

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
FACULDADE DE FÍSICA**

ANA LAURA BERTELLI GRAMS

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO:
PERCEPÇÃO MATEMÁTICA POR MEIO DA MÚSICA**

PORTO ALEGRE

2014

ANA LAURA BERTELLI GRAMS

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO:
PERCEPÇÃO MATEMÁTICA POR MEIO DA MÚSICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Orientadora: Dra. Maria Salett Biembengut

PORTO ALEGRE

2014

Grams, Ana Laura Bertelli
G747m Modelagem matemática no ensino médio: percepção matemática
2014 por meio da música / Ana Laura Bertelli Grams; orientadora, Maria
Salett Biembengut Hein. – 2014.
191f. :il. ; 30cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio
Grande do Sul, 2014.
Inclui bibliografia

1. Matemática – Ensino médio. 2. Modelagem Matemática.
3. Matemática e música. 4. Percepção matemática. I. Hein, Maria
Salett Biembengut. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande
do Sul. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e
Matemática. III. Título.

CDD- 22.ed. 510.76

ANA LAURA BERTELLI GRAMS

"MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: PERCEPÇÃO MATEMÁTICA POR MEIO DA MÚSICA"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

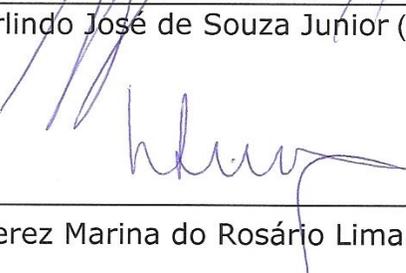
Aprovada em 20 de março de 2014, pela Banca Examinadora.



Dra. Maria Salett Biembengut Hein (Orientadora - PUCRS)



Dr. Arlindo José de Souza Júnior (UFU)



Dra. Valderez Marina do Rosário Lima (PUCRS)

AGRADECIMENTOS

Essas páginas significam que consegui. Se, meu objetivo é agradecer a quem me ajudou chegar ao fim e, se estou a escrevê-las, é porque eu cheguei ao fim. “É tão bonito quando a gente entende que a gente é tanta gente onde quer que a gente vá. É tão bonito quando a gente sente que nunca está sozinho por mais que pense estar” (Gonzaguinha). E, por não ter passado por essa fase sozinha (jamais conseguiria), é que preciso agradecer. Agradeço primeiramente àqueles que estiveram mais próximos, que a cada dia, a cada hora, no mínimo (e nada pouco) me apoiaram e compreenderam a minha ausência.

Agradeço a professora Maria Salett Biembengut, que me orientou e dividiu sua sabedoria e experiência comigo. Devo-lhe agradecimentos por suas sugestões, conselhos, convicções e depoimentos sobre a carreira docente. Agradeço-lhe imensamente por aceitar me orientar. As suas correções nesse trabalho sempre mereceram meu respeito, sabendo que elas significavam a avaliação de alguém tão qualificada e que faz parte da produção nessa área de pesquisa em uma posição privilegiada. Quero expressar aqui meu respeito e admiração por seu trabalho. Obrigada.

Aos professores do programa, por me darem a oportunidade de explorar os seus conhecimentos, por participarem significativamente do meu crescimento profissional. Especialmente, ao professor Maurivan Güntzel Ramos, e a professora Valderez Marina do Rosário Lima: foi uma satisfação imensa poder apreciar suas aulas, vocês são incrivelmente fascinantes. Obrigada por partilhar seus conhecimentos e também sua serenidade.

Agradeço aos colaboradores, os quais voluntariamente participaram desta pesquisa. Aos gestores, secretárias e estudantes do Instituto Prosdócimo Guerra e Theóphilo Petrycoski, por seu empenho em colaborar. É evidente que sem essa participação e envolvimento, a pesquisa não seria possível.

Aos meus queridos amigos João Staffa, Reinaldo Lima e Silvia Milão, pelas longas conversas, desabafos e ótimas companhias. Choramos, rimos, estudamos, aprendemos muito e crescemos juntos. Com vocês essa fase, que é marcada por tantas turbulências se tornou mais tranqüila e agradável.

Dizem que *a fruta não cai longe do pé*, e por isso, agradeço imensamente a Deus pela família que escolheu para mim. Meus pais: minha primeira inspiração!

Inspiração pessoal, inspiração moral, inspiração profissional, inspiração de AMOR. Agradeço por ter vocês perto de mim. O carinho de vocês me ajudou a concluir mais essa etapa na minha vida. Um milhão de vezes: OBRIGADA!

Ainda agradeço aos meus pais por me darem um irmão. Ele chegou para agitar nossas vidas, mas, principalmente, para alegrar nossos corações com seu carinho e amor. Cuidar dele sempre foi minha preocupação, mas nesses últimos tempos, foi ele quem cuidou de mim e me apoiou. Obrigada meu lindo, você sempre estará nas minhas orações.

Durante dois anos transformei meus dias e precisei dedicar muito tempo a viagens e estudos. E mesmo assim recebi muita compreensão e carinho do meu amor. Obrigada Adolfo por todo o apoio nesse período “sem fim”, por suportar minha ansiedade e impaciência. E, por sempre, sempre, confiar que eu era capaz. Te amarei de janeiro a janeiro!

Agradeço aos meus familiares, aos meus amigos, aos meus colegas de trabalho, aos meus alunos, que me aceitaram e me apoiaram mesmo eu estando, em muitos momentos, distante e indisponível.

Nesse mestrado pude conhecer pessoas especiais, dentre elas conheci uma linda família que me acolheu e me abrigou. Família Pasa, obrigada pela confiança. Marcela e Marina, desde o primeiro dia que nos conhecemos vocês foram prestativas, queridas e com um coração enorme. Sempre serei grata pelo que fizeram por mim. Tenham certeza que meu caminho se tornou mais fácil com a ajuda de vocês. Obrigada.

Para quem obedece às normas, os agradecimentos de uma dissertação devem ser dirigidos àqueles que realmente contribuíram de maneira relevante para a elaboração do trabalho. Isso pode significar que eu deveria agradecer às pessoas mais próximas nesses dois últimos anos e que contribuíram de uma maneira concreta com o texto.

Eu interpreto que a contribuição relevante na minha dissertação não depende da presença nesses anos do mestrado. Mas, reconheço outras formas de apoio, que foram a mim dedicadas, em vários momentos da minha caminhada, para que eu chegasse até aqui.

O mestrado me oportunizou diferentes crescimentos, mas o maior deles foi profissional. E ao falar da profissão, eu jamais esqueceria as pessoas nas quais eu me espelhei para me tornar professora. E vou citá-las em ordem cronológica: os

primeiros, os mais maravilhosos, os mais dedicados e apaixonados por essa profissão foram os meus pais, neles eu ainda me inspiro, e sua busca por igualdade no acesso ao conhecimento se tornou também a minha busca.

O gosto pela Matemática foi plantado por duas pessoas carinhosas e de imensa sabedoria, Oivete Mezzomo e Iara. Foi por meio das suas ótimas aulas que comecei a me interessar por esta área tão sistemática e escolhi ser licenciada em Matemática.

Essa minha escolha também foi adubada no Ensino Superior pela professora Janecler Amorim. Uma professora exemplar, a qual admiro pela dedicação e amor que esbanja ao ensinar. Espero um dia possuir tanta competência e sabedoria quanto ela.

Eu estava certa da minha escolha. Mas não foi tão simples, o curso era difícil e os obstáculos foram gigantes. E, eu tenho certeza que não os venceria se não estivesse sob cuidados de uma pessoa especial: Loreci Zanardini. Aos cuidados, sim, pois, ele é muito mais do que um professor espetacular, é um grande amigo. Me ensinou Matemática de verdade, me ensinou álgebra, cálculo, análise e até modelagem, mesmo sendo “apenas” meu professor de geometria. Além disso, ganhei um grande amigo, com o qual compartilho angústias e inquietações quando falamos de Educação. “A mente que se abre a uma nova ideia jamais volta ao seu tamanho original” (Albert Einstein). Sem dúvida você abriu minha mente e me inspirou para iniciar e também concluir esse mestrado. Muito Obrigada!

E, voltando a citar os que estão mais próximos, agradeço ao maior responsável por eu conseguir colher esse sonho: agradeço a Deus. Que em todos os momentos da minha vida me acompanha, me guia e me carrega no colo quando mais preciso. Ele me fez mais forte e me deu segurança para seguir em frente sob qualquer condição.

A música é um exercício de aritmética
secreto e aquele que a ela se consagra
ignora que manipula número.

Gottfried Wilhelm Leibniz

RESUMO

Esta pesquisa de mestrado teve como objetivo analisar a percepção matemática de estudantes do Ensino Médio por meio da Modelação Matemática na Música. Foi estruturada em quatro capítulos, denominados Mapas. O primeiro é o mapa de identificação, no qual fez-se o reconhecimento da pesquisa, apresentou-se a justificativa, o problema, os objetivos, os colaboradores voluntários e os procedimentos metodológicos adotados. No mapa teórico, segundo capítulo, apresentam-se reflexões teóricas abordando os temas Relação da Matemática com a Música (tema da atividade pedagógica), Modelagem Matemática na Educação (tema da pesquisa), e Percepção (tema da análise), que foram bases da proposta pedagógica e da análise dos dados. O terceiro capítulo é o mapa de campo, nele estão descritos os dados empíricos desta pesquisa, os quais foram obtidos a partir da aplicação da proposta didática com estudantes voluntários que cursavam o Ensino Médio, e participavam de oficinas de instrumentalização em um Instituto da cidade de Pato Branco (PR). Sob análise qualitativa realizada a partir de um estudo de caso, o mapa de análise aproxima os dados obtidos na aplicação da pesquisa dos estudos teóricos sobre a relação da Matemática com a Música, Modelagem Matemática na Educação e Percepção. O resultado da pesquisa mostrou que, por meio da Modelação Matemática, os estudantes levantaram hipóteses, observaram, refletiram, interpretaram, solucionaram problemas e, assim, perceberam na Música conteúdos teóricos da Matemática.

Palavras-chave: Matemática e Música. Modelagem Matemática. Modelação Matemática. Percepção Matemática. Ensino Médio.

ABSTRACT

The goal of this Master's Thesis Degree was to analyze the mathematics perception of High School students by means of Mathematical Modeling Teaching in Music. It was organized in four chapters, named Maps. The first one is identification map, which it was recognized the research, it was presented the justification, the problem, the goals, the volunteers collaborators and the methodological procedures used. The second map, second chapter, it was presented theoretical reflections addressing the relationship of Mathematics topics with Music (theme of pedagogical activity), Mathematical Modeling (research theme), and Perception (subject of analysis) which were bases of pedagogical proposal and data analysis. The third chapter is the field's map, in this part are described the empirical data of this research, which were obtained from the application of didactic proposal with volunteers students who attended High School and participated in workshops of musical instruments in an Institute in Pato Branco (PR). Using a qualitative analysis from a case study, the analysis's map approaches the data obtained in the application of research from theoretical studies on the relationship of Mathematics with Music, Mathematical Modeling and Perception. The results of the research showed that, by means of Mathematical Modeling Teaching, students raised hypotheses, watched, they reflected, interpreted, solved problems and, realized in Music theoretical concepts of Mathematics.

Keywords: Mathematics and Music. Mathematical Modeling. Mathematical Modeling Teaching. Mathematics Perception. High School.

LISTA DE MAPAS

Mapa 1 – Mapa de Identificação	14
Mapa 2 – Resultados SAEB – Ensino Médio – Matemática	19
Mapa 3 – Mapa Teórico	32
Mapa 4 – Fases da Modelação	43
Mapa 5 – Ilustração dos Princípios Gestálticos da Percepção	51
Mapa 6 – Leis da Gestalt aplicadas na música por Lipscomb	51
Mapa 7 – Duas ondas sonoras de 100 Hz	53
Mapa 8 – Duas ondas sonoras de 1.000 Hz	53
Mapa 9 – Ondas sonoras complexas	54
Mapa 10 – Níveis de intensidades de sons comuns	55
Mapa 11 – Sons musicais comuns e suas frequências	55
Mapa 12 – Teses e Dissertações: Matemática e Música	57
Mapa 13 – Teses e Dissertações: Modelagem Matemática	64
Mapa 14 – Teses: Percepção	70
Mapa 15 – Mapa de Campo.....	76
Mapa 16 – Espiral logarítmica da escala musical temperada	83
Mapa 17 – Primeira tentativa espiral logarítmica	84
Mapa 18 – Segunda tentativa espiral logarítmica	85
Mapa 19 – Gráfico da pressão pelo tempo de uma onda sonora	88
Mapa 20 – Função seno ilustrada no Geogebra	89
Mapa 21 – Exemplos de simetria da função seno	89
Mapa 22 – Esboço ondas sonoras	90
Mapa 23 – Experiência copos	96
Mapa 24 – Espaço para registro dos dados coletados	98
Mapa 25 – Esboço da junção de duas ondas sonoras	102
Mapa 26 – Resposta sobre padrão numérico entre as frequências	106

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Peça sintética do ouvido humano	82
Figura 2 – Estudantes verificando a frequência das notas musicais	95
Figura 3 – Estudantes executando a atividade	96
Figura 4 – Estudantes criando a escala musical nos copos	97
Figura 5 – Validação do instrumento criado com os copos	100
Figura 6 – Estudantes realizando a atividade	106

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - MAPA DE IDENTIFICAÇÃO	14
1.1 IDENTIFICAÇÃO DA PESQUISA NO MAPA.....	15
1.2 PELOS CAMINHOS E MEIOS: APORTES TEÓRICOS E EMPÍRICOS	24
CAPÍTULO II – MAPA TEÓRICO	31
2.1 REFERÊNCIAS-GUIA: TEORIAS SUPORTE	32
2.1.1 Matemática e a Música.....	32
2.1.2 Modelagem Matemática na Educação – Modelação.....	37
2.1.3 Percepção	45
2.2 REFERÊNCIAS – INDICATIVAS: PRODUÇÕES ACADÊMICAS.....	56
2.2.1 Matemática e Música.....	57
2.2.2 Modelagem Matemática na Educação	64
2.2.3 percepção.....	70
2.3 CONSIDERAÇÕES DESTE MAPA.....	74
CAPÍTULO III – MAPA DE CAMPO	76
3.1 POR ONDE COMEÇAR: ETAPAS DA ORGANIZAÇÃO.....	77
3.2 COMO SE ORIENTAR: MATERIAL DE APOIO DIDÁTICO.....	78
3.3 COMO CHEGAR: DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES.....	79
3.4 CONSIDERAÇÕES DESTE MAPA.....	107

CAPÍTULO IV – MAPA DE ANÁLISE	111
4.1 DAS EVIDÊNCIAS NO PERCURSO: <i>atenção, similaridade e relação</i>	112
4.2 DESTE PONTO PARA OUTRO FUTURAMENTE	122
REFERÊNCIAS.....	124
APÊNDICE A – SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO	128
APÊNDICE B – AUTORIZAÇÃO PARA PESQUISA	129
APÊNDICE C – CARTA-CONVITE E TERMO DE CONSENTIMENTO	130
APÊNDICE D – MATERIAL DE APOIO DIDÁTICO	131
APÊNDICE E – QUESTIONÁRIO INICIAL	166
APÊNDICE F – RESPOSTAS QUESTIONÁRIO INICIAL	168
APÊNDICE G – ATIVIDADES 4º ENCONTRO.....	172
APÊNDICE H – PARTITURA DAS MÚSICAS SAMBALELE E CAI CAI BALÃO .	175
APÊNDICE I – QUESTIONÁRIO INDIVIDUAL FINAL	176
APÊNDICE J – DESCRIÇÃO DOS RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO FINAL.	181

CAPÍTULO I - MAPA DE IDENTIFICAÇÃO

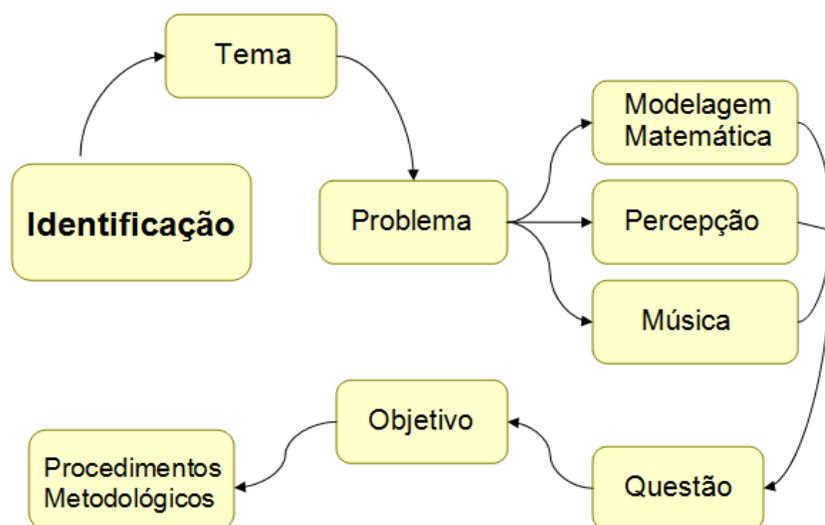
Neste mapa de identificação apresenta-se um panorama do tema da pesquisa - a *Modelação Matemática na Música* - e “reconhecimento do campo em que o objeto está inserido: identificação de entes, fontes, caminhos a serem percorridos, sequências de ações ou etapas no processo de pesquisa e reconhecimento da origem, [...]” (BIEMBENGUT, 2008, p.79).

Assim, neste capítulo faz-se a identificação das questões que se pretende responder, dos objetivos e da justificativa desta pesquisa, em seguida, busca-se reconhecer as fontes, os meios, as pessoas, participantes e colaboradores. “Só podemos compreender um sistema se observarmos o conjunto, não apenas uma das partes” (BIEMBENGUT, 2008, p.80).

O capítulo está dividido em duas seções: a *primeira* expõe a organização, as funções e as leis que fundamentam o Ensino Médio no Brasil, o problema, a justificativa do tema, e as concepções teóricas que guiaram esta pesquisa (Música, Modelagem Matemática na Educação e Percepção); a *segunda*, os aportes empíricos adotados e as etapas das ações necessárias para dispor de dados e atingir o propósito desta pesquisa.

O mapa 1 ilustra as etapas a serem seguidas.

Mapa 1: Mapa de Identificação



Fonte: a autora.

1.1 IDENTIFICAÇÃO DA PESQUISA NO MAPA

A última etapa da Educação Básica no Brasil, o Ensino Médio (EM), prevista na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) nº 9.394, promulgada em 20 de dezembro de 1996, tem a finalidade de formar pessoas para o trabalho com capacidades para continuar aprendendo, acompanhando mudanças, atualizando-se e aperfeiçoando-se, de forma a desenvolver a autonomia intelectual, o pensamento crítico e a formação ética do indivíduo e assumir a responsabilidade de completar a Educação Básica.

A lei prevê diretrizes para o currículo do EM e entre elas destaca-se o acesso ao conhecimento e exercício da cidadania, o que exige da escola integrar os estudantes “ao mundo contemporâneo nas dimensões fundamentais da cidadania e do trabalho” (BRASIL, 2000b, p.4). Em busca dessa integração e relação do conhecimento com dados da experiência cotidiana, o EM tem o currículo organizado em três grandes áreas do conhecimento: Linguagens e Códigos; Matemática e suas Tecnologias; e Ciências Humanas.

Essa proposta de currículo visa superar o ensino descontextualizado e compartimentado das disciplinas que baseiam o aprendizado no acúmulo de informações para áreas abrangentes do conhecimento. Incentiva a interdisciplinaridade e a capacidade de aprender e resolver problemas, prepara o estudante para o exercício da cidadania e o qualifica para o trabalho, conforme artigo 2º da LDB de 1996.

O cumprimento da proposta curricular dividida nas três áreas do conhecimento implica que os professores preparem, em conjunto, atividades que envolvam diferentes conteúdos e que possibilitem aos estudantes desenvolver habilidades suficientes para utilizar a situação a qual o conhecimento foi adquirido em situações relacionadas com a prática e permitam-lhes a compreensão da realidade em uma perspectiva globalizada.

O Ministério da Educação elaborou os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), um documento que orienta os professores e as instituições de ensino quanto à organização pedagógica, a efetivação das prescrições da legislação educacional e quanto ao bom desempenho das atividades educacionais. Publicada em 2000 a edição para o EM, os PCN oferecem orientações e direcionamentos teórico-metodológicos para professores que atuam nessa etapa de ensino. O documento

institui como meta para a formação do estudante, “o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização” (BRASIL, 2000b, p.5).

