo. Com o intuito de diminuir as oscilações presentes na estimação da velocidade sem prejudicar o desempenho do sistema, foi utilizado uma técnica de filtragem do sinal da velocidade através do algoritmo de Kalman (ZARCHAN; MUSOFF, 2005).

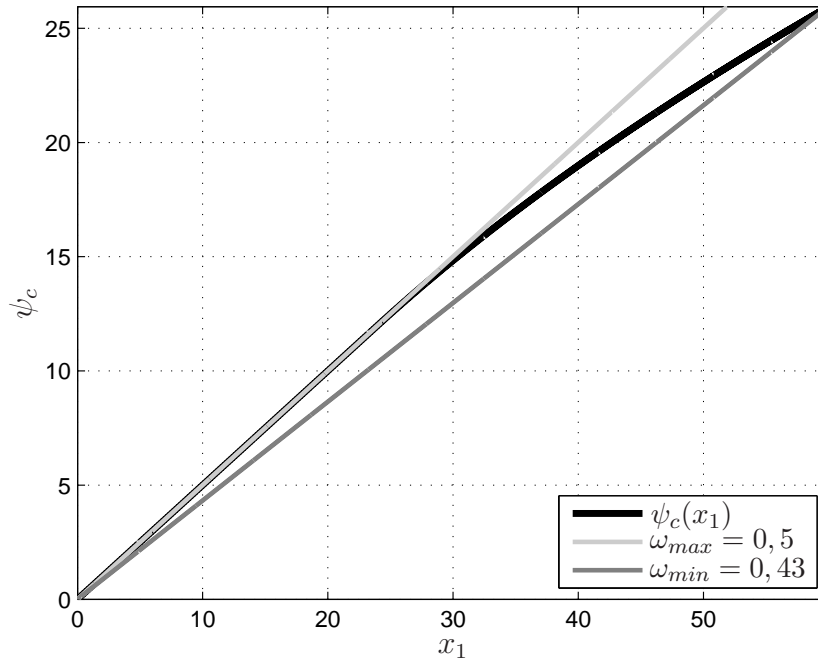
5.3.2 Resultados Experimentais com Controlador DDPTOS

Aplicando o controlador (54) no sistema representado pela Figura 28, com $\alpha = 1,65$, tem-se que a não-linearidade ψ_c satisfaz localmente (27) com $[\omega_{min}, \omega_{max}] = [0,5 \ 0,446]$, conforme Figura 32, em um conjunto

$$\mathcal{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}; |x_1| < 60, \forall k > 0\}.$$

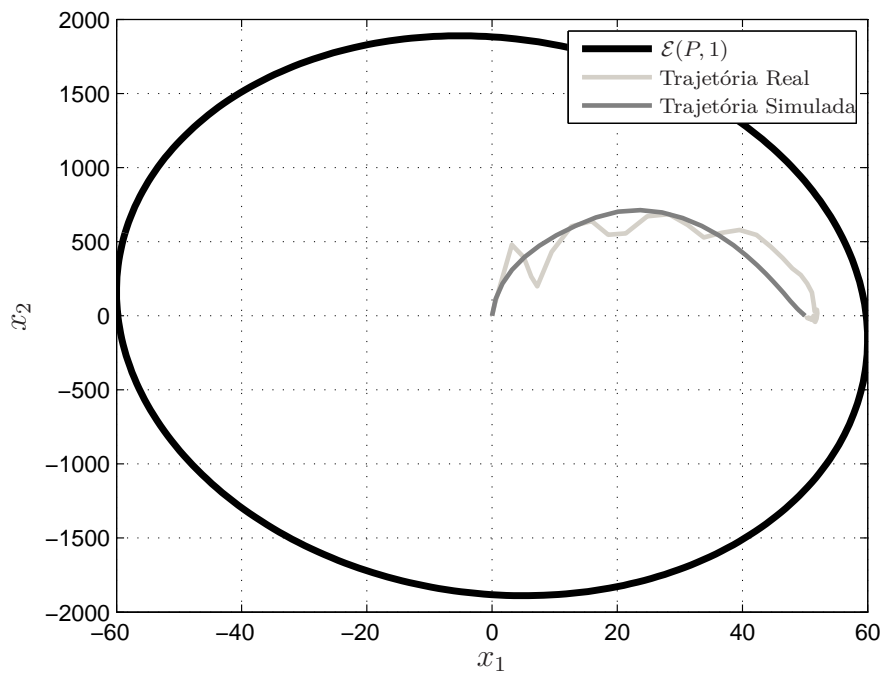
Considerando os ganhos apresentados na Tabela 3, a solução do problema de otimização da Observação 2 resulta em

Figura 32: Setor da função não-linear ψ_c com $\alpha = 1,65$.