Em 2002 foram publicadas as primeiras edições das Orientações Educacionais Complementares (PCN+ para EM), divididas em três volumes, cada qual uma área do conhecimento, que apresentam sugestões sobre as práticas pedagógicas complementando os PCN. Trata-se de uma orientação aos professores e gestores de tal forma a “responder às transformações sociais e culturais da sociedade contemporânea, levando em conta as leis e diretrizes que redirecionam a educação básica” (BRASIL, 2002, p.7).

A organização das três áreas do conhecimento: Linguagens e Códigos, Matemática e suas Tecnologias, e Ciências Humanas, “tem como base a reunião daqueles conhecimentos que compartilham objetos de estudo e, portanto, mais facilmente se comunicam, criando condições para que a prática escolar se desenvolva numa perspectiva de interdisciplinaridade” (BRASIL, 2000b, p.18).

A estruturação por área de conhecimento justifica-se por assegurar uma educação de base científica e tecnológica, na qual conceito, aplicação e solução de problemas concretos são combinados com uma revisão dos componentes socioculturais orientados por uma visão epistemológica que concilie humanismo e tecnologia ou humanismo numa sociedade tecnológica (ibid, p.19).

A perspectiva interdisciplinar das três áreas do conhecimento conduz os conteúdos de forma organizada e interligada, sem cada área diluir ou eliminar outras (BRASIL, 2002, p. 8). Essa integração das áreas do saber permite a atribuição de significado para o conhecimento aprendido de forma a manter um diálogo permanente com as áreas envolvidas.

O propósito da divisão por áreas do conhecimento é o de um caráter interdisciplinar às disciplinas. Na área Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, as disciplinas de Biologia, Física, Química e Matemática se integram para indicar a “compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos, para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção na realidade” (BRASIL, 2000b, p.20).

O ensino disciplinar de natureza enciclopédica é superado pelas competências e habilidades desenvolvidas no conjunto das disciplinas (BRASIL, 2006).

O trabalho disciplinar pode e deve contribuir para esse desenvolvimento. Conforme destacam os PCNEM (2002) e os PCN+ (2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural” (ibid, p.69).

Segundo os PCN (2000), no que diz respeito à Matemática, é essencial que a capacidade que os estudantes têm de desenvolver uma inteligência prática seja potencializada pela escola, permitindo assim que reconheçam problemas, busquem e selecionem informações, relacionando com suas necessidades cotidianas. Isso faz com que os conteúdos agreguem valor formativo ao desenvolvimento do pensamento matemático e, oportunize aos estudantes

um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva (BRASIL, 2006, p. 70).

Dentre as habilidades e competências que essa área do conhecimento desenvolve, destaca-se a oportunidade oferecida ao estudante de “compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas, e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas” (BRASIL, 2000b, p.96).

Com o intuito de avaliar, verificar e superar falhas no processo de ensino e aprendizagem, recomendado pelos PCN, o Ministério da Educação faz uso de indicadores de desempenho dos estudantes. Busca-se verificar o conhecimento de modo a subsidiar mudanças no fazer pedagógico das escolas. Ou seja, a análise dos resultados é que guiará os caminhos da ação educativa.

Os índices de avaliação não só contribuem para a aprendizagem como são partes integrantes do processo, pois abrangem o trabalho do professor e o desempenho do estudante. Por isso a avaliação nunca será a última etapa, pois a partir dela toma-se consciência de qual parte dos objetivos não foi alcançada ou, quais resultados foram atingidos além do esperado.

Os indicadores do desempenho dos estudantes na modalidade EM, etapa final da Educação Básica apresentados no *Índice de Desenvolvimento da Educação Básica* – IDEB, são obtidos a partir das avaliações realizadas pelo SAEB – *Sistema de avaliação da Educação Básica* e Enem – *Exame Nacional do Ensino Médio*, de modo que esses indicadores possam servir de bases comparativas para as referências do PISA – *Programa internacional de Avaliação de Alunos*.

O PISA é um programa de avaliação comparada promovido pela *Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico* (OCDE) e coordenado no Brasil pelo INEP – *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*. Suas avaliações ocorrem de três em três anos e estendem-se a três áreas do conhecimento: Matemática, Leitura e Ciências. A cada avaliação uma das áreas é exigida com maior destaque. A última edição da prova do PISA foi em 2012 com ênfase na área de Matemática.

De acordo com o INEP, em 2012, definiu-se internacionalmente uma amostra de estudantes nascidos em 1996 com aproximadamente 510 mil estudantes, em 60 países, sendo 18 mil estudantes participantes no Brasil. Nessa edição o Brasil classificou-se em 58º lugar com 391 pontos, enquanto a média geral dos países ficou em 494 pontos. A título de comparação, a China (Xangai) foi o país que ocupou o 1º lugar mundial e fez 613 pontos, o Canadá com o 1º lugar na América, 518 pontos, o Chile com o 1º lugar dentre os países latino-americanos, com 423 pontos e o Peru em último lugar no ranking nacional, 368 pontos (MEC, 2013).

Além dos resultados do PISA, o MEC considera relevantes outros instrumentos de avaliação educacional para a verificação do desempenho brasileiro que compõe o IDEB. O IDEB, calculado com base no Censo Escolar, Provinha Brasil e SAEB é um relevante diagnóstico para articulação e mobilização de estratégias com o objetivo de atingir um patamar considerado satisfatório em níveis internacionais com vistas à qualidade da educação. Além do fator diagnóstico, o IDEB se mostra importante na condução de políticas públicas em prol da melhoria da qualidade escolar.

O SAEB é realizado a cada dois anos por estudantes da rede pública e privada de ensino, sendo uma prova composta de leitura e Matemática. O Plano de Desenvolvimento da Educação estabeleceu como meta para 2022 atingir a média

6,0, em uma escala de 0 a 10. O mapa 2 apresenta os pontos obtidos em Matemática pelos estudantes do EM nos anos de 2005, 2007, 2009 e 2011.

Mapa 2 – Resultados SAEB – Ensino Médio - Matemática

Matemática – Ensino Médio				
Ano	2005	2007	2009	2011
Pontos	271,3	272,9	274,7	273,9

Fonte: MEC/INEP.

A principal questão que emerge dos resultados sintetizados no mapa 4 refere-se aos baixos resultados obtidos em Matemática quando comparados à média aceitável pelo Ministério da Educação para o EM (375 pontos). Esse resultado reflete diretamente no planejamento escolar e nas atividades de intervenção pedagógica, sendo necessário tomar medidas de urgência visando à melhoria da qualidade escolar.

Segundo os índices apresentados pelo IDEB, a Educação brasileira tem mostrado, nas últimas décadas, baixo desempenho, e, na área específica da Matemática esses déficits são maiores. Com o intuito de reverter esse quadro e superar o reducionismo do processo escolar à transmissão de informações, sugere-se que propostas mais concisas e eficazes de ensino e aprendizagem sejam capazes de encaminhar o estudante à apropriação do conhecimento proposto no currículo. Sendo essas propostas de ensino um processo de desenvolvimento de conhecimentos capazes de alterar substancialmente os resultados das avaliações como consequência do aprendizado.

Assim, tomando como metas as habilidades e competências da Matemática, citadas anteriormente, *como capacitar os estudantes do EM para que utilizem a Matemática para resolver problemas do cotidiano e modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento?*

Com o intuito de ultrapassar a fragmentação dos conhecimentos e ir além dos objetivos disciplinares, em uma proposta de ensino que vise a educação em seu sentido pleno, sugerem-se valorizar, de modo dinâmico, situações-problemas que aliam a teoria com a prática. A Música, e o modo como é abordada na escola, é uma alternativa para a fragmentação disciplinar.

A relação entre a Matemática e a Música não é recente, segundo Granja (2010), essas disciplinas já tiveram seus conteúdos interligados ao fazer parte de um dos currículos mais importantes da antiguidade, o *Quadrivium*, o qual era composto pelas disciplinas: Aritmética, Música, Geometria e Astronomia. Tanto a disciplina de Aritmética como a de Música compunham as disciplinas numéricas, “a primeira era o estudo dos números em repouso, e a segunda, o estudo dos números em movimento” (ibid, p.41).

Segundo Abdounur (2003), há registros da relação da Matemática com a Música desde o século VI a.C, quando Pitágoras efetuou experiências com sons no monocórdio, as quais “evidenciavam relações entre comprimento de uma corda estendida e a altura musical do som emitido quando tocada” (ibid, p.4).

Gardner (1994), afirma

A meu ver, há elementos claramente musicais, quando não de “alta matemática” na música: estes não deveriam ser minimizados. Para apreciar a função dos ritmos no trabalho musical o indivíduo deve ter alguma competência numérica básica. As interpretações requerem uma sensibilidade à regularidade e proporções que podem às vezes ser bastante complexa. (GARDNER, 1994, p. 98).

O mesmo autor defende que conceitos matemáticos são indispensáveis para diversas percepções musicais. Assim, partindo de ideias que permeiam essas duas competências esta pesquisa busca responder o seguinte problema de pesquisa: *como a Modelação Matemática na Música pode favorecer a percepção matemática de estudantes de EM?*

Utilizando-se de estudos e apontamentos teóricos existentes, bem como da aplicação da pesquisa estima-se responder as seguintes questões que guiarão o estudo: *Como e em que medida a Modelagem Matemática e a Música pode levar estudantes do EM a perceber os conceitos matemáticos? E, qual a contribuição de atividades didáticas de Modelação Matemática na Música para o ensino de Matemática no EM?*

Diante do exposto, esta pesquisa tem como objetivo principal: *analisar a percepção matemática de estudantes do EM por meio da Modelação Matemática na Música.*

A Música, conforme prevista na Lei nº 11.769, faz parte do programa da Educação Básica e pode ser utilizada como recurso didático para ensinar conteúdos de outras disciplinas em todos os níveis de ensino.

A Lei nº 11.769 estabelece a obrigatoriedade do ensino de Música nas escolas, alterando a Lei de Diretrizes e Bases (LDB nº 9.394/96), que passou a vigorar acrescida do seguinte § 6º: “A música deverá ser conteúdo obrigatório, mas não exclusivo, do componente curricular de que trata o §2º deste artigo”. O § 2º da LDB (Lei nº 9.394/96), constitui o ensino da Arte como “componente curricular obrigatório, nos diversos níveis da educação básica, de forma a promover o desenvolvimento cultural dos alunos”.

A integração da Música na escola faz sentido quando é parte de um currículo escolar no contexto interdisciplinar, em que subentendem-se disciplinas interligadas em função de metas comuns, sem limitar-se ao contexto de uma só disciplina. “A interdisciplinaridade ocorre quando um tema interno a uma determinada disciplina é ampliado, ganhando certa autonomia” (GRANJA, 2010, p.109).

A música é abrangente no que tange a integração de diversos conteúdos de disciplinas variadas, nas quais “a dimensão perceptiva é valorizada tanto quanto a dimensão conceitual” (GRANJA, 2010, p.110). A percepção é essencial no conhecimento da Música, uma vez que se trata de uma linguagem expressada diretamente aos sentidos.

A percepção é uma dimensão fundamental do conhecimento humano. É por meio dela que conhecemos o mundo, seus objetos e fenômenos. Mais do que isso, a percepção humana é um processo que traz em si não apenas manifestações sensoriais, mas também a significação dessas manifestações (GRANJA, 2010, p.47).

Segundo Lorenzato (2006), a Percepção Matemática dos estudantes se efetiva a partir de suas experiências e como eles processam tais experiências. É desenvolvida por meio de situações que aproveitem o conhecimento que o estudante adquiriu antes e fora da escola, proporcionando condições para um estudo significativo das noções matemáticas.

Assim, ao utilizar a Música como recurso pedagógico nas aulas de Matemática, valoriza-se tanto o desenvolvimento perceptivo quanto o conceitual do estudante. Assim como defende Gardner que “o propósito da escola deveria ser o de desenvolver as inteligências e ajudar as pessoas a atingirem objetivos de ocupação e passatempo adequados ao seu espectro particular de inteligências” (1995, p.16),

não apenas valorizar o conhecimento lógico-matemático e linguístico e estritamente conceitual.

Mesmo sendo a Música conteúdo obrigatório previsto em lei e, recomendado pelos parâmetros curriculares nacionais, poucas escolas dispõem espaços para a sua inserção, principalmente no EM.

Ao fazer um retrospecto da educação musical na Educação Básica, Granja (2010), aponta a desvalorização do estudo das atividades que envolvem Música ao passar dos anos escolares. O autor compara a Educação Infantil com o EM, por exemplo, afirmando que a Música perde espaço nos currículos à medida que as séries avançam, “como se o desenvolvimento perceptivo fosse importante somente no âmbito das atividades infantis” (GRANJA, 2010, p. 16).

Afirma Granja, que “as atividades perceptivas vão sendo gradualmente substituídas por atividades de interpretação e sistematização conceitual” (2010, p.16), de modo a sobrevalorizar a dimensão conceitual do conhecimento.

“Não se pode pretender desvincular totalmente o conhecimento conceitual dos processos perceptivos em geral, sob pena de tornar o conhecimento artificial e sem sentido. Assim como não é desejável que o conhecimento se baseie exclusivamente na dimensão perceptiva, sem qualquer tipo de construção dos conceitos” (GRANJA, 2010, p. 17).

Com o intuito de vincular a teoria com a prática, numa perspectiva interdisciplinar, e valorizar as dimensões perceptivas e conceituais do conhecimento, esta pesquisa pretende proporcionar a um grupo de estudantes do EM – voluntários – contato com a Matemática a partir da Música, utilizando-se da Modelação Matemática como método.

Conforme sugere Biembengut (2009), na Modelação os procedimentos para desenvolver o conteúdo programático devem permitir ao estudante chegar a um modelo matemático, na medida em que formula e resolve as atividades propostas. Esse processo oportuniza ao estudante a apreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

Os procedimentos da Modelação, definidos por Biembengut (no prelo) como sendo os mesmos de pesquisa na Educação, levam o estudante ao desenvolvimento de diversas competências, como, ao delimitar o tema, identificar quais as variáveis relevantes para a solução; ao formular o problema, reconhecer a linguagem matemática envolvida e criar hipóteses explicativas e de resolução;

utilizar do conhecimento matemático para solução do problema formulado comparando os resultados com o conhecimento teórico.

As atividades propostas com a aplicação desta pesquisa estimam superar a prática de lançar informações descontextualizadas em sala de aula que direciona o estudante para um caminho de reprodução e memorização de procedimentos, bem como a acumulação de informações que resultam em uma formação pouco significativa em contextos artificiais.

Segundo D'Ambrosio (1986, p.64), a busca pela aproximação dos conteúdos aplicados em sala de aula com a realidade e a análise feita a partir de conhecimentos específicos "é a base da estratégia de ensino integrado e global, na qual a Matemática se insere como linguagem". Essa busca é constante no processo de Modelação Matemática, na medida em que a Modelação depende de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos, resolvê-los envolvendo os conceitos necessários e, interpretar a solução reaproximando-a do real.

E, de acordo com Granja (2010), a Música deveria estar mais presente nas escolas, sendo que é um conhecimento em que atividades de natureza perceptiva e os momentos de elaboração conceitual se articulam, afirmando ainda, que essa articulação deveria estar no sentido maior de qualquer aprendizagem.

Bem como a Matemática que se faz presente desde muito tempo, por exemplo, na contagem e nas trocas de objetos, a Música acompanha o ser humano desde a antiguidade e é percebida como arte, que deve ser apreciada como tal. Arte esta que desperta no ser humano sentimentos dos mais variados como tristeza, alegria, compaixão, etc. (ABDOUNUR, 2003).

A Música pode ser entendida como uma aplicação da Matemática, uma vez que, a harmonia musical é gerada respeitando padrões e regularidades de uma estrutura lógica. "A matemática estuda a regularidade presente nas formas e nos números. Na música, busca-se a percepção das regularidades sonoras e temporais" (GRANJA, 2010, p.98).

Estes padrões e regularidades que subsidiaram a articulação do conhecimento matemático com o tema Música nessa pesquisa, tomando a Modelação Matemática como método, já que a "Modelação Matemática norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um *tema* ou modelo matemático e orientar o aluno na realização de seu próprio modelo-matemático" (BIEMBENGUT, 2009, p.18). Seus principais objetivos, segundo Biembengut, são:

“aproximar uma outra área do conhecimento da Matemática; enfatizar a importância da Matemática para a formação do aluno; despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade; melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos; desenvolver a habilidade para resolver problemas; e estimular a criatividade” (BIEMBENGUT, 2009, p.18).

Compreender os “fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática” é uma das finalidades do EM, prevista no art.35 da LDB (Lei nº 9.394/96). Este fim pode ser alcançado por meio da Modelação, e, além disso, o estudante é instigado a fazer pesquisa e aprender a partir de temas que são de seu interesse, relacionando as disciplinas desta área do conhecimento. *E como integrar os conhecimentos e as disciplinas no EM para que se aproximem da realidade e elaborem estratégias para resolver de problemas?*

1.2 PELOS CAMINHOS E MEIOS: APORTES TEÓRICOS E EMPÍRICOS

Para relacionar estas áreas com atividades matemáticas e atingir o objetivo proposto, foram necessárias etapas específicas como identificar modelos matemáticos na Música, elaborar atividades didáticas de apoio para o EM por meio da Modelação Matemática na Música e, identificar a percepção matemática dos estudantes antes e depois da Modelação Matemática voltada a Música. Os dados exigidos foram o perfil dos estudantes, expressão dos estudantes durante as aulas, resultados de avaliações escritas e trabalhos realizados durante e no final da aplicação da pesquisa e depoimentos dos estudantes.

Nessa pesquisa adota-se o Mapeamento da Pesquisa Educacional de Biembengut (2008) para aportes teóricos e empíricos da pesquisa que é “ao mesmo tempo, ponto de partida para a apresentação de um sistema descritivo e de um sistema interpretativo de questões educacionais” (BIEMBENGUT, 2008, p.75).

O mapeamento possui característica não linear cuja abordagem leva a apreensão de uma realidade e, consiste no processo envolvido na feitura de um mapa. Segundo Biembengut (2008), *mapa* pode ser definido como “a representação de alguma coisa que tem um assunto ou objeto/sujeito”. O qual orienta e guia, “bem como facilita comparações, entender determinadas informações, ir de um ponto a outro e de uma idéia a outra” (BIEMBENGUT, 2008, p.11).

No mapeamento os conhecimentos são consolidados de modo a elucidar o problema, “utilizando-se múltiplos e complexos critérios e não apenas a sucessão cronológica” (BIEMBENGUT, 2008, p.74). A abordagem do mapeamento na pesquisa educacional pode ser sob dois enfoques, a saber,

O primeiro enfoque consiste em mapear, ou seja, organizar os dados ou entes de forma harmônica de maneira a oferecer um quadro completo deles, [...]. O segundo enfoque, mais completo, além da organização dos dados ou entes da pesquisa, consiste em compreendê-los em sua estrutura e em seus traços (BIEMBENGUT, 2008, p.74).

Os procedimentos de pesquisa estão estruturados em quatro etapas denominadas *Mapa de identificação* – planejamento da pesquisa, *Mapa teórico* – conceituação e definição do tema, *Mapa de campo* – dados empíricos de pesquisa de campo e instrumentos e, *Mapa de análise* – análise da pesquisa. O Mapa de Identificação é este Capítulo I.

- *Mapa Teórico*

Essa etapa consiste em definir e conceituar o tema da pesquisa, identificando e estudando “pesquisas similares e recentes que não apenas darão sustentação à pesquisa que se pretende efetuar, como também permitirão justificar a pesquisa situando-a no mapa dos trabalhos já desenvolvidos” (BIEMBENGUT, 2008, p.75).

Segundo Biembengut (2008), o mapa teórico parte de um diligente estudo para tornar a questão de pesquisa mais inteligível.

O objetivo desse mapa é nos permitir o reconhecimento de conceitos e definições do tema ou questão da pesquisa que se encontrem à disposição para posteriormente, aproveitarmos-nos das experiências próprias e de outrem a fim de alimentar os resultados, comparar e decidir o que vamos adotar (BIEMBENGUT, 2008, p.91).

Estes conceitos e definições esclarecem o tema da pesquisa, delimitam o campo de análise e auxiliam na compreensão de “quais e como estes foram utilizados nas pesquisas realizadas em que pretendemos nos fundamentar” (BIEMBENGUT, 2008, p.90).

O Mapa Teórico organiza-se em três etapas que fundamentam o estudo, de modo que este não seja baseado somente em conhecimento de senso comum ou que transcreva fatos de pesquisas já realizadas:

- A *primeira*, consiste no levantamento e na identificação de estudos existentes sobre Modelagem Matemática na Educação e o ensino de Matemática por meio da Música. Cumpriu-se esta etapa por meio de palavras-chave como, Modelagem Matemática, Música, Percepção, relação entre Matemática e Música, buscando em sites de bibliotecas de universidades de domínio público, livros, revistas científicas, artigos, anais de congressos, teses de doutorados, dissertações de mestrado, entre outros locais.