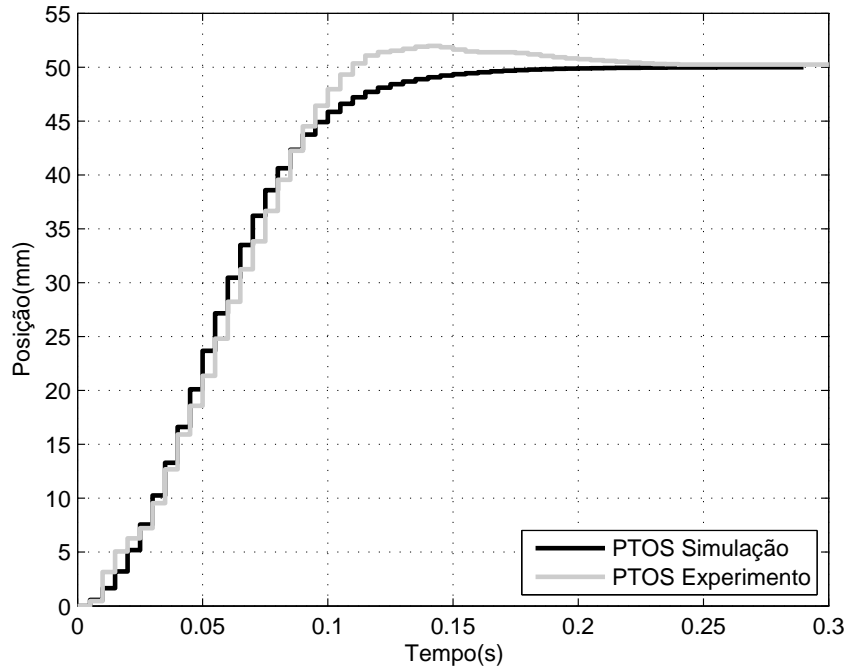
Fonte: O autor.

Figura 33: Conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P,1)$ para o controlador PTOS com $\alpha = 1,65$.



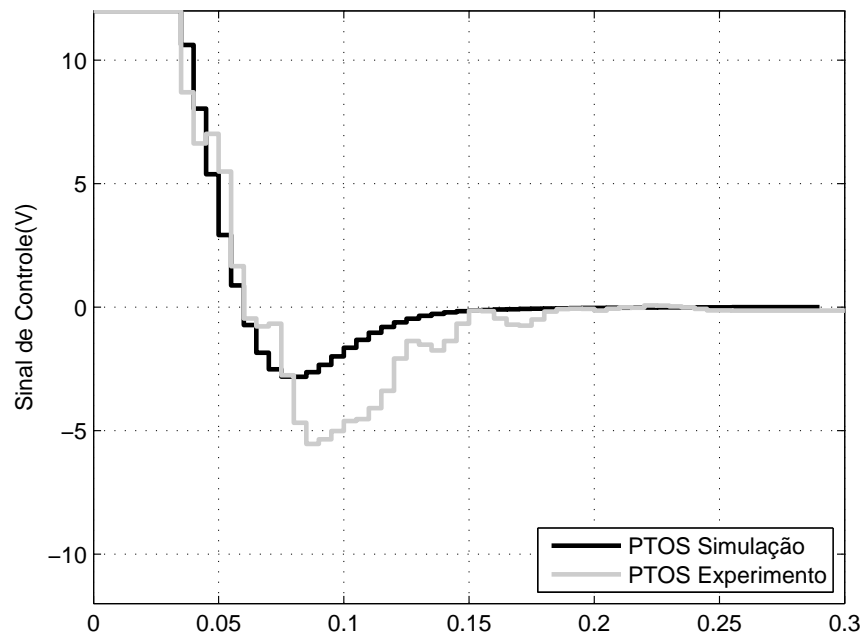
Fonte: O autor.

Figura 34: Saída do sistema real comparado com a saída do sistema simulado controlado pela lei PTOS com $\alpha = 1,65$.

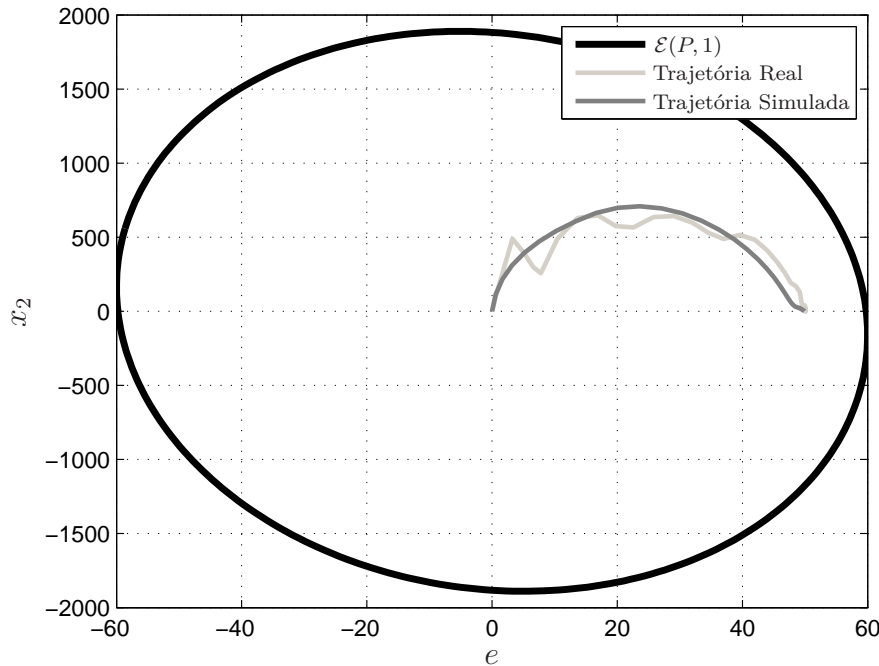


Fonte: O autor.

Figura 35: Sinal de entrada do sistema real comparado com o sinal de entrada do sistema simulado controlado pela lei PTOS com $\alpha = 1,65$.



Fonte: O autor.

Figura 36: Conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ para o controlador DDPTOS com $\alpha = 1,65$.

Fonte: O autor.