- Na *segunda* etapa, foram identificados e reconhecidos estudos recentes similares ao tema da pesquisa em pesquisas acadêmicas. Com a finalidade de justificar a importância do estudo a ser feito e dar continuidade ao que já se produziu, neste caso sobre Modelagem Matemática na Música.

- Da terceira etapa faz parte um texto de classificação e organização das produções preferidas, buscando definir e conceituar os termos envolvidos (Modelagem Matemática e Música), bem como justificar a importância e relevância da pesquisa.

O detalhamento e a descrição de cada uma dessas etapas estão destinados ao Capítulo II, denominado Mapa Teórico.

- *Mapa de Campo*

Para compreender os entes pesquisados, o Mapa de Campo deriva da descrição e identificação das informações e dos dados empíricos coletados por “observação, entrevista, narrativa, questionamento e da combinação das ideias abstratas concernentes aos entes ou aos fenômenos considerados, em particular” (BIEMBENGUT, 2008, p.101).

O Mapa de Campo possibilitou melhor compreensão dos dados classificados e reconhecidos no Mapa Teórico, na medida em que se passou a levantar e a estudar absolutamente os dados empíricos da própria pesquisa de campo.

Segundo Biembengut (2008), a fonte de dados a ser estudada pode ser documentos ou pessoas, desde que nos forneça informações a fim de captar a

complexidade da questão investigada. Sobre o Mapa de Campo a mesma autora afirma que este consiste em:

estabelecer previamente um maior conjunto possível de meios e instrumentos para levantamento, classificação e organização de dados ou informações que sejam pertinentes e suficientes, considerando pontos relevantes ou significativos e que nos valham como mapa para compreender os entes pesquisados (BIEMBENGUT, 2008, p.101).

Para tanto, o levantamento de dados empíricos desta pesquisa foi desenvolvido com estudantes do EM, integrantes de oficinas de Música no Instituto Prosdócimo Guerra e Theóphilo Petrycoski no município de Pato Branco (PR). Foram levantados dados descritivos por instrumento de coleta e didáticos. Para isso, o Mapa de Campo está dividido em três partes as quais apresentam: a preparação para a aplicação; a elaboração e apresentação do Material de Apoio Didático; e, a aplicação, a descrição e a organização dos dados:

1ª parte – preparação para a aplicação:

Na primeira parte se fez necessário a busca por voluntários, o contato com escolas e locais que aceitassem a aplicação dessa pesquisa com seus estudantes. Para tanto, elaborou-se documentos, tanto para pais quanto para a Instituição, que autorizassem a realização dos encontros com os estudantes voluntários. No Capítulo III, esta etapa está detalhada, constando quais os passos de organização foram seguidos para viabilizar a aplicação dessa pesquisa.

2ª parte – elaboração e apresentação do Material de Apoio Didático:

Esta cumpriu normas estruturais propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, bem como, propõe integrar Música com os conceitos matemáticos, considerando as fases da Modelação Matemática sugeridas por Biembengut (2007): *Percepção e Apreensão; Compreensão e Explicitação; Significação e Expressão.*

1ª fase: Percepção e Apreensão: - Percepção no reconhecimento da situação-problema; - Apreensão na familiarização com o assunto a ser modelado. 2ª fase: Compreensão e Explicitação: - Compreensão na formulação do problema; - Explicitação na formulação do modelo matemático; e - Explicitação na resolução do problema a partir do modelo. 3ª fase: Significação e Expressão: - Significação na interpretação da solução; - Significação na validação do modelo →

avaliação;- Expressão do processo e do resultado → modelo (BIEMBENGUT, 2007).

A elaboração do Material de Apoio Didático se deu após o convite aos voluntários e à Instituição, assim, as atividades a serem aplicadas e a fundamentação do conteúdo matemático foi elaborado de maneira direcionada aos estudantes dispostos a participar da pesquisa, os quais já possuíam um conhecimento prévio sobre Música. Por este motivo alguns conceitos da teoria musical não demandaram demasiadas explicações. Contudo, é possível sua aplicação com estudantes que não possuem conhecimento em Música, sendo necessário maior número de aulas.

3ª parte – aplicação, descrição e organização dos dados:

Etapas realizadas com estudantes voluntários, os quais participam de oficinas de Instrumentalização de um Instituto designado como associação civil sem fins lucrativos, que envolve crianças e adolescentes e ensina-os a tocar instrumentos musicais. Trata-se de um projeto de integração social desses jovens no período em que estão fora da escola.

A forma como está organizada a apresentação dos dados, no Capítulo III, consistiu em classificar os dados obtidos segundo as três fases da Modelação Matemática em cada encontro, pois, Biembengut (2008) propõe não afastar um dado do outro, facilitando, assim, o entendimento e colaborando “para uma possível reorientação dos instrumentos ou do plano de levantamento dos dados além de evitar separações conceituais” (BIEMBENGUT, 2008, p.101).

- Mapa de Análise

Conforme Biembengut (2008), “o propósito de uma pesquisa centra-se na possibilidade de se compreender um fenômeno, um fato, para assim buscar meios para descrever e prever”. É neste sentido que a partir do Mapa de Análise busca-se compreender os dados e informações dentro do contexto vivificado (BIEMBENGUT, 2008, p.117).

A análise foi elaborada a partir das etapas vivenciadas anteriormente: do Mapa Teórico, o qual apresenta conceitos e definições e subsidia a compreensão e observação com resultados de pesquisas já realizadas sobre o tema; e, do Mapa de

Campo, a partir dos dados empíricos obtidos na aplicação do Material de Apoio Didático.

Neste Mapa de Análise está exposta a interpretação e avaliação dos entes envolvidos na pesquisa, com o intuito de “transformar dados e informações em conhecimento e saberes” e “determinar valor, julgar, apreciar” (BIEMBENGUT, 2008, p.120). Os dados analisados buscaram a compreensão do contexto vivificado. Biembengut (2008) ressalta que a “ação pedagógica expressa pelas pessoas, seja em documentos, seja nas interlocuções formais ou informais, são sempre subjetivas, independente do empenho do pesquisado em ser exato” (p.117).

Os dados empíricos são advindos das atividades pedagógicas com estudantes de Música voluntários do EM. A partir desses dados estabeleceu-se três categorias de análise com base no aporte teórico, a saber: **atenção**, **similaridade** e **relação**, buscando, assim, atingir o objetivo da pesquisa: *analisar a percepção matemática de estudantes do EM por meio da Modelação Matemática na Música*.

A pesquisa possui caráter qualitativo de análise de um grupo de estudantes sob um estudo de caso. Segundo Lüdke e André (1986), o estudo de caso é um estudo qualitativo, pois “se desenvolve numa situação natural, é rico em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma complexa e contextualizada” (p. 18). Assim, é a modalidade que favorece para adentrar na problemática da aprendizagem matemática a partir dos sujeitos informantes, isto é, estudantes voluntários do EM, na busca de argumentos para dar respostas às questões de pesquisa.

Trata-se de estudo de caso, pois, a pesquisa investiga, explora e descreve acontecimentos e contextos de uma sala de aula, enquanto se aplicam atividades baseadas na Modelação Matemática. Como exposto anteriormente, a questão que a pesquisa pretende responder é *Como a Modelação Matemática na Música pode favorecer a percepção matemática de estudantes de EM?* E, segundo Yin (1994), essa abordagem metodológica se adapta a investigações em Educação, quando o pesquisador busca resposta para o “como” e o “por que” e ainda, quando o objetivo é descrever e analisar um fenômeno de forma complexa e holística.

Algumas das características do estudo de caso, segundo Benbasat (*et al*, 1987), são: dados coletados a partir de diversos meios (observações, entrevistas, questionários, registros de áudio e/ou vídeo, diários, entre outros); uma ou mais entidades (pessoa, organização) são analisadas; os resultados dependem da

integração do pesquisador; a pesquisa busca respostas para questões do tipo “como” e “por que”, ao contrário de “o que” e “quantos”; entre outras.

A análise foi qualitativa devido à variedade de descrições e materiais empíricos e o enfoque interpretativo da realidade. Segundo Bogdan e Biklen (1994) a investigação qualitativa é utilizada como um termo genérico que agrupa diversos meios de investigação que partilham determinadas características. Compreende-se que “as questões a investigar não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis, sendo, outrossim, formuladas com o objetivo de investigar os fenômenos em toda a sua complexidade e em contexto natural” (p. 16).

Neste contexto de pesquisa qualitativa, o encaminhamento metodológico dessa pesquisa tratou-se de estudo de caso, uma vez que este enfatiza o conhecimento do fenômeno em sua particularidade, mas não impede de estar-se atento ao seu contexto e à sua dinâmica como um processo, uma unidade em ação, neste caso, o desempenho e a percepção dos estudantes do EM em Matemática.

CAPÍTULO II – MAPA TEÓRICO

Neste capítulo apresenta-se o Mapa Teórico, que consiste, segundo Biembengut (2008), em sustentar a pesquisa, no esclarecimento e compreensão a questão posta: *como a Modelação Matemática na Música pode favorecer a percepção matemática de estudantes de EM?*

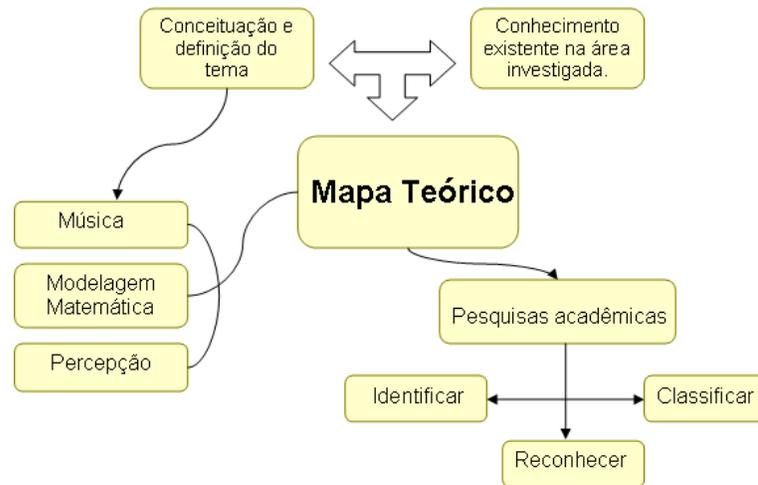
O Mapa Teórico proporciona “um vasto domínio sobre o conhecimento existente da área investigada” (BIEMBENGUT, 2008, p.90). Assim, pretendeu-se, nesse estudo, desenvolver meios adequados para compreensão da Modelagem Matemática como método de pesquisa utilizado no ensino da Matemática por meio da Música, buscando articular reflexões teóricas e ações cotidianas.

A primeira parte desse capítulo, denominada Referências-Guia: teorias suporte aborda os temas: Matemática e Música (tema da atividade pedagógica), Modelagem Matemática na Educação (tema da pesquisa), e Percepção (tema de análise), que foram bases da proposta de atividades pedagógicas e a análise dos dados empíricos obtidos.

Na segunda etapa, identificou-se quais conceitos e definições foram adotados nas pesquisas recentes sobre os temas afins. Esta fase é denominada Referências-Indicativas: produções acadêmicas. A segunda etapa do mapa teórico, segundo Biembengut (2008), evita o cúmulo de reproduções do conhecimento, pois, identificando e reconhecendo os dados registrados nas pesquisas recentes sobre o tema, deixa-se de reproduzir conhecimentos ora expostos e se passa a dar continuidade ao estudo em questão ou estuda-se algo novo.

A revisão das pesquisas acadêmicas foi composta da identificação das produções recentes por meio de palavras-chave e, mapeamento dos dados de cada pesquisa. Compôs o rol de produções: livros, artigos de revistas científicas, anais de congressos, dissertações de mestrado e tese de doutorado. Estas foram selecionadas segundo os critérios: ano de publicação (os mais recentes), qualidade e pertinência do texto. Apresenta-se nesta seção um mapa relativo a cada tema de estudo, informando o título, autor, universidade e ano de publicação das pesquisas, e, em seguida os resumos com os principais dados, pesquisadores e conceitos adotados. O capítulo se encerra com as considerações de pontos relevantes para análise.

Mapa 3: Mapa Teórico



Fonte: a autora

2.1 REFERÊNCIAS-GUIA: TEORIAS SUPORTE

Esta seção apresenta os principais conceitos teóricos pertinentes ao tema da pesquisa: Matemática e Música, Modelagem Matemática na Educação e, Percepção. Para amparar as experiências sobre a relação da Matemática com a Música, pautou-se na ideias dos autores: Howard Gardner, Oscar João Abdounur e Carlos Eduardo de Souza Campos Granja. O estudo do tema Modelagem Matemática na Educação teve por base as experiências pedagógicas, os conceitos e as definições propostas por Rodney Bassanezi, Maria Salett Biembengut, Werner Blum e Gabriele Kaiser. O tema de análise – Percepção – teve por base, principalmente, os estudos de Alexander Romanovich Luria, Michael Gazzaniga e Tood Heatherton, Linda Davidoff, Lucia Santaella e Robert Sternberg.

2.1.1 Matemática e a Música

Música é uma linguagem universal que segundo Bréscia (2003) esteve presente na história desde as primeiras civilizações, sendo utilizada em diversas ocasiões, como nascimento, morte, cura de doenças, casamento, plantio, fertilização, etc. Considera-se a Música como uma manifestação humana, seja esta agradável ou não para quem a produz ou escuta.

Estudos de historiadores referenciam inscrições e desenhos de instrumentos musicais em cavernas, comprovando que o homem se manifesta por meio da Música há muito tempo. “Existem registros da prática musical em civilizações já extintas, como a egípcia, a babilônica e a assíria, e em civilizações milenares, como a hindu e a chinesa” (GRANJA, 2010, p. 21).

Granja apresenta a Música da Grécia antiga com características que ultrapassam a dimensão sonora, pois, para esse povo o conceito de Música envolvia artes como a dança, a poesia, a filosofia e a metafísica. “A música, ou *mousiké*, estava inserida num complexo de atividades relativas não só à cultura, mas também à educação e ao conhecimento” (2010, p.25), para os gregos o ensino da Música era obrigatório.

Houaiss (apud Bréscia, 2003, p. 25) conceitua Música como a “[...] combinação harmoniosa e expressiva de sons e como a arte de se exprimir por meio de sons, seguindo regras variáveis conforme a época, a civilização etc.”. Da maioria das definições e conceitos encontrados sobre Música, desde os objetivos aos mais filosóficos, depara-se com as palavras *organização* ou *regras*. A determinação das regras para organizar os sons e silêncio que compõe a Música são relações matemáticas e físicas.

A relação da Matemática com a Música não é novidade e já foi tema de estudos e discussões. Segundo Abdounur, “os primeiros sinais de casamento entre a matemática e a música surgem no século VI a.C”, quando Pitágoras, por meio do monocórdio, efetua descobertas que gera outro ramo à Matemática: a Música (2003, p.4).

Segundo Granja (2010), Pitágoras relacionou a Música com a Matemática unindo a percepção e a razão. Gorman (apud Granja, 2010, p.30) afirma:

[...] ele (Pitágoras) evitava que seus discípulos se envolvessem, logo de início, em teorias abstratas concernentes à matemática e à música, mas fazia, primeiro, com que aprendessem a apreciar as sensações agradáveis, as belas cores e a beleza das formas e dos sons. Após demonstrar-lhes o poder da música no mundo material, explicou-lhes as razões matemáticas invisíveis dessas manifestações.

O instrumento criado por Pitágoras, o monocórdio, é composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma mesa, e um cavalete móvel para dividir a corda em duas seções. Segundo Abdounur (2003), Pitágoras testava relações de comprimentos para produzir intervalos sonoros. Investigou,

assim, a relação entre o comprimento de uma corda, ao vibrar, e o tom musical produzido por ela.

Essas experiências resultaram nas seguintes observações:

Pressionando um ponto situado a $\frac{3}{4}$ do comprimento da corda em relação a sua extremidade [...] e tocando-a a seguir, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira. Analogamente, exercida a pressão a $\frac{2}{3}$ do tamanho original da corda, ouvia-se uma quinta acima e a $\frac{1}{2}$ obtinha-se a oitava do som original (ABDOUNUR, 2003, p.5).

Assim como alguns matemáticos se interessaram e estudaram Música, músicos, como Bach¹, possuíam grande interesse pela Matemática. Bach compôs obras repletas de simetrias sem detrimento do conteúdo artístico. Segundo Granja (2010), a semelhança entre o pensamento matemático e o pensamento musical é a busca por padrões e regularidades, pois, enquanto a Matemática estuda a regularidade das formas e dos números, a Música busca a percepção das regularidades sonoras e temporais.

A linguagem musical fundamenta-se na articulação entre determinados padrões rítmicos, melódicos e harmônicos que podem ser percebidos e manipulados. O próprio som musical só é reconhecido como nota afinada devido a uma regularidade interna dos pulsos sonoros (GRANJA, 2010, p.99).

A aproximação da Música com a Matemática é antiga também na Educação. Estas disciplinas ocupavam lugar de destaque, fazendo parte de um dos currículos mais importantes da antiguidade, o *Quadrivium*, o qual era composto pelas disciplinas: Aritmética, Música, Geometria e Astronomia. A Aritmética e a Música eram agrupadas formando o ramo que tratava dos números enquanto a Geometria e a Astronomia tratavam das formas (GRANJA, 2010).

Segundo Aiub (2006), os conhecimentos eram divididos em disciplinas que compunham o *Trivium* e o *Quadrivium*. Enquanto que o *Quadrivium* referia-se às artes matemáticas, o *Trivium* correspondia às artes da linguagem – Gramática, Retórica e Dialética. Mesmo havendo uma distinção entre artes da linguagem e artes matemáticas, “essa divisão era somente metodológica, pois o universo era compreendido como totalidade, e a Educação grega atendia o ideal de

¹ Johann Sebastian Bach (1685 - 1750): cantor, compositor, cravista, pianista, cantor, maestro, organista, professor, violinista e violista oriundo do Sacro Império Romano-Germânico, atual Alemanha.

universalidade; à formação do cidadão grego cabia o domínio de todas as artes” (AIUB, 2006, p.108).

A partir das disciplinas do *Trivium* e do *Quadrivium* se disseminava o saber necessário para a sociedade, visando à formação do ser humano integral. Essa constituição do conhecimento continuou presente durante a Idade Média, a ponto da noção de totalidade ser entendida como o conceito de Deus. E, na Modernidade, marcada por contribuições como as de Galilei (1564-1642) e Descartes (1596 - 1650), “permite-se uma nova forma de constituição do saber: a física moderna. Ao invés de estudar um fenômeno inserido em seu entorno, [...], a física de Galileu trata os fenômenos isoladamente [...]” (ibid).

Uma das implicações da cisão metodológica, proposta por Descartes no Discurso do Método, foi a extrema fragmentação do conhecimento. Assim, as críticas ao excesso de racionalidade e a preocupação em compreender o ser humano contemporâneo, levaram à promoção da interdisciplinaridade. Esta, segundo Fazenda (1995, apud Aiub, 2006), mostra perplexidade diante da fragmentação do saber e busca alternativas que superam a racionalidade herdada.

Na medida em que as áreas do conhecimento foram fragmentadas em disciplinas no currículo escolar, gradualmente, a Música se distanciou da Matemática. Para Granja (2010) esse desaparecimento na escola reflete certa desvalorização da Música pela sociedade, tendo em vista que o conhecimento técnico-científico se sobrepôs ao conhecimento de natureza artística.

Na tentativa de conceber o ensino e a aprendizagem interdisciplinar propõe-se estabelecer o diálogo entre as disciplinas em uma perspectiva de contextualização. No que concerne à articulação entre diferentes áreas do conhecimento, cabe ressaltar a Teoria das Inteligências Múltiplas de Howard Gardner, na qual o autor defende uma visão pluralista da mente humana.

Gardner (1994) parte do conceito que o ser humano possui diferentes potenciais cognitivos e define sete tipos de inteligência: lógico-matemática, lingüística, corporal-cinestésica, espacial, intrapessoal, interpessoal e musical. O autor sustenta sua teoria na autonomia das diversas competências intelectuais, contudo, afirma que a configuração de inteligência de cada ser humano resulta da combinação entre as sete dimensões, tendo destaque na área de maior aptidão.

A relação entre a Matemática e a Música recebeu atenção especial de Gardner, o qual afirma:

há elementos claramente musicais, quando não de “alta matemática” na música: estes não deveriam ser minimizados. Para apreciar a função dos ritmos no trabalho musical o indivíduo deve ter alguma competência numérica básica. [...] Meu palpite é que estas analogias provavelmente podem ser encontradas entre duas quaisquer inteligências e que, de fato, um dos grandes prazeres em qualquer área intelectual se deve a uma exploração do seu relacionamento com outras esferas da inteligência (1994, p.98).

A aplicação da Teoria das Inteligências Múltiplas na educação implica em “proporcionar um desenvolvimento harmonioso do amplo espectro de inteligências de cada pessoa, evitando a supervalorização de uma ou outra inteligência em detrimento das demais” (GRANJA, 2010, p.89).

Propondo a articulação entre diferentes áreas do conhecimento na educação, Granja (2010) analisa algumas articulações entre a inteligência musical e as demais inteligências, entre elas apresenta a musical e a lógico-matemática:

tanto o pensamento musical como o matemático têm em comum a busca por padrões e regularidades. Na música, a regularidade se apresenta no ritmo, na harmonia ou na estrutura de compassos, por exemplo. A matemática busca as regularidades numéricas, as proporções geométricas constantes, entre outros. Ambas as linguagens utilizam símbolos e convenções próprios. A própria notação musical tem uma estrutura lógico-matemática por base (p.92).

A relação da Matemática com a Música possui um caráter didático nessa dissertação, na medida em que a partir de um contexto musical, mostra-se a possibilidade de explorar conceitos e conteúdos matemáticos sob uma perspectiva interdisciplinar, com um único fim: ensinar Matemática atribuindo significado a cada conteúdo.

A partir da Modelagem Matemática, propõe-se o ensino e a aprendizagem dos conceitos de progressão geométrica, logaritmos, função exponencial e trigonometria, abordados em contextos musicais, utilizando-se atividades que integram as duas áreas do conhecimento.

Ao vincular a Matemática à realidade dos estudantes, por meio da Modelagem, busca-se facilitar a compreensão de conteúdos matemáticos e desenvolver habilidade para formular e solucionar problemas integrando os conhecimentos teóricos a diferentes áreas.

2.1.2 Modelagem Matemática na Educação – Modelação

Em diversos momentos do cotidiano, em busca da qualidade de vida, o ser humano é desafiado a solucionar problemas, é estimulado a criar, a buscar novas representações que solucionem novos problemas. E, em grande parte das criações e das representações o conhecimento matemático se faz presente, seja em problemas simples ou em grandes invenções.

Na busca pela solução para os problemas da realidade, recorre-se aos conhecimentos primitivos, às ideias intuitivas e elementares sobre o assunto. E quando estes conhecimentos são insuficientes para a solução do problema, buscam-se novos conceitos, concebem-se outros conhecimentos, associam-se ideias levando o ser humano à compreensão, à criação de um modelo que solucione o problema.

Segundo Bassanezi (2006), ao transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real, envolve-se em um processo dinâmico de elaboração de um modelo matemático que traduz e interpreta a situação real de modo a representar objetos ou símbolos que solucionam o problema apontado. Esse processo, conforme defende Bassanezi (2006) e Biembengut (1990) é chamado de Modelagem Matemática (MM).

Um modelo permite a produção de algo novo, trata-se de um propósito que remete a um objeto, por meio da expressão da percepção das experiências. Biembengut (2009) define modelo como “um sistema de símbolos arbitrários, mediante os quais cooperam e atuam entre si os elementos de um fenômeno”. Segundo Blum (2007), construir e utilizar um modelo é resolver problemas do mundo real, um problema que descreve, explica ou desenha partes do mundo.

quando se procura refletir sobre porção da realidade, na tentativa de entender ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: modelo (BASSANEZI, 2006, p. 19).

A MM é categorizada por Biembengut (no prelo) em *Modelagem Matemática Física* e *Modelagem Matemática Simbólica*. Sendo que a primeira refere-se à expressão física, à “reprodução e/ou na descrição de um conjunto de dados ou de

imagem ou um ente físico”, resultando em um modelo de escala – desenho e/ou replica – ou de analogia – representação gráfica e/ou algébrica. A categoria *Modelagem Matemática Simbólica* refere-se à expressão abstrata de um conjunto de dados, ou seja, “constitui em um processo envolvido na compreensão e na análise de um conjunto de dados de um ente físico (produto ou processo), da natureza ou do ambiente social” (BIEMBENGUT, no prelo). Este modelo requer uma teoria matemática ou de áreas envolvidas.

O processo para a obtenção do modelo – Modelagem – é um método de pesquisa que busca traduzir problemas da realidade para descobrir alguma solução ou criar e/ou aprimorar algo (BIEMBENGUT, 2004). Para modelar situações-problemas as etapas seguidas são as mesmas da pesquisa científica, a saber:

1º) reconhecimento da situação-problema → delimitação do problema; 2º) familiarização com o assunto a ser modelado → referencial teórico; 3º) formulação do problema → hipótese; 4º) formulação de um modelo matemático → desenvolvimento; 5º) resolução do problema a partir do modelo → aplicação e interpretação da solução; 6º) significação na interpretação da solução; 7º) validação do modelo → avaliação; e 8º) expressão do processo e do resultado → modelo” (BIEMBENGUT, 2004).

A MM permite integrar as questões da realidade com a linguagem matemática e, assim, “formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias” (BIEMBENGUT, 2009, p.13).

A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão (BASSANEZI, 2006, p.17).

Segundo Bassanezi, MM, “consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (2006, p.16). Pressupondo que se abordem áreas diversas de pesquisa e potencialize a utilização da Matemática em cada uma destas áreas ao aplicá-la em problemas reais.

Blum (2007) utiliza o termo Modelagem ao tratar de um problema externo a Matemática (a princípio), o qual será solucionado utilizando-se de conhecimentos matemáticos, conhecidos ou não. O autor ilustra com a pergunta: “Onde posso

encontrar a matemática que me ajudará com este problema?”. Ou seja, a realidade é o ponto de partida para fazer Modelagem.

Segundo os PCN+ da área de Ciências Naturais, Matemática e suas Tecnologias, é objetivo da disciplina de Matemática reconhecer a natureza de uma situação ou problema e, “situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática” (BRASIL, 2012, p.115), fomentando a validade dos conteúdos que compõe a grade curricular da disciplina e o desenvolvimento de competências para a aplicação da Matemática.

As Diretrizes Curriculares de Matemática abordam a MM como uma tendência metodológica da Educação Matemática, a qual fundamenta a prática docente. Este documento pressupõe a problematização de situações do cotidiano do estudante por meio da MM e afirma que “o trabalho pedagógico com a modelagem matemática possibilita a intervenção do estudante nos problemas reais do meio social e cultural em que vive” (DCE, 2008, p.65).

A MM quando aplicada na Educação Matemática, tem sido defendida como alternativa didática e pedagógica que vincula a Matemática à realidade, que integra diferentes áreas do conhecimento na solução de problemas e, que alia a teoria com a prática. Sendo que, aliar a teoria com a prática é finalidade do ensino, proposta em lei, de modo que os estudantes compreendam os fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos (LDB 9394/96, art.35).

As Orientações Curriculares para o EM – instrumento elaborado para apoiar a prática docente em favor do aprendizado – defendem a MM como caminho para ensinar Matemática, que considera a vivência, a observação, a experiência e a interpretação do estudante ao apresentar situações problemáticas. Possibilitando, assim, “o rompimento do estudo baseado em um currículo linear” (BRASIL, 2006, p.85).

A MM é um método de pesquisa que capacita os estudantes a formular e a resolver um problema e ao mesmo tempo a estudar os conceitos matemáticos envolvidos nesta resolução. Ao escolher o tema o professor e os estudantes desenvolvem questões as quais serão resolvidas por meio de ferramentas matemáticas e das pesquisas que envolvem o próprio tema, conferindo “significativo conhecimento seja na forma de conceitos matemáticos, seja sobre o tema que se estuda.” (BIEMBENGUT, 2009, p. 28).

Blum (2007), ao defender a presença de aplicações e modelos na Educação Matemática, justifica que estes tornam os estudantes “capazes de usar a matemática em vários contextos e situações fora da sala de aula”, criando significado e compreensão à disciplina.

Existem diferentes concepções e tendências para a MM na Educação, sendo defendidas em eventos e publicações sobre o tema, as quais são baseadas no conhecimento, experiências e estudos de cada pesquisador. Blum, Niss e Galbraith (2007), classificaram em três fases as pesquisas e produções sobre Modelagem Matemática na Educação, apresentadas particularmente em conferências internacionais como ICME – *Conferência Internacional de Educação Matemática e ICTMA – Conferência Internacional no Ensino de Modelagem Matemática e Aplicações*: - *sugestão* (1965 – 1975): as pesquisas sugerem que sejam incluídas na Educação Matemática a modelagem e aplicações; - *desenvolvimento* (1975 – 1990): desenvolveram-se currículos e materiais que circundam os componentes de modelagem e aplicações; - *madureza* (desde 1990): nesta fase as pesquisas abrangem a ênfase teórica das fases anteriores.

A partir da literatura existente gerada por conferências internacionais (ICME e ICTMA), Kaiser e Sriraman (2010), classificam as abordagens de modelagem na Educação Matemática indicando cinco perspectivas e uma meta-perspectiva no âmbito de modelagem:

- *Modelagem Realista* ou aplicada: tem como objetivo central resolver situações do “mundo real”, em uma perspectiva pragmática, fomentando o desenvolvimento de habilidades específicas para resolução de problemas práticos;

- *Modelagem Contextual*: os objetivos são ligados às metas psicológicas; debate experiências e problemas do cotidiano escolar;

- *Modelagem Educacional*: o objetivo central é pedagógico, buscando a promoção e a estruturação da aprendizagem, e a capacidade dos estudantes relacionarem a Matemática com a realidade;

- *Modelagem Sócio-Crítica*: o objetivo é centrado em compreender criticamente a relação entre a Matemática e a sociedade;

- *Modelagem Epistemológica* ou Teórica: objetivo principal é promover o desenvolvimento teórico da Matemática e relacioná-lo com atividades de Modelagem.

- *Modelagem Cognitiva*: esta perspectiva é descrita como uma meta-perspectiva voltada à pesquisa, e possui objetivos de investigação e compreensão dos processos cognitivos da modelagem.

Baseada em produções em Anais e eventos brasileiros de Modelagem Matemática na Educação, Biembengut (2012), identificou, por meio das expressões dos autores, três concepções de MM, denominadas de:

- *método de pesquisa*: o estudante aprende Matemática a partir de temas de áreas diversas, aprendendo, ao mesmo tempo, a fazer pesquisa. Objetivo: ensino com pesquisa;

- *alternativa pedagógica*: aborda a modelagem como alternativa para motivar o estudante e instigar o interesse em aprender Matemática. Objetivo: aprendizagem matemática;

- *ambiente de aprendizagem*: foca na questão social. Objetivo: refletir, discutir e analisar questões sociais por meio dos procedimentos da MM.

Segundo a autora, as concepções são distintas, entretanto

convergem no entendimento de que a MM possa contribuir não somente para aprimorar o ensino e a aprendizagem matemática, como também para provocar uma reação e interação entre corpo docente e discente envolvidos na contínua e necessária produção do conhecimento. Uma partilha mútua de experiências (ibid.)

Com o uso da modelagem em sala de aula os estudantes aprendem a pesquisar, dominar diferentes meios de acesso à informação, e principalmente desenvolvem a capacidade de validar informações importantes, a partir de um tema de seu interesse.

A integração da MM como método de ensino em qualquer nível escolar em cursos regulares é definida por Biembengut (2009) como *Modelação Matemática*². Sendo um método que sugere que os estudantes resolvam situações externas à sala de aula e desenvolvam habilidades integradas com diversas áreas do conhecimento, possibilitando que o estudante faça pesquisa e ao mesmo tempo domine o conteúdo programático, uma vez que os objetivos fundamentais da Modelação são “proporcionar ao aluno melhor apreensão dos conceitos matemáticos; capacidade para ler, interpretar, formular e resolver situações-

² Nessa dissertação adota-se o termo Modelação Matemática para todas as ocorrências que se referem à Modelagem Matemática na Educação.

problemas e, também despertar-lhes o senso crítico e criativo” (BIEMBENGUT, 2004, p.30).

Faz-se Modelação ao perpassar por todas as fases da Modelagem na Educação formal, o que implica em ensinar os estudantes a fazer pesquisa. E, como não se faz pesquisa sem conhecimento, é adaptando o conteúdo das disciplinas ao processo que se promove o conhecimento aos estudantes (BIEMBENGUT, no prelo).

Biembengut (2007) agrupa as etapas que conduzem o processo de modelar em três fases e denomina-as de percepção e apreensão, compreensão e explicitação e significação e expressão:

1ª: Percepção e Apreensão.

Consiste em apreender a situação-problema, percebendo os entes envolvidos. É a fase em que os estudantes tendem a sentir-se motivados e interessados em aprender o tema em questão. E, para isso, faz-se um estudo detalhado sobre o problema, de modo direto ou indireto, ou seja, por meio de experiências, entrevistas, dados de campo, por meio de publicações, bem como a apresentação de imagens ilustrativas, vídeos, documentários, etc.

Os momentos da primeira fase são resumidamente: (i) a familiarização com o tema por meio da busca de dados; (ii) o levantamento de questões sobre o tema; (iii) a seleção das questões levantadas pelos estudantes, as quais devem cumprir com o conteúdo programático; (iv) e, o levantamento de dados sobre o assunto. A partir do estudo do tema, feito nesta primeira etapa, os estudantes buscam dados relevantes para solucionar a situação-problema da pesquisa que se inicia.

2ª: Compreensão e Explicitação.

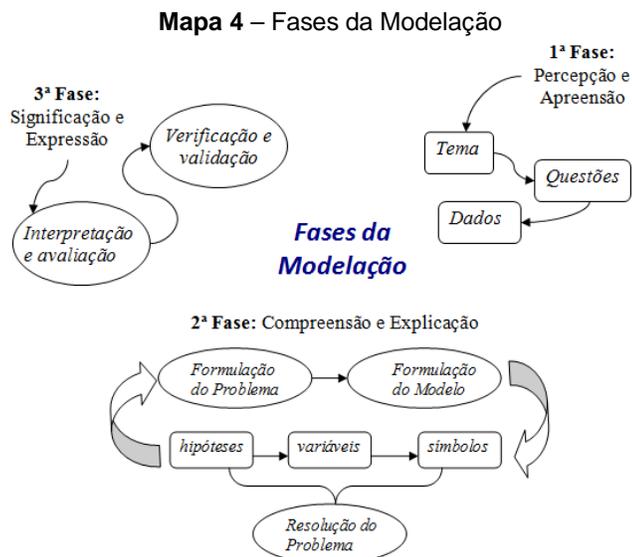
Esta fase é de formulação do problema, da formulação do modelo e da resolução do problema a partir do modelo. É a fase, considerada pela pesquisadora, mais desafiante, pois, é nesta fase que os conteúdos curriculares e não curriculares são ensinados e as avaliações são aplicadas, contando com apresentações de exemplos análogos. Para compreensão do problema, classificam-se as informações relevantes, formulam-se as hipóteses, identificam-se as constantes e variáveis, selecionam-se os símbolos apropriados e descreve-se o modelo, que é o objetivo principal desta fase para chegar à solução do problema.

Há quatro subfases propostas para a segunda fase, são elas: (i) formulação do problema, de modo que seja necessária a utilização do conteúdo curricular para sua solução; (ii) apresentação do conteúdo curricular, fazendo elo com o problema gerado; (iii) apresentação de exemplos análogos para ampliar o campo de aplicações; (iv) formulação do modelo e resolução do problema a partir deste. Após esta fase os estudantes devem possuir a compreensão dos conceitos matemáticos e da necessidade destes na disposição do modelo, bem como possuir capacidade para aplicar estes conceitos em situações semelhantes.

3ª: Significação e Expressão.

Após a aplicação na etapa anterior efetua-se a interpretação e avaliação dos resultados bem como verificação da relevância da solução, indicando se é ou não significativa e adequada à situação, ou seja, a validação do modelo. Em seguida, a expressão do modelo (forma oral ou escrita) para outros grupos, como a própria sala de aula ou demais colegas da escola.

Os momentos para cumprir a última fase são: (i) a interpretação da solução por cada grupo de estudantes, permitindo melhor compreensão dos resultados; (ii) e, a exposição da pesquisa realizada, expressando para a os demais o aprendizado e os resultados obtidos. Espera-se nesta etapa o reconhecimento e valorização do trabalho realizado, levando o estudante a sentir-se motivado com o método de Modelação.



Fonte: a autora

Ao utilizar a Modelação como método de ensino o professor depara-se com uma série de fatores que influenciam no processo, como por exemplo, o currículo escolar, o horário disponível, os conhecimentos prévios dos estudantes, o número de estudantes, entre outros. Isso requer planejamento e elaboração de meios para a utilização da Modelação como prática nas aulas.

A escolha do tema é um dos passos propostos por Biembengut (2009) para seu planejamento, a qual pode ser feita pelo professor ou pelos estudantes. Essa decisão, geralmente, depende da disponibilidade do professor para aprender e ensinar o tema sugerido pelos estudantes. A intervenção do professor na escolha do tema é fundamental, na medida em que este avalia se há condições suficientes para conduzir o processo de maneira a desenvolver, no mínimo, o conteúdo programático.

Segundo Bassanezi, na Modelação “o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas, caminhar seguindo etapas em que o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado” (BASSANEZI, 2006, p.38). Oportunizando a pesquisa e investigação, aprofundamento de um tema que está ou não explícito, resultando na interação do estudante no processo do conhecimento.

E é na etapa da formulação de um modelo matemático que o professor insere o conteúdo do currículo escolar, contextualizado com o tema escolhido e apresentando exemplos análogos, a fim de aprimorar a apreensão dos conceitos pelos estudantes. E ao cumprir estas etapas no ensino “é dada ao estudante a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, instigando seu interesse e aguçando seu senso crítico e criativo” (BIEMBENGUT, no prelo).

Para efeito desta pesquisa utiliza-se da Modelação Matemática para abordagem do tema Música, e assume-se a proposta como método de pesquisa levando os estudantes a adquirirem conhecimentos de Matemática e das demais áreas envolvidas com este tema, capacitando-os de forma a ler, interpretar, representar e resolver situações-problema.

2.1.3 Percepção

O tema proposto nesta seção subsidia o entendimento para o alcance do objetivo geral desta pesquisa que visa *analisar a percepção matemática de estudantes do EM por meio da Modelação Matemática na Música*. O foco do estudo ao conceituar *percepção* é indicar as relações entre *percepção* e os *sentidos*, *percepção* e as tendências inatas: *aprendizagem* e *maturação*.

Segundo o Dicionário de Filosofia (ABBAGNANO, 2000, p.753) o termo *percepção* possui três significados principais:

i) *percepção* como atividade cognoscitiva. Neste significado, *percepção não se diferencia de pensamento*;

ii) *percepção*, “o ato ou a função cognoscitiva à qual se apresenta um objeto”; significado relacionado direto ao *conhecimento empírico do objeto real*;

iii) *percepção*, ação determinada pela pessoa em suas relações com o ambiente; *percepção como ato de interpretar os estímulos*.

As teorias psicológicas atribuem à *percepção* o terceiro significado, pelo qual discutem o *problema da percepção*.

Na psicologia este tema é baseado em generalizações experimentais que dependem tanto do meio quanto da pessoa que percebe. Os fatores determinantes da *percepção* são classificados por Braghirolli (et al, 1990) em: *mecanismos do percebedor*, *características dos estímulos*; e, *estado psicológico de quem percebe*.

Os *mecanismos do percebedor* (órgãos receptores, nervos condutores e cérebro) são estudados e aprofundados pela *fisiologia humana*, uma vez que esta área se aprofunda no processo de funcionamento e disposição das partes do organismo. Já as *características dos estímulos* e o *estado psicológico* de quem percebe algo são temas da psicologia e, serão aprofundados nesta seção, buscando-se fazer um estudo dos fatores que tratam das condições externas e internas ao percebedor, o que significa discutir as diferenças entre o que está no mundo e o que experimenta-se como estando no mundo.

Nesta seção busca-se compreender qual relação existe entre a *percepção* e a experiência da pessoa que percebe algo. Ou seja, compreender como os processos perceptivos interagem com os processos cognitivos. Está dividida em quatro subseções: (1) As sensações como fonte de conhecimento; (2) O Problema da Percepção; (3) Abordagem Gestáltica à Percepção; (4) Percepção Auditiva.