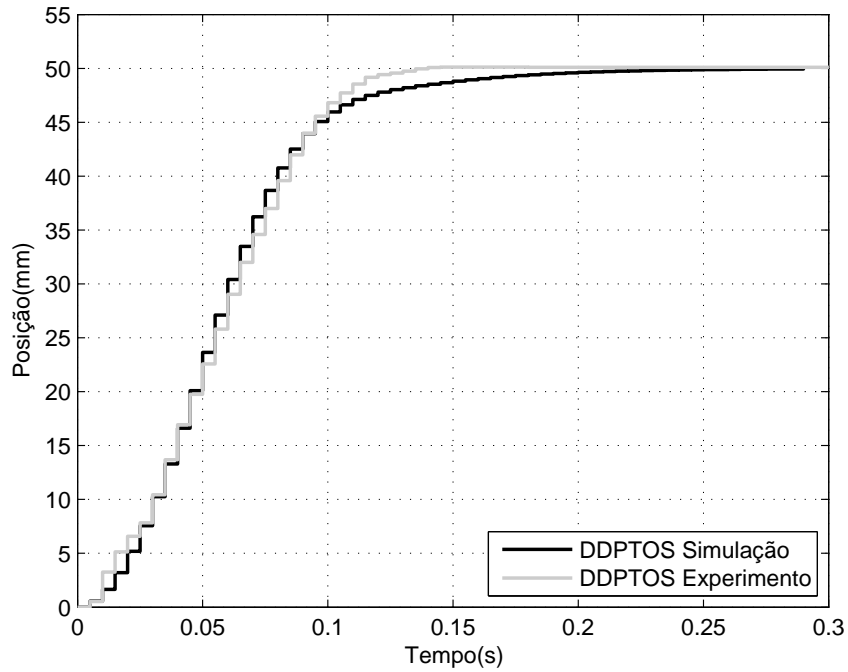
$$P = 1 \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 0.2801 & 0.0008 \\ 0.0008 & 0.0003 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = 3570,1 \cdot 10^{-4}$. O conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ obtido pela matriz P acima é apresentado na Figura 36. Com base nesta Figura, pode-se garantir a estabilidade para posições com comprimento superior a 60 mm e velocidades próximas a 2000 mm/s. Nota-se também a presença da trajetória realizada pelo sistema considerando uma referência de 50 mm, onde a mesma permanece dentro da elipsoide.

Além disso, as Figuras 37 e 38 apresentam os resultados obtidos através da simulação e realização do experimento para o sistema em questão com o controlador DDPTOS sobre as condições apresentadas nesta seção. A Figura 37 ilustra a saída em posição enquanto a Figura 38 o sinal de controle. Nota-se que o sistema atinge a referência no tempo 0,125s com sobressinal de 0,16% e um erro em regime de 0,4%.

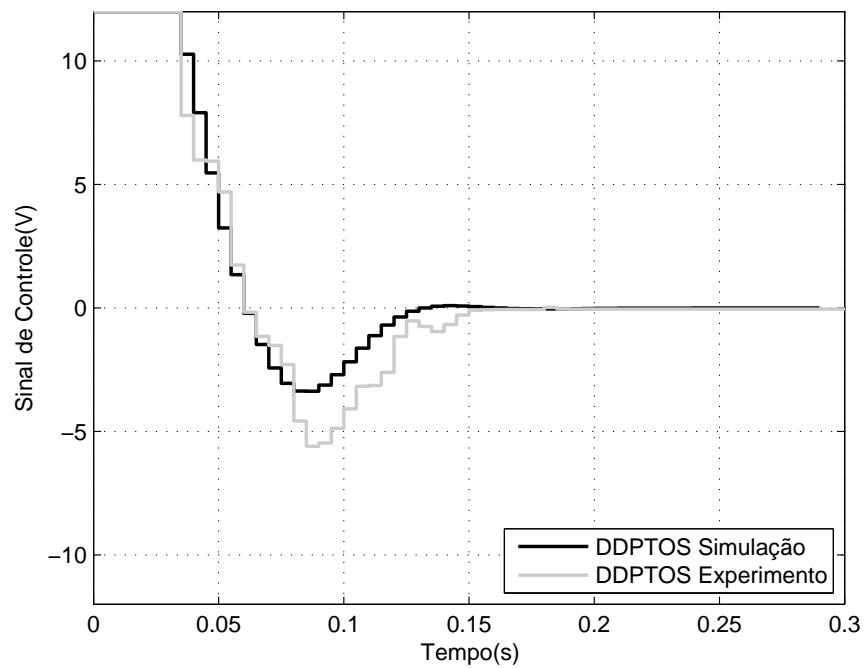
É importante ressaltar que o uso do coeficiente $\alpha > 1$ pelo controlador DDPTOS é vantajoso devido ao atrito presente no sistema, de forma que o sistema permaneça um maior tempo acelerando e, conseqüentemente, utilize mais força para realizar a desaceleração do sistema alcançando mais rápido a referência. Além disto, a análise da trajetória realizada na Seção 5.3.1 é válida para as curvas apresentadas nesta seção.

Figura 37: Saída do sistema real comparado com a saída do sistema simulado controlado pela lei DDPTOS com $\alpha = 1,65$.



Fonte: O autor.

Figura 38: Sinal de entrada do sistema real controlado pela lei DDPTOS com $\alpha = 1,65$.



Fonte: O autor.

5.3.3 Comparação entre os Controladores

Esta seção apresentará uma comparação entre os controladores PTOS e DDPTOS considerando uma variação do parâmetro α na aplicação do controlador PTOS, conforme Tabela 3. Esta comparação será feita de forma evolutiva conforme melhoria de desempenho do sistema. Sendo assim, será apresentado uma comparação entre:

1. Controladores PTOS com $\alpha = 1$ e com $\alpha > 1$;
2. Controlador PTOS e DDPTOS com $\alpha > 1$.

O controlador PTOS desenvolvido por Workman (1987) tinha uma série de restrições quando a escolha de seus ganhos e do parâmetro α , onde o mesmo deveria ser menor que 1. Com a prova apresentada neste trabalho, não há limitações quanto o valor do α desde que satisfaça o Teorema 3.3.1.

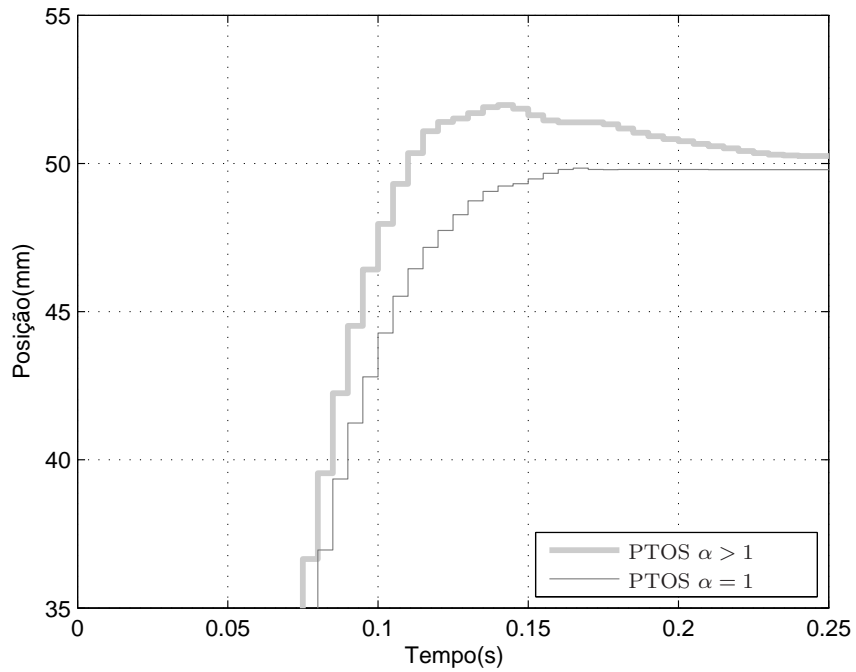
Sendo assim, primeiramente será comparado o controlador PTOS com $\alpha = 1$ e $\alpha > 1$. As Figuras 39 e 40 apresentam a saída do sistema e seu respectivo sinal de controle obtido com o controlador PTOS com $\alpha = 1,65$ e $\alpha = 1$. A Figura 39 mostra uma melhoria significativa no tempo em que o sistema leva para alcançar a referência com $\alpha = 1,65$, porém há um grande sobressinal devido ao controle não conseguir adicionar amortecimento suficiente para frear. Esse efeito torna-se claro na Figura 40, onde a força utilizada para frear o sistema com $\alpha > 1$ é maior do que a utilizada com $\alpha = 1$, contudo não o suficiente para compensar o efeito realizado pelo aumento significativo do coeficiente α .

Por último, foi realizada a comparação entre o controlador PTOS e o DDPTOS, ambos com $\alpha = 1,65$, apresentados, respectivamente, nos Capítulos 3 e 4. As Figuras 41 e 42 representam a saída do sistema e o sinal de controle. Fica evidente a melhoria do controlador DDPTOS em relação ao PTOS, onde obteve-se uma saída com sobressinal de 0,16%, muito menor do que os 4,42% resultante do controlador PTOS. Além disso, o tempo em que o sistema com o controlador DDPTOS atinge a referência é apenas 0,015 maior, e com sobressinal aceitável¹.

A melhoria da resposta do sistema com a utilização da lei de controle DDPTOS dá-se devido a troca de função ocorrer para uma função não-linear que adiciona amortecimento ao sistema conforme o mesmo se aproxima da referência. Como esta função é mais agressiva do que o PD usado no controlador PTOS, o sistema consegue frear mais evitando o sobressinal.

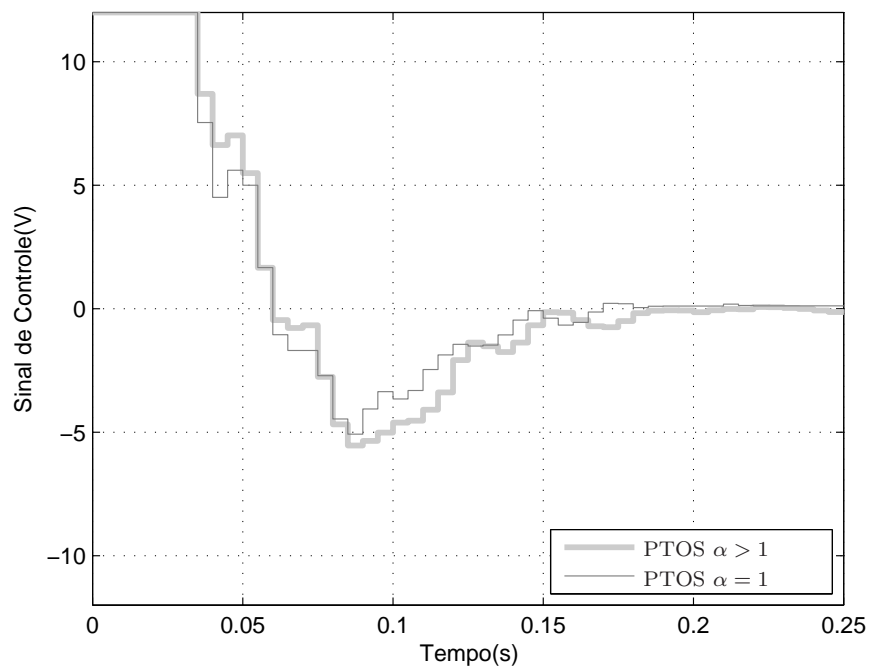
¹ Considera-se o valor de até 1% de sobressinal como aceitável.