As sensações como fonte de conhecimento

Para compreender a *percepção*, Luria (1991) parte do estudo das sensações, ou seja, das informações obtidas por meio dos órgãos dos sentidos, pelas quais o ser humano cria cada representação mental do mundo. Qualquer atividade consciente, segundo Luria, depende dos estímulos ocasionados pelos órgãos dos sentidos, das informações que chegam ao cérebro humano. Este mecanismo de recepção de informações e estímulos externos captados pelos órgãos dos sentidos e transmitidos ao cérebro é entendido como *sensação*.

As sensações constituem a fonte básica dos nossos conhecimentos atinentes ao mundo exterior e ao nosso próprio corpo. Elas representam os principais canais, por onde a informação relativa aos fenômenos do mundo e ao estado do organismo chega ao cérebro, permitindo ao homem compreender o meio ambiente e o seu próprio corpo (LURIA, 1991, p.1).

Para ele, a sensação é a forma mais elementar de transmissão de informações e estímulos do meio exterior. É por meio das sensações que o ser humano recebe indícios do estado do seu organismo diante de alguma situação, o que faz com que se compreendam os fatos do meio externo. E, para serem compreendidos pelo cérebro, os estímulos externos precisam ser codificados de maneira a traduzir “as propriedades físicas de um estímulo em impulsos neurais” (GAZZANIGA e HEATHERTON, 2005, p.147). Esse processo de codificação sensorial transforma os estímulos do mundo em atividade neural do cérebro.

Os órgãos dos sentidos (ouvido, olhos, nariz, língua e pele) são sensíveis “a diferentes estímulos físicos, e cada um contribui com informações diferentes” (GAZZANIGA e HEATHERTON, 2005, p.146). Contudo, os órgãos sensoriais não reagem a certas influências exteriores, havendo uma limitação na atividade neural do cérebro para determinados estímulos do mundo, como por exemplo, algumas ondas luminosas ou sonoras que não podem ser vistas ou ouvidas pelo ser humano. E, como afirma Luria, esse fato possui explicação biológica, pois, “se o homem percebesse com o ouvido oscilações ultrassônicas, suas percepções auditivas seriam acrescidas de muitos ruídos excessivos que dificultariam a distinção de excitações sonoras essenciais” (1991, p.6).

Essas condições externas do meio são características do estímulo que influenciam determinantemente a percepção humana, de modo a conferir significado

às informações recebidas pela sensação, organizando-as e interpretando-as. Existem alguns fatores que influenciam a percepção de estímulos e um destes fatores é a *atenção*.

A *atenção* é uma seleção de estímulos incidentes da qual dependem os fenômenos sensoriais que estão dentro do limite da atividade neural do cérebro. Ou seja, as sensações que os órgãos são capazes de captar são influenciadas pelo grau de atenção que é destinada a elas (DAVIDOFF, 2001).

A natureza da atenção é discutida por psicólogos como Ulric Neissar (1976) como um aspecto da percepção que requer seletividade. Como por exemplo, a escolha de qual conversa se concentrar em uma festa, o que implica em escutar apenas zumbidos de outras e ter uma vaga consciência de que há mais pessoas conversando sobre outros assuntos que desconhece (DAVIDOFF, 2001).

A atenção que se dedica a certa tarefa pode depender da experiência que se possui para realizá-la, ou seja, quanto mais prática se tem em realizá-la, a ponto de torná-la automática, menos atenção é transferida para essa prática e mais tarefas poderão ser realizadas ao mesmo tempo.

A seleção de fatores que influenciam a atenção é consequência do conhecimento que se tem a cada fato vivenciado, pois, a atenção costuma ser atraída por dados informativos que são “novos, inesperados, intensos ou mutantes” (DAVIDOFF, 2001, p.144). Além disso, “necessidades, interesses e valores são também importantes influências sobre a atenção” (*ibid*, p.145). Como exemplo, pode-se tomar uma situação de aula em que o professor não nota o sinal do seu fim por estar concentrado em sua exposição, enquanto o estudante que anseia pelo almoço fica bastante atento e estará consciente do sinal.

Da mesma forma como a atenção é atraída por fatos novos e inesperados, o ser humano ignora ou não presta mais atenção em fatos que são repetitivos, constantes ou conhecidos. O que ocorre, segundo Luria (1981) é que quando se entra em uma sala e ouve-se algum barulho alto demais ou um zumbido desagradável o cérebro diminui a taxa de processamento deste fato, acostumando-se e tornando-o previsível e estereotipado. Dessa maneira que o cérebro é liberado para outras tarefas.

O estilo de atenção humana tem valor de sobrevivência. Dedicar-se “atenção mínima a eventos rotineiros e regulares e atenção máxima a mensagens que não podem ser ignoradas com segurança”. Isso implica que não se atenta a tudo a todo

momento, pois, assim, “indícios importantes poderiam ficar perdidos em meio ao acúmulo de informação” (DAVIDOFF, 2001, p.145).

Ao relacionar a atenção com a *percepção* e a tomada de consciência, nota-se que pode haver percepção sem atenção e sem que se tome consciência:

Uma experiência comum sugere que as pessoas frequentemente percebem sem atentar ou tomar consciência. Ao dirigir nota-se que é possível ir de um lugar para outro sem ter depois a menor lembrança do trajeto. É como se um piloto automático estivesse ligado. Não obstante, absorveu-se e processou-se informações sobre as condições do trajeto (DAVIDOFF, 2001, p.145).

Problema da Percepção

Segundo Luria (1991), compreender a *percepção* como significados atribuídos às sensações por meio da experiência anterior contrapõe a filosofia idealista que parte do pressuposto de que a consciência e a razão são propriedades primárias e inexplicáveis do espírito humano e afirma que a realidade que se encontra fora da própria mente não é cognoscível pela percepção sensorial. Ou seja, a filosofia idealista faz parte do paradigma cartesiano e refuta a tese de que o contato do ser humano com o mundo exterior parte das sensações.

Do ponto de vista do empirismo³, entretanto, o conhecimento humano é adquirido por meio dos sentidos, da experiência. A sensação é a fonte de conhecimento humano e a condição fundamental do desenvolvimento psíquico da pessoa que permite “perceber os sinais e refletir as propriedades e os indícios dos objetos do mundo exterior e dos estados do organismo” (LURIA, 1991, p.2).

Essas ideias instigam discussões sobre o *problema da percepção*: o que ocorre dentro da consciência da pessoa ao perceber algo; e não apenas no que constitui o ato físico em si de perceber. Pois, os órgãos sensoriais explicam os fatores sensórios da *percepção*, “mas não são capazes de explicar porque toda percepção adiciona algo ao percebido, algo que não está lá fora, no mundo fenomênico, e que não faz parte, portanto, da estimulação” (SANTAELLA, 1998, p.22). Os órgãos sensoriais são estimulados a perceber algo, entretanto toda

³ Empirismo é uma posição epistemológica da origem do conhecimento a qual defende que “a única fonte do conhecimento humano é a experiência. Na opinião do empirismo não há qualquer patrimônio *a priori* da razão. A consciência cognoscente não tira os seus conteúdos da razão; tira-os exclusivamente da experiência. O espírito humano está por natureza vazio; é uma *tábua rasa*, uma folha em branco onde a experiência escreve. [...] A criança começa por ter percepções concretas. Com base nessas percepções chega, paulatinamente, a formar representações gerais e conceitos” (HESSEN, 1980, p.68).

percepção adiciona algo ao percebido, elaborando a síntese e atribuindo-lhe compreensão e significado.

Gibson (apud Santaella, 1998), afirma que

Se tudo o que percebemos nos chega mediante a estimulação dos nossos órgãos sensoriais, e se, apesar disso, certas coisas não têm, contraparte na estimulação, é necessário assumir que estas últimas são, de algum modo, sintetizadas. Como essa síntese ocorre, é o problema da percepção.

A teoria do idealismo “foi a fonte de um profundo equívoco cuja essência se torna cada vez mais evidente com as sucessivas conquistas da ciência” (LURIA, 1991, p.4). As teorias apresentadas tanto pelos filósofos como psicólogos cientistas, conforme Santaella são de que a mente tem potencial próprio para compreender o mundo a partir dos sentidos, ou seja, a ciência contribuiu na defesa de que as ideias humanas são aprendidas e não implantadas na mente por alguma força divina (SANTAELLA, 1998).

Defende-se, portanto, que os processos dos quais as pessoas refletem indícios do mundo, fontes básicas da informação, são executados por órgãos dos sentidos.

Abordagem Gestáltica à Percepção

Segundo Santaella (1998), a *Gestalt* (do alemão, “forma”, interpretado como as características do objeto) busca responder como o ser humano vê as formas, caracterizando a organização perceptiva. Psicólogos da *Gestalt* (Max Wertheimer, Christian von Ehrenfels, Felix Krüger, Wolfgang Köhler e Kurt Koffka) postularam que a *percepção* é mais do que a soma de sensações individuais constituintes, ou seja, o todo é maior do que a soma das partes. “As formas parecem ocorrer espontaneamente na percepção, através de uma organização sensória relativamente espontânea” (ibid).

Isso significa que, segundo os psicólogos gestálticos, o cérebro humano utiliza-se de princípios inatos e organizadores das informações sensoriais e, é por este motivo, que o ser humano percebe, por exemplo, um violão sendo o oposto de cordas, madeiras, parafusos.

De acordo com a lei de Prägnanz gestáltica, tendemos a perceber qualquer arranjo visual dado (i. e., tudo que estamos vendo) em um modo que organiza, de forma mais simples, os elementos discrepantes numa forma estável e coerente, em vez de como uma miscelânea de sensações ininteligíveis e desorganizadas (STERNBERG, 2000, p.120).

Os gestaltistas “postularam que, na própria estimulação sensória, já há uma síntese, de modo que o estímulo não explica o todo”. Ou seja, a sensação não é atomizada e, “se somarmos todos os estímulos que recebemos do mundo, o resultado é maior do que essa soma. Alguma coisa existe da qual a soma não dá conta” (SANTELLA, 2000, p.28).

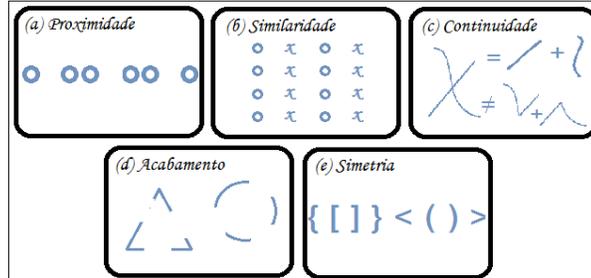
Na abordagem gestáltica à *percepção* da forma, o cérebro humano possui a capacidade de organizar informações de objetos que estão ocultos parcialmente distorcidos, extraindo, assim, significado das informações recebidas. Por exemplo, quando um prato está sobre a mesa, é possível perceber a continuidade dessa mesa e não sua interrupção ou falhas no local onde se encontra o prato. De maneira semelhante, ao chegar a um local qualquer, percebe-se um ambiente coerente, contínuo, onde alguns objetos se destacam e outros são definidos como plano de fundo.

Sternberg (2000, p.121) afirma que os princípios gestálticos da *percepção* da forma para a organização dos estímulos resumem-se em: **figura-fundo**; **proximidade**; **similaridade**; **acabamento**; **continuidade**; e **simetria**. “Visto que cada um deles ilustra como tendemos a perceber arranjos visuais em maneiras que organizam com mais simplicidade os elementos discrepantes em uma forma estável e coerente”.

No mapa 5, a seguir, Sternberg (2000) busca exemplificar, a partir dos princípios gestálticos, as tendências de organização que as pessoas possuem ao receber alguns estímulos: (a), representa a tendência em observar os objetos que estão próximos, como se formassem grupos; (b) mostra que os princípios gestálticos defendem que as pessoas percebem inicialmente as linhas verticais dos objetos ao invés das horizontais, baseando-se em suas similaridades; em (c), apresenta-se a tendência do cérebro humano em perceber as linhas de forma contínua e harmoniosa, ignorando o ponto de interseção das mesmas. Segundo o autor, as formas tendem a ser percebidas em seu caráter mais simples; em (d), exemplifica-se que embora não esteja desenhada uma área triangular e outra circular é exatamente o que as pessoas percebem, tendendo a completar as figuras de modo que formem

figuras mais total, fácil, natural ou conhecida, e; em (e), representa-se a tendência das pessoas em perceber a simetria em torno do centro de cada objeto.

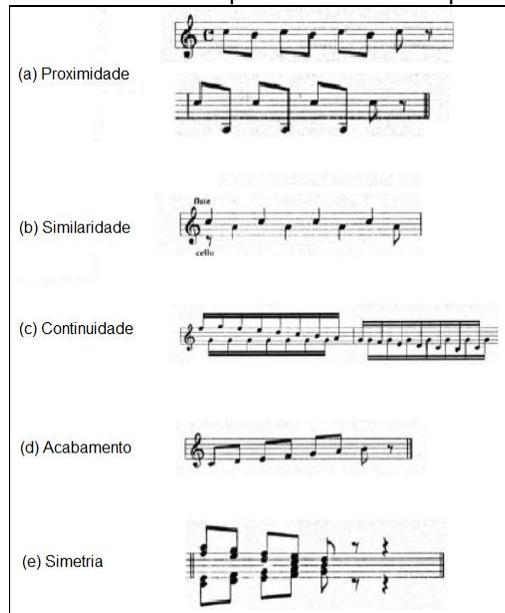
Mapa 5 – Ilustração dos Princípios Gestálticos da Percepção



Fonte: STERNBERG R. J. Psicologia Cognitiva. 2000

Lipscomb (apud Hodges, 1999) aplica os princípios gestálticos da percepção na música, buscando fundamentar que a Música é percebida na organização sonora, e não em cada nota. Assim, a *Gestalt* é aplicada na música para a interpretação desses processos organizacionais, conforme apresenta o mapa 6.

Mapa 6 – Leis da Gestalt aplicadas na música por Lipscomb



Fonte: Hodges, 1999, p.145.

Baseada em princípios da Teoria da Gestalt a percepção auditiva organiza as informações recebidas por meio do som. Sobre os significados e os elementos do som, Tenney e Polansky exemplificam:

Uma peça musical não é apenas um fluxo de sons elementares, e sim uma rede organizada hierarquicamente de sons, motivos, frases, passagens, seções movimentos, etc. – por exemplo, intervalos temporais cujos limites perceptivos são amplamente determinados pela natureza dos sons e as relações que se produzem entre eles (1980, p. 205).

Ou seja, a partir da aplicação da teoria da *Gestalt* na Música, Tenney e Polansky mostram que a compreensão musical não é o mesmo que perceber sons isolados, mas sim, agrupar estímulos em padrões e relacionar esses padrões uns com os outros.

Percepção Auditiva

Essa seção trata das propriedades dos sons e de como as pessoas os percebem e os diferenciam de “altos”, “baixos”, “graves”, “agudos”, entre outras distinções.

O ser humano é rodeado por estímulos, os quais são captados pelos órgãos dos sentidos e provocam alguma resposta particular, seja da visão, da audição, do olfato, do tato ou do paladar. Segundo Gazzaniga e Heatherton (2005), a percepção de estímulos é dividida em três etapas: o estímulo físico, o impulso neural e, o processamento.

Primeiro, um estímulo físico invade os receptores de um órgão dos sentidos. Segundo, uma resposta fisiologia no órgão do sentido transduz a energia do estímulo em um código elétrico – um impulso neural – que é carregado para o cérebro. Finalmente, esse código é processado no cérebro, resultando em uma experiência psicológica: a percepção de imagem visual, som, gosto ou cheiro. **Tradicionalmente, as primeiras duas partes são consideradas sensação, enquanto a terceira é percepção** (grifo nosso, GAZZANIGA e HEATHERTON, 2005, p.152).

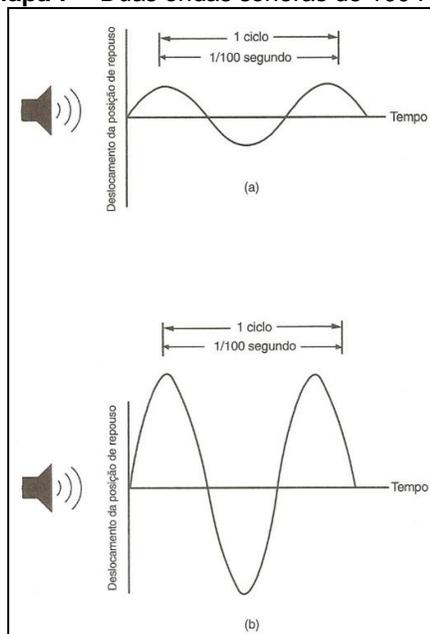
A audição é um dos sentidos humanos considerada como sentido de distância, uma vez que não requer contato direto com os estímulos para ocorrer a sensação, o que é necessário nos sentidos de proximidade (tato e paladar). Esse estímulo proximal da audição é o som, que é um movimento físico de perturbação e deslocamento do ar.

Ao ouvir uma pessoa falando e as cordas vocais vibrando, ocorre a agitação das partículas de ar, as quais empurram as partículas que estão próximas, logo cada uma vibra em torno de sua posição original. “À medida que as sucessivas variações na pressão perturbam o meio aéreo, a perturbação viaja na forma de onda. A

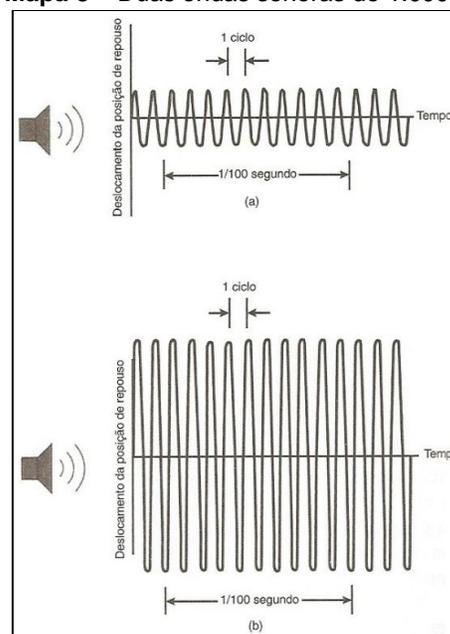
primeira onda acaba chegando ao ouvido e estimula os receptores”. (DAVIDOFF, 2001, p.155).

As ondas sonoras possuem propriedades que as distinguem, das quais se destacam a *amplitude da onda* e a *frequência da onda*. A *amplitude* determina a altura da onda sonora, o que significa “a distância a que foi movida uma partícula de ar a partir de sua posição de repouso” (DAVIDOFF, 2001, p.155). A frequência por sua vez é representada pela quantidade de vibrações ou ciclos completos por segundo (*hertz*). Ou seja, é o número repetitivo de um pico a outro de amplitude de uma onda, cuja unidade é chamada ciclo. Os mapas 7 e 8 representam ondas sonoras que se distinguem entre si pela amplitude e pela frequência, respectivamente.

Mapa 7 – Duas ondas sonoras de 100 Hz



Mapa 8 – Duas ondas sonoras de 1.000 Hz



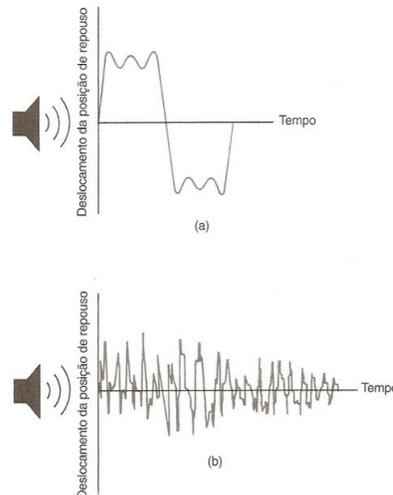
Fonte: DAVIDOFF, L. Introdução a Psicologia, 2001.

“A onda de som mais simples de descrever é uma oscilação regular de onda *seno* que gera compressões e expansões no ar. Esses sons simples são chamados *tons puros*” (GAZZANIGA & HEATHERNTON, 2005, p.158). Entretanto, a maioria das ondas sonoras presentes no cotidiano possui formas mais complexas que uma onda seno, e são compostas de várias ondas simples, com suas próprias frequências e amplitudes.

Uma vez que o padrão de compressão e expansão que descreve qualquer som complexo pode ser representado por uma combinação única de simples ondas seno com diferentes frequências e amplitudes, normalmente pode-se prever a resposta do sistema auditivo a um som complexo a partir de como ele responde ao componente de tons puros (GAZZANIGA & HEATHERNTON, 2005, p.158).

Os mapas 9a e 9b ilustram duas ondas complexas compostas subdivididas em componentes elementares. Assim como é possível “perceber cada nota que forma um acorde, em geral ouve-se os sons individuais que formam os sons complexos” (DAVIDOFF, 2001, p.155). Contudo, se a formação do som é composta por ondas que não se relacionam entre si, o ouvido humano percebe apenas barulho.