Figura 39: Saída do sistema real controlado pela lei PTOS com $\alpha > 1$ e $\alpha = 1$.



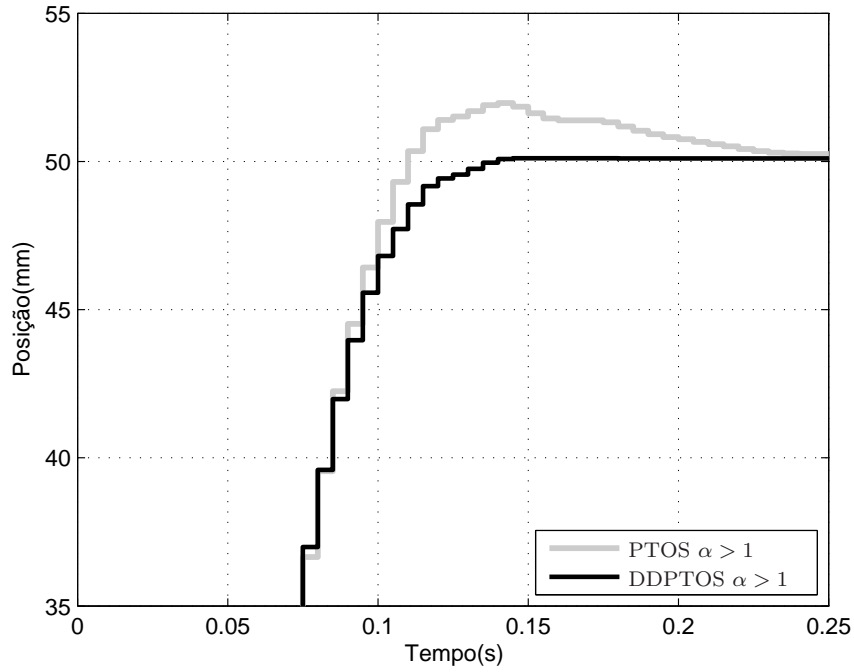
Fonte: O autor.

Figura 40: Sinal de entrada do sistema real controlado pela lei PTOS com $\alpha > 1$ e $\alpha = 1$.



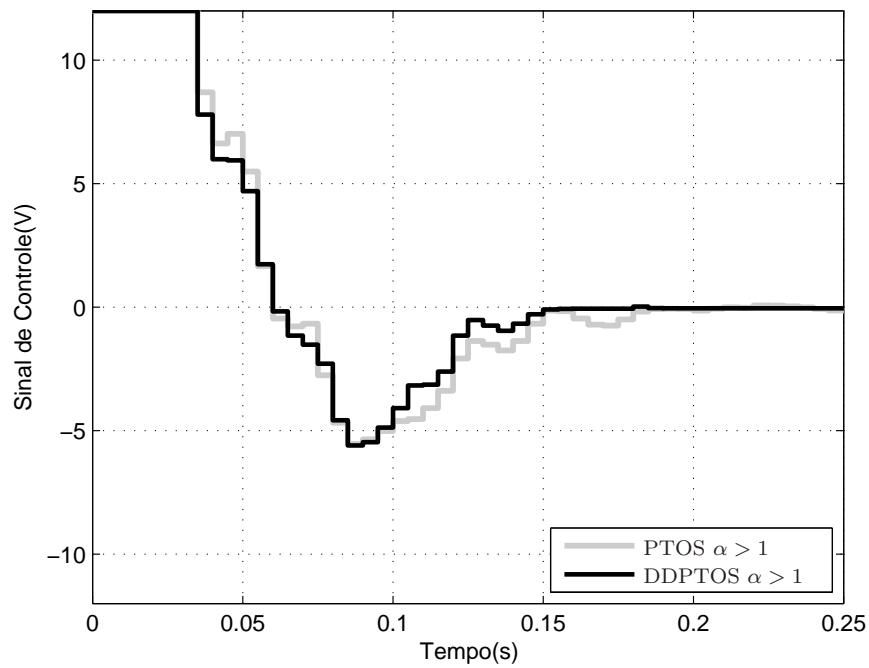
Fonte: O autor.

Figura 41: Saída do sistema real controlado pela lei DDPTOS comparado com a saída controlada pela lei PTOS, ambos com $\alpha = 1,65$.



Fonte: O autor.

Figura 42: Sinal de entrada real controlado pela lei DDPTOS comparado com a saída controlada pela lei PTOS, ambos com $\alpha = 1,65$.



Fonte: O autor.

5.4 Conclusão

O capítulo apresentou os resultados obtidos através da simulação e da realização de experimento em uma planta tipo integrador duplo com dois controladores que se aproximam do tempo ótimo do sistema. O descritivo do sistema foi apresentado de forma detalhada seguido da identificação do sistema real para uma planta integrador duplo utilizando a ferramenta de identificação de sistemas do *software* MATLAB.

Através da função de transferência encontrada pode-se simular o sistema e ajustar os ganhos do controlador antes de executar o experimento. Com a comparação entre as curvas de saída da simulação com o experimento pode-se validar a função de transferência encontrada.

Após foi realizada uma comparação de forma evolutiva entre os controladores PTOS e DDPTOS. Com isso, mostrou-se a importância da função não-linear do controlador DDPTOS na faixa onde $y_l < x_1$ e a importância do conhecimento dos parâmetros do sistema. Uma vez que a prova de estabilidade utilizando desigualdades matriciais não impõe restrições quanto ao valor do coeficiente α , podendo aumentar o valor deste coeficiente para valores maiores que 1 devido ao atrito do sistema ajudar na frenagem.

6 Conclusão

Esta dissertação centra-se no aprimoramento e melhoria do desempenho de servomecanismos. A partir deste objetivo foram explorados dois métodos de controle que buscam alcançar o tempo ótimo do sistema, onde cada um destes controladores é tratado de forma particular. Com novos resultados de estabilidades obtidos através do uso de desigualdades lineares matriciais, foi possível relaxar restrições no projeto dos controladores de forma a estender estas técnicas para sistemas amortecidos. Cada etapa da pesquisa apresenta satisfatórias melhorias no desempenho do sistema, validadas por resultados experimentais.

Uma vez apresentado o conceito de servomecanismos fica evidente a constante busca por métodos de controle capazes de obter o melhor desempenho do sistema. Muitos são os trabalhos acadêmicos realizados neste contexto aumentando os limites de desempenho de servomecanismos, tornando uma classe de sistemas viável e popular. Uma breve história da evolução dos controladores mais influentes para este sistema e uma apresentação sobre o método LMI para lidar com sistemas não-lineares sujeitos a saturação no atuador foram expostas na introdução.

Com o objetivo de familiarizar o leitor com conteúdo dos capítulos seguintes, o Capítulo 2 apresentou o sistema a ser estudado no ponto de vista teórico seguido da teoria de controle de tempo ótimo para este sistema. Uma discussão sobre os problemas encontrados nesta técnica justifica a procura de novos métodos com o objetivo de alcançar o tempo “quase” ótimo do sistema, uma vez que o tempo ótimo é obtido de forma teórica. Seguindo, foram expostos métodos e técnicas utilizados para estudar e desenvolver a estabilidade do sistema integrador duplo controlado pelas leis PTOS e DDPTOS, entre eles destacam-se: estabilidade por Lyapunov; condição de setor; região de linearidade; transformação de laço.

Tendo o conhecimento apresentado nas preliminares do trabalho, é estudado de forma detalhada o controlador *Proximate Time Optimal Servomechanism*. A forma de construção do PTOS é apresentada em três etapas onde a lei base do controlador é proveniente do controle de tempo ótimo. O fator de desconto da aceleração (α) faz com que o sistema controlado pelo PTOS seja conservador, agravando este problema quando trata-se de sistemas com alto coeficiente de atrito. Sendo assim, foi apresentado um estudo sobre o desempenho deste controlador com a influência do coeficiente α , resultando na necessidade de poder assumir valores acima de um (condição imposta pela prova de estabilidade). Com a utilização da formulação LMI foi possível diminuir o conservadorismo deste coeficiente, relaxando as restrições, e tornando a lei de controle PTOS uma das melhores alternativas

quando trata-se de sistemas amortecidos, conforme demonstrado através de simulação.

A lei de controle conhecida como *Composite Nonlinear Feedback* adiciona amortecimento ao sistema durante o período transiente. Apesar dos ótimos resultados obtidos, este controlador apresenta uma dependência do sinal de referência, tornando inviável a sua utilização na maioria dos servomecanismos. Contudo, com a junção de ideias entre os controladores CNF e PTOS surgiu o *Dynamically Damped Proximate Time Servomechanism*, apresentado no Capítulo 4, onde consegue-se melhorar o desempenho adicionando amortecimento ao sistema com a troca da função PD no PTOS para uma função não-linear baseada na ideia do CNF. Como a sua representação era apenas em tempo contínuo, foi apresentado o controlador em tempo discreto com uma nova prova de estabilidade utilizando a formulação LMI permitindo relaxar as condições impostas nos coeficientes α e β . Resultados de simulação foram apresentados validando o sistema integrador duplo controlado pelo DDPTOS. Ainda mais, foi realizada uma comparação entre a técnica proposta e o controlador PTOS, comprovando a melhora no desempenho do sistema com a adição de amortecimento conforme o mesmo se aproxima da referência.

Finalizando, resultados experimentais validaram as técnicas de controle propostas no trabalho. Foi feita uma descrição do experimento prático familiarizando o leitor com sistema utilizado. Para obter a região de estabilidade e ajustar os ganhos dos controladores sem prejudicar o sistema real, foi realizada uma identificação do sistema resultando nos parâmetros da função de transferência do integrador duplo com atrito. Ao obter bons resultados em simulação, os valores encontrados foram aplicados na planta real e apresentados no Capítulo 5.

Com base nos resultados apresentados nos capítulos anteriores, pode-se citar algumas perspectivas de continuação deste trabalho, sendo elas:

- *Aprimorar a região de estabilidade:* mesmo obtendo excelentes resultados ao longo do trabalho, esses resultados ainda são locais e tornam a região de estabilidade mais conservadora conforme aumenta-se o politopo formado pela função não-linear ψ_a e/ou o tamanho do setor. Vale a pena ressaltar que os resultados obtidos atendem diversos servomecanismos de forma satisfatória, contudo pode haver a necessidade de maiores regiões de estabilidade.
- *Expansão das técnicas apresentadas para outras classes de sistemas:* os algoritmos de controle apresentados aqui são específicos para sistemas do tipo integrador duplo, contudo pode-se investigar esta estratégia com o intuito de aplicar em outras classes de sistemas.