Mapa 9 – Ondas Sonoras Complexas



Fonte: DAVIDOFF, L. Introdução a Psicologia. 2001

A percepção auditiva é composta por sons, o que implica em relacionar ondas sonoras com experiências subjetivas do ser humano. *Volume* e *tom* são duas características que aproximam as ondas sonoras dos sons percebidos pelo ouvido:

- A percepção de *volume* varia de acordo com a intensidade da onda fora do ouvido, e da quantidade de sons presentes no mesmo ambiente. Por exemplo, em ambientes silenciosos, “um som de intensidade relativamente baixa parece mais alto do que em um ambiente barulhento” (DAVIDOFF, 2001, p.157). E ainda, a intensidade percebida é afetada pela frequência do som, sendo que quanto mais alta a frequência, a tendência é percebê-lo como mais intenso. A unidade de medida da intensidade de um som é *decibéis* (dB), relacionada a uma escala logarítmica, sendo

que, “cada intervalo de dez pontos na escala representa um aumento de dez vezes no nível de energia” (DAVIDOFF, 2001, p.157). O mapa 10 apresenta alguns níveis de intensidade de sons comuns ao ouvido humano.

Mapa 10 – Níveis de intensidade de sons comuns

Nível Típico, dB*	Exemplo	Exposição de Duração Perigosa
30	Biblioteca silenciosa, sussurro	
40	Escritório, sala de estar, dormitórios silenciosos e distantes de barulho de trânsito	
50	Ligeiro barulho de trânsito a distância, refrigerador, brisa suave	
60	Ar-condicionado a 6 metros de distância, conversação, máquina de costura	
70	Tráfego intenso, máquinas de escrever, restaurante barulhento (exposição constante)	Começa o nível crítico
80	Metrô, tráfego urbano pesado, despertador a 0,60 metros, barulho de fábrica	Mais de oito horas
90	Tráfego de caminhões, eletrodomésticos barulhentos, ferramentas de oficina, cortador de grama	Menos de oito horas
100	Serra de cadeia, brica pneumática	Duas horas
120	Concerto de rock, defronte às caixas, jato de areia, ribombo de trovão	Perigo imediato
140	Rajada de metralhadora, avião a jato	Qualquer exposição é perigosa
180	Plataforma de lançamento de foguete	Perda auditiva inevitável

* Os níveis de som referem-se à intensidade experienciada a distâncias típicas de funcionamento.

Fonte: American Academ of Otoclaryngology – Head & Neck Surgery, Inc., Washington, DC (apud. DAVIDOFF, 2001).

- O tom é a propriedade percebida a partir de uma propriedade física que é a frequência. “À medida que sobe a frequência de uma onda sonora, sobre também o seu tom” (DAVIDOFF, 2001, p.158). O mapa 11 indica as frequências de alguns sons comuns ao ouvido humano.

Mapa 11 – Sons musicais comuns e suas frequências

Som	Frequência, Hz
Nota mais baixa do piano	27,5
Nota mais baixa do cantor com voz de baixo	100
Dó central no piano	261,6
Faixa do violão	82-698
Faixa mais alta do tom soprano	1.000
Nota mais alta do violino	2.093
Nota mais alta do piano	4.180

Fonte: Lindsay & Norman, 1977 (apud. DAVIDOFF, 2001).

Ao tratar da anatomia do ouvido humano, Davidoff (2001), afirma que sua estrutura exerce funções variadas, como: a condução das ondas sonoras, a

amplificação e, a conversão destas em impulsos nervosos. O mecanismo de captação dos sons é relacionado com os princípios de engenharia (hidráulica, mecânica e eletrônica). Este mecanismo é complexo, pois envolve grande variedade de intensidades (o ouvido humano percebe ondas sonoras com frequências de 20 Hz a 20.000 Hz e distingue em torno de 400.000 sons). Após passar por toda a estrutura do ouvido (externo, médio e interno), os sinais mecânicos das ondas sonoras são convertidos em um sinal neural e a mensagem recebida viaja até o cérebro, que capta e interpreta a informação sonora e depende das atividades integradas de diversos neurônios.

2.2 REFERÊNCIAS – INDICATIVAS: PRODUÇÕES ACADÊMICAS

Com o intuito de dispor de dados atuais que permitam a comparação com os dados de campo dessa pesquisa, Biembengut (2008), propõe que identifique, conheça e reconheça pesquisas recentes sobre temas similares ao que se propõe. “A compreensão dos conhecimentos registrados nestes trabalhos é primordial não apenas para alimentar os resultados das experiências, mas principalmente para dispor de dados atuais que permitam a comparação com os dados de campo” (ibid).

A identificação das produções existentes se deu por meio de uma busca nos *sites* da Capes/MEC (www.capes.gov.br) e *Scielo* (www.scielo.br). A partir da identificação, classificaram-se as produções de acordo com a relevância e aproximação com o tema em questão, a fim de servirem como “guia para compreender os segmentos já pesquisados e expressos de forma a elaborar um sistema de explicação ou de interpretação” (BIEMBENGUT, 2008, p.93).

Foram identificadas dezoito teses e dissertações produzidas a partir de 2004 sobre as três vertentes teóricas. Em seguida, selecionaram-se no rol seis teses e quatro dissertações mapeadas em busca de estudos que se aproximassem dos temas dessa pesquisa.

A seção está dividida em três subseções, as quais apresentam a síntese das produções relacionadas às seguintes palavras-chave: Modelagem Matemática na Educação; Percepção; Matemática e Música. A síntese é composta pelos objetivos, procedimentos metodológicos, principais referências teóricas, principais conceitos e definições adotados pelo autor, procedimentos de coleta e principais resultados.

2.2.1 Matemática e Música

Mapa 12: Teses e Dissertações: Matemática e Música

Título	Autor	Instituição	Ano
i) Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical.	Luciana Gastaldi Sardinha Souza	USP	2012
ii) Música e Matemática: Novas Tecnologias do Ensino em uma Experiência Interdisciplinar	Leonardo José Leite da Rocha Vaz	CEFET/RJ	2006
iii) A pesquisa no âmbito das relações didáticas entre matemática e música: estado da arte	Delma Pillão	USP	2009
iv) Matemática e Música: práticas pedagógicas em oficinas interdisciplinares	Gean Pierre da Silva Campos	UFES	2009

Fonte: a autora

i) Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical.

Tese de doutorado de Luciana Gastaldi Sardinha Souza, defendida em 2012 na Universidade de São Paulo. A autora analisa, sob uma perspectiva da racionalidade matemática, algumas composições musicais de Bach, Bartók, Mozart, Pixinguinha, Beatles, Rodolfo Coelho de Souza e Almeida Prado com o intuito de apresentar estruturas matemáticas presentes nessas obras: simetrias, translações, inversões e outras. Esse trabalho busca contribuir para a criação de novas práticas pedagógicas que auxiliem a exploração da música no processo de ensino e aprendizagem.

A Matemática e a Música são unidas e consideradas como um novo conhecimento. Fundamentada teoricamente pela interdisciplinaridade, a autora destaca os textos de Ivani Fazenda e Olga Pombo. A tese está dividida em sete capítulos, com os seguintes títulos: 1) Introdução; 2) Fundamentação Teórica: Sobre a Interdisciplinaridade; 3) Conceitos e Estruturas Matemáticas em Música; 4) O Grupo Diedral e os Grupos T/TI e PLR: uma analogia entre Matemática e Música; 5)

Utilização das Técnicas Matemáticas na análise musical e no ensino; 6) Considerações Finais; 7) Preliminares.

A intenção da autora foi reunir estudantes dos departamentos de Música e Matemática para produzir conhecimentos interdisciplinares que pudessem ser utilizados no EM na divulgação do conhecimento. Na Introdução a autora apresenta o contexto histórico dentro do qual a pesquisa se insere, citando brevemente a interação Matemática/Música do ponto de vista ocidental. E, expõe a estrutura da tese por capítulos.

O segundo capítulo aborda o tema Interdisciplinaridade e fundamenta teoricamente a pesquisa. Com o intuito de contribuir com o surgimento de novos saberes na confluência da Matemática com a Música, a autora inicia o capítulo propondo a ementa de uma nova disciplina na graduação: “voltada principalmente para a investigação de racionalidades matemáticas em composições musicais” (SOUZA, 2010, p.24). Os autores citados nesse capítulo são: Fazenda, Pombo, Zabala, Santomé Márico d’Amaral, Campos, Linhares, Machado, Gusdorf, Boulez, Oppenheimer.

A pretensão do Capítulo 3 era apresentar conceitos e estruturas matemáticas passíveis de serem utilizadas na análise e na criação musical. A autora subdividiu o capítulo da seguinte maneira: 3.1) A Razão Áurea na Música; 2) Autossimilaridade na Música; 3.3) Simetria na Música; e, 3.4) A Teoria dos Conjuntos de Forte. Em cada subitem é abordada a Matemática presente na música a partir dos conteúdos citados nos títulos.

O quarto capítulo mostra uma analogia entre a Matemática e Música a qual permite a interpretação de acordes maiores e menores como elementos de um grupo. As funções Neo-Riemannianas P, L e R são definidas matematicamente e os acordes maiores e menores apresentados como elementos do domínio e da imagem.

No Capítulo 5 a autora apresenta uma proposta educacional que aborda os temas da tese e cita a evidência do raciocínio matemático ao analisar algumas composições musicais. Nessa proposta, a autora sugere a ementa da disciplina relacionando os temas da tese (Matemática e Música), explicitando os conteúdos e descrevendo a algumas oficinas e atividades.

O sexto capítulo é composto pelas considerações da autora acerca das reflexões apresentadas anteriormente. A autora busca refletir sobre: “se um

compositor que escreveu uma obra contendo simetrias, reflexões, transposições, inversões ou autossimilaridades o fez ciente de tais procedimentos” (SOUZA, 2012, p.246). O que ela conclui é que o uso da intuição é inerente em alguns compositores, “outros mostram claramente sua abordagem racional e calculada, mas a maioria utiliza uma mescla entre tais formas e criação. [...] só a estruturação matemática não basta para explicar a riqueza sonora inerente à criação musical” (ibid).

Souza finaliza a tese indicando, no último capítulo, quais conteúdos de Matemática e Música são fundamentais ao relacionar essas disciplinas a fim de compreender as reflexões e resultados apresentados na pesquisa, apresentando as definições e exemplos de cada assunto.

ii) Música e Matemática: Novas Tecnologias do Ensino em uma Experiência Interdisciplinar

Essa dissertação, de autoria de Leonardo José Leite da Rocha Vaz, defendida em 2006 e publicada pelo Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, teve como objetivo propor uma alternativa de contextualização do ensino dos números racionais a estudantes do Ensino Fundamental com o auxílio de novas tecnologias. Está dividida em quatro capítulos: 1) Referenciais Teóricos Pedagógicos; 2) Implicações para o Ensino da Matemática; 3) A Música e a Matemática; 4) As Oficinas Interdisciplinares – Música e Matemática.

Baseado nos estudos de Howard Gardner, o autor dessa dissertação propõe que se ensine Matemática estimulando diferentes áreas potenciais dos estudantes para que estes estabeleçam interconexões e apreendam um determinado conteúdo de outra área. Para isso, ele mostra como vários pontos do ensino de frações podem ser ensinados por meio da música.

Ao expor os referenciais teóricos da pesquisa, o primeiro capítulo foi subdividido em: 1) O Conhecimento como Rede de Significados; 2) As Inteligências Múltiplas; 3) Piaget e o Desenvolvimento Cognitivo; 4) As Teorias do Conhecimento em uma Nova Abordagem do Ensino. Apresentando, assim, as teorias relativas às concepções e à aquisição do conhecimento e à aprendizagem.

O segundo e o terceiro capítulos abordam, respectivamente, as implicações dessas teorias da aprendizagem para o novo ensino da Matemática e um pouco da

história da Música, enfatizando alguns aspectos matemáticos, principalmente aqueles relacionados aos números racionais. O autor analisa alguns livros didáticos de Matemática de quarta e quinta série, com o intuito de apresentar o retrato do modelo tradicional do ensino das frações. “O que se vê nos livros didáticos [...] é a exploração massiva de quantidades contínuas na fixação das frações” (VAZ, 2006, p. 49), quando o recomendável, segundo o autor, é iniciar o conteúdo por meio de quantidades discretas.

Vaz (2006) avalia os livros afirmando que ao utilizá-los ocasiona-se uma inversão do processo de pensamento natural da criança, pois, “a formalização é feita antes da apresentação das situações concretas” (p.52). Assim, o pesquisador propõe uma nova abordagem no ensino das frações, buscando inicialmente estimular a inteligência musical, para que o estudante se depare com situações que envolvem os números racionais. “Fora do âmbito da matemática, ele [o estudante], terá oportunidade para desenvolver seu raciocínio analógico, a partir da música” (p.57).

Para esse propósito, propõe-se um minicurso, o qual segue a sequência piagetiana: “o indivíduo irá tomar contato primeiramente com uma situação prática. Após operar com estes elementos concretos, aos poucos ele poderá perceber padrões e, a partir deles, poderá chegar a uma formalização” (VAZ, 2006, p.57).

Nesse curso foram definidos os principais elementos da música: ritmo, melodia e harmonia; as frações surgem na marcação de pulsos, na formação de compassos e, na escala musical. No último capítulo estão descritos cada módulo, seus objetivos, recursos e a tecnologia utilizada para concretização do minicurso.

O autor conclui a dissertação afirmando que obteve sucesso na aplicação do minicurso por conta de fatores como: eficácia no ensino; contextualização; depoimento dos entrevistados considerando ser fácil o conteúdo estudado; atividades interativas; e, a satisfação do público-alvo.

iii) A pesquisa no âmbito das relações didáticas entre matemática e música: estado da arte

Trata-se de uma dissertação de mestrado, de autoria de Delma Pilão. Foi defendida em 2009, e publicada pela Universidade de São Paulo, na Faculdade de Educação. Tem como objetivo desenvolver um estado da arte da produção

acadêmica no âmbito da relação entre Matemática e Música na área de Educação no Brasil, no período de 1990 a 2008.

A pesquisa, de cunho qualitativo, utilizou-se da análise de conteúdo como procedimento metodológico. E, foi estruturada em sete capítulos: 1) A pesquisa: um plano em construção; 2) Estado da Arte: significado, valor e papel; 3) A pesquisa: o plano em ação; 4) Uma Análise dos Trabalhos; 5) Considerações Finais; 6) Referências Bibliográficas; 7) Anexos.

No primeiro capítulo, a autora esboça a pesquisa em linhas gerais, apresenta quais são as questões de pesquisa, as justificativas, os fundamentos, etc. O trabalho tem como foco pesquisas acadêmicas que se preocupam com o aspecto didático da relação Matemática e Música. A questão que esse estudo buscou responder foi: *Qual o valor, o papel e o significado, assim como as dificuldades e tensões dos trabalhos em torno dos estudos que envolvem música e matemática, na área de educação, a partir de um estudo panorâmico das dissertações e teses brasileiras em torno do tema?*

O Capítulo 2 fornece uma visão abrangente do sentido atribuído à denominação *estado da arte*, utilizando-se de definições de estudiosos no assunto. A autora afirma que estudos do tipo *estado da arte* “buscam auxiliar na compreensão do conhecimento acumulado numa área específica, de forma crítica e sintética, colaborando para o desenvolvimento dos campos de pesquisa” (PILÃO, 2009, p.48). E ainda, classifica sua dissertação como sendo do tipo *estado da arte*, “pois, objetiva esboçar um panorama dos atuais estudos sobre a relação matemática-música, na área da educação” (idib, p.49).

No terceiro capítulo apresenta-se uma análise da produção acadêmica no âmbito da relação da Matemática e Música, retomando os objetivos e a metodologia adotada e avaliando as direções tomadas bem como as dificuldades vivenciadas. A autora mostra como selecionou a coletânea de trabalhos buscando destacar as características da pesquisa. Ela caracteriza sua pesquisa como qualitativa, baseando-se nas características apontadas por Bogdan e Biklen (1994).

A partir da leitura dos trabalhos selecionados, realizada segundo as técnicas da análise de conteúdo, emergiram quatro categorias que estão apresentadas no Capítulo 4 dessa dissertação. A autora apresenta os trabalhos das duas primeiras categorias em subitens: síntese das pesquisas; características gerais; metodologias

de pesquisa; da história da Matemática; cultura; transdisciplinaridade. Nas terceira e quarta categorias são apresentadas apenas o subitem síntese das pesquisas.

O Capítulo 5 trata das considerações finais e para tanto a autora dessa pesquisa faz um retrospecto das etapas percorridas retomando o objetivo inicial. Finaliza afirmando que nos trabalhos analisados “a música se apresentou como agente facilitado e integrados do processo educacional e os pesquisadores relatam significativo entendimento do conteúdo matemático associado à atividade” (PILÃO, 2009, p.76). E ainda, conclui que abordar conhecimentos no âmbito da relação entre Matemática e Música para acentuar a curiosidade do estudante, “parece ser um interessante ponto de partida para a significação de alguns conteúdos matemáticos e na apreensão dos mesmos” (ibid, p. 76).

iv) Matemática e Música: práticas pedagógicas em oficinas interdisciplinares

Essa dissertação teve como objetivo evidenciar, propor e analisar atividades didáticas relacionando Matemática e Música por meio de um viés histórico matemático-musical. Foi defendida em 2009 na Universidade Federal do Espírito Santo por Gean Pierre da Silva Campos. A questão de pesquisa que guiou o estudo foi: *Como práticas pedagógicas interdisciplinares de Matemática e Música podem proporcionar uma alternativa didática e auxiliar no ensino e na aprendizagem de razões e proporções, progressões geométricas, notas, intervalos e escalas musicais?*

Para fundamentar teoricamente a pesquisa, o autor aborda textos dos seguintes estudiosos: Henri Wallon, ao ressaltar que as relações afetivas e o desenvolvimento cognitivo são inseparáveis no processo de ensino e aprendizagem; Howard Gardner, para respaldar o conceito de que o ser humano possui um conjunto de diferentes capacidades; e, para debater sobre educação, Freire, Dantas, Snyders.

O autor destaca obras que julga relevante para a pesquisa, as quais se referem à relação da Matemática com a Música, listando-as e sintetizando-as, são elas: ABDOUNUR, Oscar João. Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados; MOTTA, C. E. M. Uma proposta transdisciplinar no ensino da Matemática para deficientes visuais; RODRIGUES, José Francisco. A Matemática e a Música; PEREIRA, Augusto Andrade. A Matemática e o

Desenvolvimento da Acústica No Renascimento; MONTEIRO JR., Francisco Nairon; MEDEIROS, Alexandre; MEDEIROS, Cleide Farias de. Matemática e Música: As Progressões Geométricas e o Padrão de Intervalos da Escala Cromática.

Para o desenvolvimento da pesquisa organizaram-se cinco oficinas de duas horas cada, com professores e estudantes licenciados em Matemática e Música, em que sugeriu atividades que envolvessem essas duas áreas por meio de questionário, relatórios e videoteipes gravados, e investigaram-se como essas relações poderiam ser utilizadas.

Na apresentação das oficinas o autor expõe experimentos que tinham a Matemática e a Música e suas respectivas histórias como base. Por meio da história da relação Matemática/Música propôs uma trajetória para as oficinas que começou na Grécia Antiga, com os estudos de Pitágoras no século VI a. C., indo até a época do Renascimento no século XIII e XVII, com os estudos de Leonhard Euler sobre a sistematização da Escala Temperada Igual.

Sobre a análise dos dados, o pesquisador afirma que a proposta favoreceu a produção de afetividade e facilitou o ensino e a aprendizagem, referenciando Wallon (2007), ao concordar que o desenvolvimento afetivo ocorre simultaneamente com o desenvolvimento cognitivo. Segundo Campos (2009) “houve um grande avanço no entendimento do conceito de proporção quando apresentado em ligação aos intervalos musicais. A atividade de medir e calcular os intervalos musicais no violão favoreceu uma grande interação dos alunos” (p.121). Assim, o pesquisador confirmou que “o cenário afetivo que a música proporcionou tornou a matemática mais lúdica, trazendo benefícios no entendimento de conceitos que eram vistos somente de maneira simbólica e teórica” (p.121).

Concluiu-se, também, que o estímulo de diferentes competências intelectuais de deu pela característica interdisciplinar fundamentada pelas inteligências múltiplas de Howard Gardner. O autor conta que tanto o pensamento lógico-matemático auxiliava no entendimento de conceitos musicais, “tais como notas, intervalos e escalas, ciclos das quintas, dissonância, ressonância e frequência” (CAMPOS, 2009, p.121), como “a competência musical trazia benefícios para que os alunos entendessem e dessem novos significados a proporções, razões e progressões geométricas” (ibid).