Referências

- ARTHUR, E.; BRYSON, J.; HO, Y. *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control*. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 1975. (Halsted Press book'). Citado na página 15.
- BELANGER, P. Estimation of angular velocity and acceleration from shaft encoder measurements. In: *Robotics and Automation, 1992. Proceedings., 1992 IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 1992. p. 585–592 vol.1. Citado na página 75.
- BOYD, S. et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. (Studies in Applied Mathematics, v. 15). ISBN 0-89871-334-X. Citado 5 vezes nas páginas 16, 33, 34, 45 e 63.
- CASTELAN, E. B.; MORENO, J. C. U. F.; PIERI, E. R. D. Stability and stabilization of a class of uncertain nonlinear discrete-time systems with saturating actuators. *3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control (SSSC)*, 2007. v. 3, p. 518–523, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 16, 35 e 42.
- CASTELAN, E. B.; TARBOURIECH, S.; QUEINNEC, I. Control design for a class of nonlinear continuous-time systems. *Automatica*, 2008. v. 44, n. 8, p. 2034 – 2039, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 16, 35 e 42.
- CHEN, B. et al. Composite nonlinear feedback control for linear systems with input saturation: theory and an application. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2003. v. 48, n. 3, p. 427–439, 2003. ISSN 0018-9286. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 54.
- CHESE, G. *Domain of Attraction: Analysis and Control Via SOS Programming*. [S.l.]: Springer, 2011. (Lecture Notes in Control and Information Sciences). ISBN 9780857299581. Citado na página 25.
- CHOI, H. et al. Design of robust high-speed motion controller for a plant with actuator saturation. *J. Dyn. Sys., Meas.,* 1998. v. 122, p. 535–541, August 1998. Citado na página 19.
- CHOI, Y.-M.; JEONG, J.; GWEON, D.-G. A novel damping scheduling scheme for proximate time optimal servomechanisms in hard disk drives. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 2006. v. 42, n. 3, p. 468–472, 2006. ISSN 0018-9464. Citado na página 57.
- DULLERUD, G.; PAGANINI, F. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. [S.l.]: Springer, 2000. (Texts in Applied Mathematics). ISBN 9780387989457. Citado na página 33.
- FLORES, J. et al. Acceleration enhancement factor for damped systems subject to the discrete proximate time-optimal servomechanism. In: *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 5137–5142. ISSN 0743-1546. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 43.

- FLORES, J. et al. Discrete framework for near time-optimal performance of damped servomechanisms. *Em submissão*, 2014. 2014. Citado na página 17.
- FRANKLIN, G.; POWELL, J.; WORKMAN, M. *Digital control of dynamic systems*. [S.l.]: Addison Wesley Longman, 1998. (Addison-Wesley world student series). ISBN 9780201820546. Citado 3 vezes nas páginas 41, 59 e 71.
- GAHINET, P. et al. The lmi control toolbox. In: *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*. [S.l.: s.n.], 1994. v. 3, p. 2038–2041 vol.3. Citado na página 33.
- GEROMEL, J.; OLIVEIRA, M. C. de; HSU, L. Lmi characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and its Applications*, 1998. v. 285, p. 69 – 80, 1998. ISSN 0024-3795. Citado na página 32.
- GOMES DA SILVA JR., J. et al. Dynamic output feedback stabilization for systems with sector-bounded nonlinearities and saturating actuators. *Journal of the Franklin Institute*, 2013. n. 0, p. –, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 16, 35, 42 e 62.
- GOMES DA SILVA JR., J.; TARBOURIECH, S. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an lmi-based approach. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2005. v. 50, n. 1, p. 106–111, 2005. ISSN 0018-9286. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 34.
- GOODWIN, G.; SERON, M.; DONÁ, J. D. *Constrained control and estimation: an optimisation approach*. [S.l.]: Springer, 2004. Citado na página 16.
- HREDZAK, B.; HERRMANN, G.; GUO, G. A proximate-time-optimal-control design and its application to a hard disk drive dual-stage actuator system. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 2006. v. 42, n. 6, p. 1708–1715, June 2006. ISSN 0018-9464. Citado na página 15.
- HUANG, Y. *Nonlinear optimal control: an enhanced quasi-LPV approach*. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, 1999. Citado na página 52.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3rd. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2002. Hardcover. Citado 10 vezes nas páginas 15, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 35 e 52.
- KOKOTOVIĆ, P.; ARCAK, M. Constructive nonlinear control: a historical perspective. *Automatica*, 2001. v. 37, n. 5, p. 637–662, 2001. ISSN 00051098. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 52.
- LEWIS, F.; SYRMOS, V. *Optimal Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1995. (A Wiley-Interscience publication). Citado na página 16.
- LEWIS, J. B. The use of nonlinear feedback to improve the transient response of a servomechanism. *American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry, Transactions of the*, 1953. v. 71, n. 6, p. 449–453, Jan 1953. ISSN 0097-2185. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 53.
- LIN, Z.; PACHTER, M.; BANDA, S. Toward improvement of tracking performance nonlinear feedback for linear systems. *International Journal of Control*, 1998. v. 70, n. 1, p. 1–11, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 58.