2.2.2 Modelagem Matemática na Educação

Mapa 13: Teses e Dissertações: Modelagem Matemática na Educação

Título	Autor	Instituição	Ano
i) Uma reconstrução epistemológica do processo de modelagem matemática para a educação	Leônia Gabardo Negrelli	UFPR	2008
ii) A Modelagem Matemática como Instrumento de ação política na sala de aula	Otávio Roberto Jacobini	UNESP – RC	2004
iii) Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações – Teoria e Prática	Maria Eli Puga Beltrão	PUC – SP	2009
iv) Modelagem Matemática no Contexto do Ensino Médio: Possibilidade de Relação da Matemática com o Cotidiano	Alzenir Virginia Ferreira Soistak	UEPG	2006

Fonte: a autora

i) Uma reconstrução epistemológica do processo de modelagem matemática para a educação

Trata-se de uma tese de doutorado de autoria de Leônia Gabardo Negrelli, publicada pela Universidade Federal do Paraná (UFPR) em 2008. O trabalho está dividido em cinco capítulos: Introdução; A Realidade no Processo de Modelagem Matemática; Uma Fundamentação Filosófica da Releitura do Processo de Modelagem Matemática; Modelagem Matemática no Interior da Própria Matemática; e, Considerações Finais.

Negrelli apresenta nesse estudo aspectos filosófico-epistemológicos e matemáticos subjacentes a uma interpretação do processo de Modelagem Matemática na Educação Matemática, buscando compreender o processo de Modelagem Matemática e seu papel no ensino e na aprendizagem de Matemática, por meio da análise do componente “realidade”.

Esse estudo possui um caráter teórico que busca responder as seguintes questões: *de que realidade trata a Modelagem Matemática na Educação Matemática, isto é, qual é a sua ontologia? E, como uma caracterização dessa realidade permite uma releitura do processo de Modelagem Matemática de modo a considerar a própria Matemática como uma realidade a ser modelada?*

A pesquisadora apresenta quatro objetivos, a saber: 1) Situar o componente 'realidade' numa descrição do processo de Modelagem Matemática como ele comumente é visto na Educação Matemática por alguns autores. 2) Caracterizar o componente realidade no processo de Modelagem Matemática a partir de uma análise epistemológica do mesmo. 3) Fazer uma releitura do processo de Modelagem Matemática à luz da análise epistemológica realizada. 4) Propor uma adaptação por analogia do processo de Modelagem Matemática para o caso em que a realidade a ser modelada é um recorte da própria Matemática.

A autora apresenta etapas do processo de Modelagem Matemática de estudiosos como Bassanezi, Bean, Anastácio, Biembengut e Hein, D'Ambrósio, sem, no entanto, enfatizar as concepções de Modelagem Matemática defendida pelos estudiosos. Após descrever os processos de Modelagem Matemática empregados em estudos no âmbito da Educação Matemática pelos autores citados, conclui que estes processos trazem a realidade como ponto de partida e motivação, consideram a Matemática como ferramenta e o objetivo a ser atingido é a obtenção de modelos, visando o conhecimento dessa realidade.

Na continuação, Negrelli mostra estudos sobre Modelagem na Educação Matemática que se aprofundaram e se fundamentaram na questão da *realidade*. Para isso, a autora apoiou-se nos seguintes estudiosos: Anastácio, Doval, Biembengut e Hein e Bachelard.

Ao relacionar concepções de realidade e conhecimento, a autora dessa tese, fundamentada por estudiosos já citados, aborda as quatro formas de se conceber a realidade: a realidade objetiva; a realidade percebida; construída; e, a criada. Para Negrelli (2008, p.32), "os direcionamentos que são dados para as situações que são estudadas por meio da modelagem matemática indicarão a consideração de uma ou mais dessas concepções de realidade".

O principal enfoque dessa tese é apresentado no penúltimo capítulo, quando a autora sugere uma adequação no processo de Modelagem Matemática tradicional o qual parte de situações não matemáticas para serem modeladas, propondo uma "adaptação, por analogia, dessa releitura do processo de modelagem matemática a situações nas quais a realidade inicial a ser modelada é um campo da própria matemática" (NEGRELLI, 2008, p.55). Para isso, a autora re-interpreta os conceitos fundamentais do processo e apresenta alguns exemplos.

Nas reflexões do último capítulo a autora cita que após a adaptação proposta nesta tese, apresentou a Modelagem Matemática como uma forma de estudar a própria Matemática constituindo uma contribuição original deste estudo.

ii) A Modelagem Matemática como Instrumento de ação política na sala de aula

Tese de doutorado de autoria de Otávio Roberto Jacobini, publicada em 2004, pela Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro, junto ao curso de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Nessa tese o autor analisou as possibilidades de crescimento político dos estudantes, quando a Modelagem Matemática é adotada como estratégia de ensino e aprendizagem, tanto dos conteúdos curriculares quanto de questões investigativas inerentes aos conteúdos, que resultam de discussões e problematizações da realidade. O autor se baseia nos autores Mellin-Olsen (1987) e Demo (1995) para conceituar *política*: ações, atuações e participações dos seres humanos na sociedade.

O autor parte do princípio que as possibilidades oferecidas pela Modelagem não são apenas as de ensinar Matemática. Além da contribuição com crescimento intelectual dos estudantes, a Modelagem oportuniza ações sociais, políticas e uma formação crítica de um cidadão presente em uma sociedade tecnológica, globalizada e com forte presença da Matemática. Assim, formula a seguinte pergunta diretriz da pesquisa: *quais as possibilidades de crescimento político no trabalho pedagógico com a Modelagem Matemática?*

Para respondê-la, organiza a tese em sete capítulos, além da Introdução, das referências bibliográficas, dos anexos, apêndices e índice. São eles: - Ambientes de aprendizagem de matemática baseados na investigação e na reflexão; - A metodologia da pesquisa; - O cenário para investigação “Eleições Presenciais”; - O cenário para investigação “Estresse e Democracia”; - O cenário para investigação “Matemática e Cidadania”; - Análise e interpretações; - Considerações finais.

No segundo capítulo (Ambientes de aprendizagem de Matemática baseados na investigação e na reflexão), o autor apresenta conceitos de Educação (Matemática) crítica, baseado nos pesquisadores: Ole Skovsmose, Paulo Freire, Ubiratan D’Ambrósio, Alves-Mazzotti e Gewandsnajder. E considera fundamental a construção de cenários e ambientes de aprendizagem investigativos, sendo este um

espaço alternativo, paralelo às atividades da sala de aula e baseado em atividades do currículo, com a participação de estudantes voluntários.

Ainda no segundo capítulo, para abordar o tema *Modelagem Matemática*, o autor embasa-se teoricamente nos seguintes pesquisadores: Bassanezi, Leibniz e Lidset, Blum, Biembengut, Spina, Franchi, Borba e Araújo, Barbosa, Ferreira, Monteiro e Pompeu Jr, concluindo que para a maioria deles “o processo de modelagem tem o seu início e o seu término no mundo real, passando pela construção de modelos, que são as representações em termos matemáticos de aspectos de interesse do problema real em estudo” (JACOBINI, 2004, p.58).

Os procedimentos metodológicos utilizados pelo autor e os critérios de análise da investigação, apresentados no terceiro capítulo, constituem-se de metodologia qualitativa e inserem a pesquisa no âmbito da pesquisa-ação.

Nos três capítulos seguintes o autor apresenta os cenários construídos e as abordagens metodológicas para a aplicação da pesquisa. Sendo o primeiro formado por um grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática, o qual tinha como tema de trabalho *pesquisas sobre intenção de voto*.

O segundo cenário, apresentado no capítulo cinco, é o cenário “Estresse e Democracia”, organizado com estudantes da disciplina Estatística que cursavam o segundo semestre da Faculdade de Engenharia da Computação, tendo abordagem de projetos nomeados “Orçamento Participativo” e “Estresse entre estudantes universitários”.

No sexto capítulo o autor apresenta o último cenário construído, chamado de “Matemática e Cidadania”, tendo como participantes estudantes da disciplina Cálculo Diferencial Integral, do mesmo curso anterior. Neste capítulo o autor destaca as descobertas matemáticas, os modelos construídos, as simulações e as reflexões realizadas no decorrer da aplicação.

Na análise dos dados o autor indica que houve crescimento político dos participantes dos cenários e associa este crescimento com as investigações relacionadas aos temas dos projetos de modelagem e com a ação política que se concretizou por meio do envolvimento dos estudantes com a comunidade.

O autor conclui que o estudante é “alfabetizado matematicamente” quando é “capaz de compreender a matemática curricular, perceber a relação entre essa matemática e situações do cotidiano, modelar problemas reais simples e interpretar criticamente” (JACOBINI, 2004, p.205), e ao mesmo tempo é um “sujeito sensível a

reflexões sobre situações que interessam e afligem a sociedade que consegue articular seus interesses como aprendiz e como cidadão” (ibid, p.205).

iii) Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações – Teoria e Prática

Trata-se de uma tese de doutorado defendida em 2009 na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, por Maria Eli Puga Beltrão. O objetivo foi utilizar a Modelagem e Aplicações como abordagens de ensino da Matemática, e a questão de pesquisa era a seguinte: *Que estratégias utilizar para que se possa ministrar Cálculo num curso superior de tecnologia por meio das Aplicações e Modelagem Matemática, de modo a atender exigências institucionais como cumprimento de programa, bons resultados de avaliação, entre outras?*

Os procedimentos metodológicos da pesquisa foram qualitativos, teve o investigador como instrumento principal com estratégias das observações dos participantes. A tese foi dividida em quatro capítulos: 1) O Ensino no Brasil e as Influências Recebidas; 2) As Ciências, as Aplicações e a Modelagem Matemática; 3) Aplicações e Modelagem Matemática sob diferentes perspectivas. 4) Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações – uma abordagem.

A autora implementou a Modelagem e Aplicações no curso de Tecnologia de Alimentos na disciplina de Cálculo, sustentada teoricamente pelos autores: Ubiratan D’Ambrósio, Rodney Carlos Bassanezi, Marcelo de Carvalho Borba, Jonei Cerqueira Barbosa, Maria Salett Biembengut. Essas referências são expostas no segundo capítulo e identificam pensamentos comuns no que se refere ao uso das Aplicações e Modelagem. Ainda com o objetivo de apresentar pontos relevantes, no terceiro capítulo há uma revisão bibliográfica das pesquisas que tratam do mesmo tema e um levantamento das teses e dissertações apresentadas até 2008.

No último capítulo a autora apresenta a proposta de ensino e seus argumentos a favor de algumas propostas que viabilizam a utilização da Modelagem Matemática e Aplicações no curso em estudo. A proposta foi organizada por três fases que se entrelaçam durante a toda aplicação.

Com esse estudo a autora concluiu que é possível utilizar Modelagem e Aplicações “se os estudantes acreditarem no processo e perceberem a relação da Matemática com situações pertinentes à sua área de interesse” (BELTRÃO, 2009, p.268). E ainda afirma ser “necessário o rompimento com contratos didáticos, com

hábitos e concepções que reforçam a ideia de que a Matemática é desvinculada da realidade” (*ibid*, p. 268).

iv) Modelagem Matemática no Contexto do Ensino Médio: Possibilidade de Relação da Matemática com o Cotidiano

Nessa dissertação, defendida em 2006 na Universidade Estadual de Ponta Grossa, Alzenir Virginia Ferreira Soistak descreve as contribuições deixadas pela aplicação da Modelagem Matemática no contexto escolar do EM enquanto buscou responder a seguinte questão: *qual a melhor maneira de relacionar os conhecimentos cotidianos, trazidos pelos estudantes com os conhecimentos matemáticos sistematizados pela escola?*

A pesquisa foi dividida em quatro capítulos: O conhecimento matemático e a escola; Modelagem Matemática; Situações de Aplicação da Modelagem Matemática no EM Profissionalizante; e, Discussão e Análise das situações de Modelagem Matemática. E, teve como objetivo analisar a aplicação da Modelagem Matemática em situação de sala de aula, ante a contextualização, a aplicabilidade e a compreensão dos conteúdos matemáticos.

O primeiro capítulo é composto pelo histórico da organização do conhecimento matemático e a estrutura curricular do EM, citando autores como Delval e Becker ao discutir sobre a diferença entre conhecimento espontâneo e conhecimento escolar e, a atuação do professor na transmissão desses conhecimentos. Ainda no capítulo I, a autora aborda os seguintes temas: empirismo, apriorismo e construtivismo, buscando refletir sobre as diferentes visões de aquisição do conhecimento e, na sequência relacionando-as com o conhecimento matemático.

Os principais estudiosos que a autora cita para embasar seus estudos teóricos sobre a Modelagem Matemática são: Burak, Monteiro, Pompeu, Bassanezi, Barbosa e Biembengut. Além da abordagem da Modelagem Matemática como uma alternativa para o ensino da Matemática, no segundo capítulo foi apresentada as tendências do ensino da Matemática, classificadas, de acordo com Fiorentini (1995), em: formalista clássica, empírico ativista, formalista moderna, tecnicista e suas variações, construtivista e sócioetnocultural.

Atribuiu-se uma abordagem qualitativa à pesquisa, e a coleta de dados deu-se em sala de aula regular, com duas turmas em nível do EM, em Colégio Estadual, durante duas das quatro aulas semanais de Matemática. E, no capítulo III, a autora descreve e analisa duas situações de aplicação da Modelagem Matemática desenvolvidas por meio do tema *cultura da soja*.

No quarto capítulo, as discussões e análises referentes aos dados coletados na aplicação e na observação das situações, são apresentadas. Soistak relata que “a verificação de aplicabilidade e relacionamento do conteúdo matemático escolar com situações do cotidiano foi percebida e isso tornou a aprendizagem da Matemática mais significativa” (2006, p.93). Segundo a autora, a Modelagem Matemática contribuiu na atribuição de significados à Matemática e no aumento do interesse dos estudantes na disciplina.

A autora conclui, sugerindo a aplicação da Modelagem Matemática na Educação Básica, pois, durante a aplicação desta “os conteúdos matemáticos abordados surgiram de forma natural e descontraída, proporcionando a aplicabilidade da Matemática em situações do cotidiano dos alunos” (SOISTAK, 2006, p.106), e tornando a aprendizagem significativa.

2.2.3 Percepção

Mapa 14: Teses: Percepção

Título	Autor	Instituição	Ano
i) Sentidos de Percepção e Educação Matemática: Geometria Dinâmica e Ensino de Funções com Auxílio de Representações Dinâmicas	Orlando de Andrade Figueiredo	UNESP – RC	2010
ii) Fatores emocionais durante uma escuta musical afetam a percepção temporal de músicos e não músicos?	Danilo Ramos	USP	2008

Fonte: a autora

i) Sentidos de Percepção e Educação Matemática: Geometria Dinâmica e Ensino de Funções com Auxílio de Representações Dinâmicas

Trata-se de uma tese defendida em 2010, publicada pela Universidade Estadual Paulista, UNESP - Rio Claro, de autoria de Orlando de Andrade Figueiredo. Está dividida em três capítulos, são eles: 1) Percepção e sentido; 2) Percepção de dependência, representação dinâmica de funções e uma abordagem pedagógica; 3) Percepção de restrição e geometria dinâmica. A organização dos capítulos se dá da seguinte forma:

No Capítulo 1, o autor estabelece os sentidos mediante os quais a percepção se torna um momento originário da experiência humana, além de desenvolver a noção de percepção e sentido, concentrando as fundamentações epistemológicas e metodológicas da pesquisa.

Nesse capítulo o autor faz uma reconstrução pessoal dos sentidos tal como compreende os textos de filósofos. Inicialmente, há uma reflexão, sem o intuito de fundamentar em autores reconhecidos, sobre a designação de sentidos. Em seguida, explicita ideias sobre modos de abordagem da fenomenologia. E, no penúltimo item do capítulo apresenta os estudos de Merleau-Ponty a respeito da fenomenologia da percepção, “Uma fenomenologia da percepção não pode levar a outro resultado que não seja uma nova forma de *perceber a percepção*” (FIGUEIREDO, 2010, p.48).

Figueiredo finaliza o capítulo 1 discutindo subjetividade, objetividade e experiência pré-predicativa, sempre indicando exemplos análogos às concepções: “Chutar uma bola não é só a imagem visual do pé atingindo o alvo, mas um intrincado jogo de percepções que está além das imagens visuais e das palavras” (ibid, p.60).

O Capítulo 2 relaciona o tema do trabalho com *função matemática*. O autor se baseia na epistemologia e na metodologia apresentada no primeiro capítulo para delinear a capacidade de perceber dependências em eventos que ocorrem no dia a dia. Aborda o sentido matemático de função para o campo perceptivo, explicando os benefícios à luz da compreensão do papel da percepção.

No fim do capítulo, Figueiredo apresenta uma compreensão ampliada da intenção de mobilizar a percepção na prática educativa. “Muito se fala na importância da visualização na educação matemática [...] Porém, a experiência

visual é, antes de tudo, uma experiência perceptiva também”, conclui afirmando que “as representações dinâmicas de função são exemplos concretos da realização do espírito da comunidade científica que se reconhece sob a alcunha de *visualização*, mas que não são necessariamente apenas *visuais*, e, sim, *perceptíveis*” (p.86).

No terceiro capítulo o autor mostra a percepção de restrições ou de impedimentos, atuante na operação de programas de computador de geometria dinâmica. Busca-se, nesse capítulo, explicitar qual a idealidade matemática que é apresentada na geometria dinâmica. A geometria dinâmica foi abordada neste capítulo com o intuito de mostrar relações entre percepção e Educação Matemática.

Na conclusão da tese destacam-se as características principais da pesquisa:

1) A concepção de percepção evidenciada do pensamento de Maurice Merleau-Ponty; 2) A experiência humana, a qual transparece ao longo do texto sustentando a argumentação; 3) A apresentação de momentos da Educação Matemática em que a percepção se faz sentir e a explicitação desses momentos; e, 4) A articulação da percepção em uma ação pedagógica.

ii) Fatores emocionais durante uma escuta musical afetam a percepção temporal de músicos e não músicos?

Nessa tese de doutorado, defendida em 2008 por Danilo Ramos, na Universidade de São Paulo, o objetivo foi verificar o papel das emoções desencadeadas pela Música na percepção temporal de músicos e não músicos. Para isso foram realizados quatro experimentos com estudantes de Música e pessoas sem experiência nos estudos dessa área. A tese está dividida em seis capítulos denominados: 1) Introdução; 2) Objetivos; 3) Experimentos; 4) Conclusão; 5) Referências; 6) Apêndices.

A introdução está subdividida em quatro itens. No primeiro item, *A Nova Estética Experimental*, o autor referencia Berlyne para discutir os processos psicológicos envolvidos em apreciações artísticas sonoras e visuais. E, é sob a ótica da nova estética experimental proposta por Berlyne (1974), que o autor da tese encaminha sua investigação, com o intuito de verificar a influência das emoções desencadeadas durante uma escuta musical.

O segundo item da introdução, *As Emoções Musicais*, aborda questões referentes à música e à emoção, apresentando principalmente as ideias de Juslin,

Sloboda, Hevner e Meyer. O terceiro item, chamado A Percepção Temporal Humana, trata inicialmente da noção de tempo, citando as concepções de diversos filósofos como Platão, Descartes e Kant. Afirma que Merleau-Ponty, Heidegger e Husserl explicam o tempo como sendo uma dimensão própria do ser humano. Desde a metade do século XXI, segundo Ramos (2008, p48), “desenvolve-se o estudo empírico da precisão com a qual os homens percebem o tempo por meio da Psicofísica, ciência que estuda a percepção do tempo a partir de estudos sobre o que o homem faz em reação às situações em que ele se encontra”. O quarto item apresenta o *Modo Musica* o qual refere-se aos modos utilizados na Grécia Antiga e que foram retomados na improvisação jazzística no início do século XX.

O Capítulo 2 mostra os objetivos, sendo o geral citado anteriormente. No terceiro capítulo o autor da tese descreve os quatro experimentos realizados, dos quais participaram estudantes de Música e pessoas que não tinham nenhuma experiência em estudo de Música. Os grupos participantes eram distintos a cada experimento.

No capítulo da conclusão o autor afirma ter obtido resposta positiva à questão do estudo (fatores emocionais durante uma escuta musical afetam a percepção temporal de músicos e não músicos?). Porém percebeu diferença na forma como esses fatores interferem na percepção temporal para cada grupo de participantes. Os dados “sugerem que as subestimações temporais dos músicos parecem estar enraizadas a um forte envolvimento emocional com trechos musicais desencadeadores da emoção Tristeza”, de tal modo que “estes sujeitos desviam a atenção à tarefa temporal durante a escuta”. E, “as subestimações e superestimações temporais dos não músicos “parecem estar enraizadas aos níveis de *arousal* desencadeados durante a escuta, proporcionados pela manipulação, principalmente, do andamento musical” (RAMOS, 2008, p.186).