- LISBOA, L. et al. Proximate time optimal control of an xy positioning table. In: *Embedded Systems (SASE/CASE), 2013 Fourth Argentine Symposium and Conference on*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1–5. Citado na página 15.
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. [S.l.]: Pearson Education Canada, 1987. (Prentice-Hall Information and System Sciences Series). ISBN 9780138816407. Citado na página 71.
- LJUNG, L. *System Identification Toolbox for Use with MATLAB: User's Guide*. [S.l.]: MathWorks, Incorporated, 1991. Citado na página 72.
- LÖFBERG, J. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *CCA/ISIC/CACSD*. [S.l.: s.n.], 2004. Citado 3 vezes nas páginas 33, 47 e 64.
- PASCOAL, A. M. et al. Adaptive time-optimal control of flexible structures. In: *American Control Conference, 1989*. [S.l.: s.n.], 1989. p. 19–24. Citado na página 40.
- PLATT, C. *Encyclopedia of Electronic Components Volume 1: Resistors, Capacitors, Inductors, Switches, Encoders, Relays, Transistors*. [S.l.]: O'Reilly Media, 2012. ISBN 9781449333874. Citado na página 69.
- REBERGA, L. et al. Lpv modeling of a turbofan engine. *Proceedings of the 16th IFAC world congress, 2005*. v. 15, p. 487–487, 2005. Citado na página 31.
- ROMANCHUK, B. Computing regions of attraction with polytopes: Planar case. *Automatica*, 1996. v. 32, n. 12, p. 1727 – 1732, 1996. ISSN 0005-1098. Citado na página 25.
- ROTONDO, D.; NEJJARI, F.; PUIG, V. Fault tolerant control design for polytopic uncertain lpv systems. In: *Control Automation (MED), 2013 21st Mediterranean Conference on*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 66–72. Citado na página 31.
- RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. Research on gain scheduling. *Automatica*, 2000. v. 36, n. 10, p. 1401 – 1425, 2000. ISSN 0005-1098. Citado na página 31.
- SABERI, A.; LIN, Z.; TEEL, A. Control of linear systems with saturating actuators. In: *American Control Conference, Proceedings of the 1995*. [S.l.: s.n.], 1995. v. 1, p. 285–289 vol.1. Citado na página 25.
- SALTON, A. *High Performance Dual-Stage Systems*. [S.l.]: VDM Publishing, 2011. ISBN 9783639377057. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 52.
- SALTON, A.; CHEN, Z.; FU, M. Improved control design methods for proximate time-optimal servomechanisms. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 2012. v. 17, n. 6, p. 1049–1058, 2012. ISSN 1083-4435. Citado 3 vezes nas páginas 16, 35 e 40.
- SALTON, A. et al. Preview control of dual-stage actuator systems for superfast transition time. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2011. v. 16, n. 4, p. 758 –763, aug. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 58.
- SALTON, A. T.; NETO, N. B.; FLORES, J. Recent advances on the design and control of macro/micro actuators. *Recent Patents on Mechanical Engineering*, 2013. v. 6, p. 1–10, 2013. Citado na página 17.

- SLOTINE, J.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. [S.l.]: Prentice Hall, 1991. ISBN 9780130408907. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- SODERSTROM, T.; STOICA, P. *System Identification*. [S.l.]: Prentice Hall, 1989. (Prentice Hall International Series In Systems And Control Engineering). ISBN 9780138812362. Citado na página 71.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 1999. v. 11–12, p. 625–653, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 16, 33, 47 e 64.
- SU, Y.; SUN, D.; DUAN, B. Design of an enhanced nonlinear pid controller. *Mechatronics*, 2005. v. 15, n. 8, p. 1005 – 1024, 2005. Citado na página 16.
- TAO, G.; KOKOTOVIC, P. Adaptive control of plants with unknown dead-zones. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 1994. v. 39, n. 1, p. 59–68, 1994. ISSN 0018-9286. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 75.
- TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. *Control of uncertain systems with bounded inputs*. [S.l.]: Springer, 1997. (Lecture notes in control and information sciences). ISBN 9783540761839. Citado na página 63.
- TARBOURIECH, S. et al. *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. [S.l.]: Springer, 2011. 430 p. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 46.
- TARBOURIECH, S.; PRIEUR, C.; GOMES DA SILVA JR., J. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2006. v. 51, n. 8, p. 1364–1371, 2006. ISSN 0018-9286. Citado na página 31.
- TOH, K. C.; TODD, M. J.; TUTUNCU, R. H. *SDPT3 — a MATLAB software package for semidefinite programming*. [S.l.], 1996. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 33.
- UTKIN, V.; LEE, H. Chattering problem in sliding mode control systems. In: *Variable Structure Systems, 2006. VSS'06. International Workshop on*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 346–350. Citado na página 20.
- UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. New York: Springer-Verlag, 1992. Citado na página 16.
- VIDYASAGAR, M. *Nonlinear Systems Analysis*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. (Classics in Applied Mathematics). ISBN 9780898715262. Citado na página 26.
- WORKMAN, M.; KOSUT, R.; FRANKLIN, G. Adaptive proximate time-optimal servomechanisms: Discrete-time case. In: *Decision and Control, 1987. 26th IEEE Conference on*. [S.l.: s.n.], 1987. v. 26, p. 1548–1553. Citado na página 41.
- WORKMAN, M. L. *Adaptive Proximate Time-Optimal Servomechanisms*. Tese (Doutorado) — Stanford University, 1987. Citado 6 vezes nas páginas 16, 20, 39, 40, 59 e 80.

- WORKMAN, M. L.; KOSUT, R.; FRANKLIN, G. Adaptive proximate time-optimal servomechanisms: Continuous time case. In: *American Control Conference, 1987*. [S.l.: s.n.], 1987. p. 589–594. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 36.
- XIONG, Y.; WEERASOORIYA, S.; LOW, T.-S. Improved discrete proximate time optimal controller of a disk drive actuator. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 1996. v. 32, n. 5, p. 4010–4012, 1996. ISSN 0018-9464. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.
- ZARCHAN, P.; MUSOFF, H. *Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach*. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005. (EngineeringPro collection, v. 208). ISBN 9781600864582. Citado na página 75.
- ZHENG, J.; FU, M. Nonlinear feedback control of a dual-stage actuator system for reduced settling time. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 2008. v. 16, n. 4, p. 717–725, 2008. ISSN 1063-6536. Citado na página 19.