Como sugestão de continuidade do estudo, o autor, aponta a possibilidade de fazer um controle sistemático de variáveis, com o objetivo de verificar se o tipo de metodologia aplicada interfere na influência das emoções percebidas durante uma escuta musical sobre a percepção temporal de músicos e não músicos.

2.3 CONSIDERAÇÕES DESTE MAPA

Com o intuito de obter aportes para a análise, este capítulo apresentou as definições dos termos que envolveram esta pesquisa, como também as teorias, proposições e as publicações pertinentes ao tema. Foi dividido em duas partes: literatura suporte e, produções recentes. Apresenta-se um resumo das concepções adotadas como base para responder à questão de pesquisa: *como a Modelação Matemática na Música pode favorecer a percepção matemática de estudantes de EM?*:

- Matemática e Música

Houaiss (apud Bréscia, 2003, p. 25) conceitua música como a “[...] combinação harmoniosa e expressiva de sons e como a arte de se exprimir por meio de sons, seguindo regras variáveis conforme a época, a civilização etc”. A determinação das regras para organizar os sons e silêncio que compõe a Música são relações matemáticas e físicas.

Na tentativa de apresentar e confirmar essa relação, Abdounur (2003) apresenta os experimentos de Pitágoras, os quais eram compostos de relações de comprimentos que produziam intervalos sonoros. Pitágoras investigou, assim, a relação entre o comprimento de uma corda, ao vibrar, e o tom musical produzido por ela.

Apesar da aproximação da Matemática com a Música ser antiga (desde sua integração no Quadrivium), a Música se distanciou da Matemática após a fragmentação das disciplinas do currículo escolar. Assim, baseia-se na Teoria das Inteligências Múltiplas de Gardner (1994), para propor o ensino e a aprendizagem de conceitos e conteúdos matemáticos sob uma perspectiva interdisciplinar, com um único fim: ensinar Matemática atribuindo significado a cada conteúdo.

A Teoria das Inteligências Múltiplas parte do conceito de que o ser humano possui diferentes potenciais cognitivos e define sete tipos de inteligência: lógico-matemática, lingüística, corporal-cinestésica, espacial, intrapessoal, interpessoal e musical. E, a partir dela Granja (2010) articula a inteligência musical com a lógico-matemática, afirmando que o pensamento musical e o matemático têm em comum a busca por padrões e regularidades. “Na música, a regularidade se apresenta no

ritmo, na harmonia ou na estrutura de compassos. A matemática busca as regularidades numéricas, as proporções geométricas constantes, entre outros” (p.92).

- Modelagem Matemática

Adotou-se, nessa pesquisa, o método da Modelagem Matemática na concepção de Biembengut (2004), bem como as etapas sugeridas pela autora para modelar situações-problemas. Na teoria de Biembengut, a Modelagem Matemática é um método de pesquisa que busca traduzir problemas da realidade para descobrir alguma solução ou criar e/ou aprimorar algo, capacitando os estudantes a resolver um problema ao mesmo tempo em que estudam os conceitos matemáticos envolvidos nesta resolução.

- Percepção

Na teoria de Luria (1991) a sensação é a fonte de conhecimento humano e a condição fundamental do desenvolvimento psíquico da pessoa que permite “perceber os sinais e refletir as propriedades e os indícios dos objetos do mundo exterior e dos estados do organismo” (p.2).

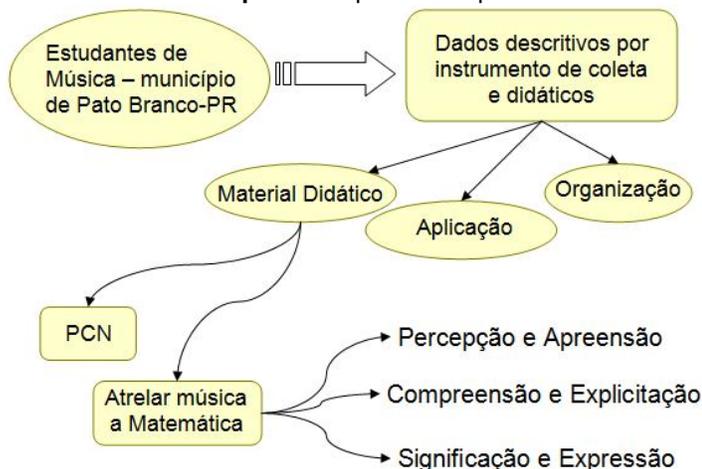
Segundo Santaella (1998) os órgãos sensoriais explicam os fatores sensórios da percepção, “mas não são capazes de explicar porque toda percepção adiciona algo ao percebido, algo que não está lá fora, no mundo fenomênico, e que não faz parte, portanto, da estimulação” (p.22). Os órgãos sensoriais são estimulados a perceber algo do mundo exterior, entretanto toda percepção adiciona algo ao percebido, elaborando a síntese e atribuindo-lhe compreensão e significado.

CAPÍTULO III – MAPA DE CAMPO

Nesse capítulo apresenta-se o Mapa de Campo, o qual é composto dos dados empíricos dessa pesquisa. “A credibilidade e a relevância da pesquisa dependem dos dados ou das informações levantadas: é a essência da pesquisa” (BIEMBENGUT, 2008, p.102). Estes dados originaram dos resultados e observações da aplicação das atividades pedagógicas propostas para o EM, as quais integram a Matemática e a Música e, aplicam-se por meio da Modelação Matemática, a fim de validar ou não o método de pesquisa.

O Mapa de Campo aponta como a obtenção dos dados foi realizada e organizada desde o início do processo até a aplicação das atividades pedagógicas, está descrito em três partes: - A *primeira* trata-se da descrição das etapas que viabilizaram a aplicação da pesquisa: a solicitação e autorização para uso do espaço do Instituto de Música, quem colaborou e participou da pesquisa, o convite aos estudantes com o nível de escolaridade adequado e a autorização dos responsáveis. - A *segunda* parte é composta pela apresentação da estrutura do Material de Apoio Didático, elaborado e aplicado pela autora da pesquisa e exposto integralmente no Apêndice D desta dissertação. - A *terceira* parte do capítulo descreve os encontros realizados para aplicação da pesquisa, apresentam-se as principais perguntas e respostas dos questionários aplicados e as atividades propostas, classificadas por meio das três fases da Modelação: *Percepção e Apreensão, Compreensão Explicitação e, Significação e Expressão.*

Mapa 15: Mapa de Campo



Fonte: a autora

3.1 POR ONDE COMEÇAR: ETAPAS DA ORGANIZAÇÃO

A pesquisa foi realizada nos Institutos Prosdócimo Guerra e Theóphilo Petrycoski. Estes Institutos possuem a mesma sede e os projetos sócio-culturais são oferecidos a partir de parceria entre eles. Desde sua fundação até o ano de 2013, fizeram parte destes Institutos mais de mil e trezentos estudantes entre 7 e 17 anos, que residem no município de Pato Branco (PR) e região. Os institutos oferecem, de forma gratuita, oficinas de instrumentalização, dança, teatro, circo e esperanto, amparadas pela Lei Rouanet (Lei de Incentivo à Cultura do Ministério da Cultura).

As oficinas de instrumentalização contam com aulas de teoria musical e prática de instrumentos variados (violão, violoncelo, viola clássica, contrabaixo de arco, violino, flauta transversal). Essa pesquisa foi aplicada com participantes destas oficinas, por se tratar de estudantes que possuem interesse pela Música (tema escolhido pela autora da pesquisa para abordar conteúdos matemáticos). O estudo foi desenvolvido e aplicado em períodos contrários a escola e as oficinas, com estudantes voluntários.

A Modelação parte de situações/temas de interesses e afinidades das pessoas envolvidas o que justifica a realização da pesquisa com estudantes que possuem alguma experiência com a Música, evitando, assim, impor assuntos que desconhecem ou que fossem apenas de interesse da professora, autora dessa pesquisa.

O primeiro contato da autora da pesquisa com o diretor do Instituto foi no dia 08 de março de 2013. Neste encontro apresentou-se o tema e os objetivos da pesquisa e solicitou-se autorização (Apêndice A) para aplicá-la. O diretor levou a proposta para o presidente, quem autorizou a realização desta pesquisa nas dependências do Instituto (Apêndice B).

Com o Material de Apoio Didático elaborado e os encontros planejados, iniciou-se uma busca aos estudantes que estivessem cursando o EM, pois, embora o Instituto tenha muitos inscritos nas oficinas de instrumentalização, os estudantes não estão classificados por série ou idade, mas sim por experiência e/ou conhecimento musical.

A autora da pesquisa fez diversas visitas ao Instituto na tentativa de encontrar estudantes deste nível de escolaridade e convidá-los a participar da pesquisa. A maioria destas visitas foi frustrada, quase a ponto de desistir do Instituto

e procurar uma escola do Ensino Básico, com a certeza de que iria encontrar os voluntários que buscava.

Após vários contatos com os participantes, em busca de um número razoável de voluntários, a autora da pesquisa e as secretárias do Instituto reuniram 12 (doze) estudantes que cursavam o EM, após um dos ensaios da orquestra de câmara, para convidá-los a participar da pesquisa. Nessa conversa a autora apresentou-se e solicitou a colaboração para participar de sua pesquisa. Elencou os objetivos e os informou que sua participação seria utilizada como dados empíricos para análise dos resultados da pesquisa. Para cada estudante foi entregue uma carta-convite, a qual exigia a autorização dos responsáveis (Apêndice C).

Mesmo após muito esforço, atingiu-se um número de apenas 6 voluntários. Os encontros foram agendados para terças e quartas-feiras, com início às 15h30min e término às 17h30min. Eram previstos seis encontros, entretanto, o primeiro encontro foi cancelado, pois, apenas um estudante compareceu, e, pela falta de disponibilidade dos estudantes e do Instituto em repor a aula, foram realizados cinco encontros.

O local das aulas era em uma sala onde aconteciam as aulas de teoria musical. Esta sala possuía um quadro branco, algumas carteiras escolares, uma mesa para professores e um teclado. Durante as aulas instalava-se ainda, um projetor multimídia, uma caixa de som e o notebook da autora da pesquisa. Outro recurso que foi muito utilizado nas aulas foi o *tablet* da autora, para acessar alguns aplicativos que auxiliaram na explicação dos conteúdos relacionados ao tema da pesquisa.

3.2 COMO SE ORIENTAR: MATERIAL DE APOIO DIDÁTICO

O Material de Apoio Didático (Apêndice D) utilizado na aplicação da pesquisa com os estudantes voluntários foi organizado pela autora desta pesquisa a fim de reunir aspectos fundamentais da relação da Matemática com a Música. Utilizou-se da Modelação Matemática como método de ensino, tanto na elaboração do material, quanto na sua aplicação. Segundo Biembengut, “o pesquisador na modelagem busca explicar um fato ou fenômeno” (no prelo). O objetivo deste

Material de Apoio Didático foi o de responder questões sobre a organização de uma Música e como é possível ouvi-la.

Está dividido em oito partes, denominadas *momentos*, os quais requerem diferentes horas/aula para aplicação, pois, estão organizados por assunto e não por aulas. O intuito não foi apresentar todos os conteúdos teóricos de Matemática, Física ou outra disciplina envolvida com o tema, pois, estes se encontram em diversos livros didáticos já existentes. Assim, tomando o cuidado para o material não se tornar algo repetitivo, a autora da pesquisa elaborou uma sequência didática, com uma ordem bem estabelecida, de assuntos de diferentes áreas que contribuem com o estudo da relação da Matemática com a Música. E, indicando de forma resumida quais os conteúdos teóricos do currículo escolar podem ser abordados pelo professor e em quais momentos da aula.

No material, também, constam sugestões de interdisciplinaridade, com curiosidades e quadros de observações que complementam o texto. Esse material serve como guia, tanto para professor quanto para estudante, de descobertas e incentivo a observação e experimentação da Matemática.

Biembengut, ao pretender que os estudantes considerem a importância da Matemática, afirma ser necessário “dispor de um conjunto de exemplos interessantes de como os diversos conceitos matemáticos se fazem presentes nas atividades diárias das pessoas, sejam no lazer, sejam na atuação profissional em qualquer área do conhecimento” (no prelo).

Assim, escolheu-se o a Música como ponto de partida para abordagem dos conceitos matemáticos, integrando a Matemática com outras áreas do conhecimento. Buscou-se subdividir as aulas de acordo com as três fases da Modelação: *Percepção e Apreensão*, *Compreensão e Explicitação* e *Significação e Expressão*, descritas no capítulo 2, item 2.1.1. Na sequência deste capítulo apresentam-se, detalhadamente, os cinco encontros realizados para aplicação do Material de Apoio Didático.

3.3 COMO CHEGAR: DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Os dados requeridos com a pesquisa foram, em primeira instância, respostas de um questionário inicial, que buscou identificar os estudantes

voluntários, seus níveis de escolaridade e verificar a percepção destes estudantes sobre o tema em questão. O segundo teste foi aplicado com os mesmos participantes após ocorrer todos os encontros programados. Nestes encontros também foram analisados e avaliados, por meio da observação, a participação, os comentários, as questões, as dúvidas e a percepção matemática dos estudantes na medida em que os encontros foram acontecendo.

1º encontro – dia 20 de novembro (quarta-feira)

No primeiro encontro estavam presentes cinco estudantes (A, B, C, D e E). A autora da pesquisa aplicou um questionário inicial (Apêndice E), com o objetivo de verificar os conhecimentos prévios dos estudantes e compará-los após a realização dos encontros.

Os estudantes responderam o questionário individualmente, entretanto socializaram algumas dúvidas, perguntando para a professora:

- E se não soubermos responder? (Estudante C)

A professora repetiu a explicação que havia dado no início dizendo que o objetivo desse questionário não era o de atribuir alguma nota a cada estudante e sim avaliar os encontros, o método que seria utilizado, o Material de Apoio Didático, enfim, todo o processo que propunha em sua pesquisa, por isso, quando não soubessem poderiam escrever que não sabiam a resposta.

Passado algum tempo a estudante E questionou:

- Seno é aquilo de seno, cosseno e tangente, né?

Após esta pergunta o estudante D mostrou-se eufórico e disse:

- Ah, lembrei agora o que é seno!

Após todos os estudantes responder e entregar o questionário (Apêndice F), a autora explicou os objetivos da pesquisa, explicou que eles estavam ali para aprender Matemática e que precisava que cada estudante se comprometesse em não faltar nenhum encontro, pois, era fundamental a presença de todos.

Nesse momento o estudante D, pediu se os encontros poderiam ser nas segundas e quartas-feiras, ao invés de terças e quartas. A professora respondeu que poderia desde que todos também tivessem essa disponibilidade. Após todos concordarem, os dias foram alterados, mantendo o horário de 15h30min até 17h30min.

2º encontro – dia 25 de novembro (segunda-feira)

Estavam presentes neste encontro quatro estudantes (A, B, E e F). O estudante C não compareceu, pois, estava doente. O estudante D, o qual havia solicitado a alteração das datas dos encontros, não compareceu no segundo encontro e a partir deste não participou mais das aulas e, também não justificou sua ausência.

Nesse encontro, uma estudante que não estava na primeira aula, compareceu 30 minutos antes de iniciar a aula e perguntou se poderia participar dali em diante. A professora julgou ser possível sua participação já que a abordagem dos conteúdos ainda não havia acontecido. Assim, aplicou o questionário inicial com esta estudante e iniciou a aula no horário combinado.

Os objetivos desse encontro eram a) apresentar a função e o mecanismo da audição; b) apresentar conceitos de som; c) conceituar espiral logarítmica. A abordagem foi baseada no primeiro momento do Material de Apoio Didático (Apêndice D), que tem como título *O Sistema Auditivo e os Sons*.

A aula foi dividida em três etapas, as quais se basearam nas três fases do processo de modelar, denominadas por Biembengut (2007) de *Percepção e Apreensão, Compreensão e Explicitação e Significação e Expressão*.

Etapa 1 – *Percepção e Apreensão*

A professora iniciou a aula mostrando uma peça sintética do sistema auditivo humano e explicando as funções de cada parte e o mecanismo da audição. Os estudantes pareciam prestar atenção na explicação da professora e ficaram curiosos para tocar na peça. Enquanto a professora explicava o funcionamento do tímpano, o estudante A pediu para segurá-lo e desmontou algumas partes do ouvido, explorando cada peça.

Figura 1 – Peça sintética do ouvido humano



Fonte: a autora

Após a explicação verbal os estudantes assistiram a um vídeo que explicou o funcionamento do aparelho auditivo por meio de um desenho animado. O vídeo, nesse caso teve uma função informativa e ao mesmo tempo funcionou como apoio ao discurso da professora.

Segundo Moran (1995), o uso do vídeo na Educação desperta no estudante a curiosidade, simula a realidade, reproduz e compõe cenários desconhecidos, auxilia na análise em grupo e no desenvolvimento do senso crítico. O mesmo autor afirma:

As tecnologias são pontes que abrem a sala de aula para o mundo, que representam, medeiam o nosso conhecimento do mundo. São diferentes formas de representação da realidade, de forma mais abstrata ou concreta, mais estática ou dinâmica, mais linear ou paralela, mas todas elas, combinadas, integradas, possibilitam uma melhor apreensão da realidade e o desenvolvimento de todas as potencialidades do educando, dos diferentes tipos de inteligência, habilidades e atitudes (MORAN, 2007, p. 164).

O vídeo apresentado simula o funcionamento do sistema auditivo por meio de uma animação lúdica: os personagens são bonecos que trabalham dentro da orelha e transportam as ondas sonoras, utilizando um carrinho de mão, até serem interpretadas pelo cérebro. Esse vídeo faz parte de uma série chamada *Corpo Humano*, encontrada no site www.youtube.com. É o sétimo assunto denominado *O Ouvido*, dividido em três partes.

A partir do vídeo a professora abordou, de forma mais detalhada, a parte interna do ouvido. Explicou que as frequências sonoras são detectadas pela cóclea em zonas diferentes, de acordo com o tipo de som produzido, à medida que a frequência aumenta, estas zonas estão cada vez mais próximas da base da cóclea.

A cóclea possui um fluido que se move em uma onda líquida, convertendo a energia mecânica em energia hidráulica. A agitação do líquido coclear gera impulsos nas pequenas terminações nervosas até os centros auditivos do cérebro. Assim, a energia hidráulica transforma-se em energia elétrica.

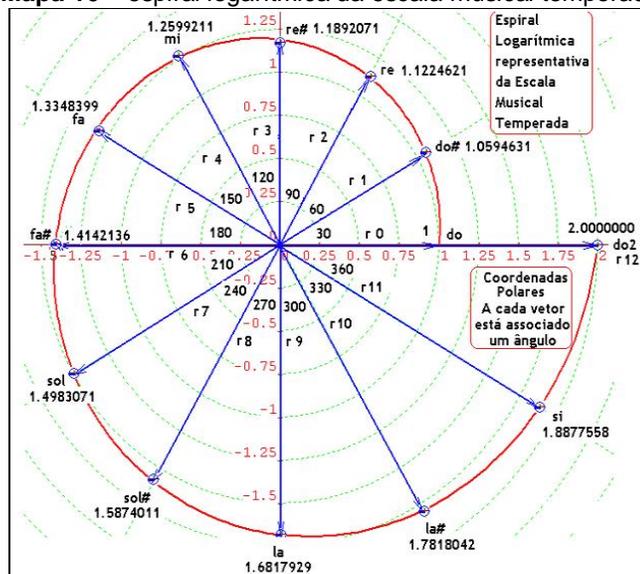
Durante o encontro a professora explicou de forma sucinta o conceito de energia e as suas transformações. No Material de Apoio Didático, a autora da pesquisa propõe que o professor de Física explore esses conteúdos.

Após estudarem o funcionamento da cóclea, os estudantes visualizaram algumas imagens que possuíam a mesma forma da cóclea, a forma de uma espiral logarítmica. Neste momento a professora definiu espiral e suas propriedades.

Etapa 2 – Compreensão e Explicação

Passada a primeira fase de *Percepção e Apreensão*, a professora mostrou aos estudantes uma espiral logarítmica representativa da escala musical temperada, e propôs que buscassem entender como ela é desenhada, com quais padrões e regularidades, e em seguida cada estudante desenhasse a sua espiral da escala temperada. O mapa 16 mostra a espiral apresentada pela professora.

Mapa 16 – espiral logarítmica da escala musical temperada

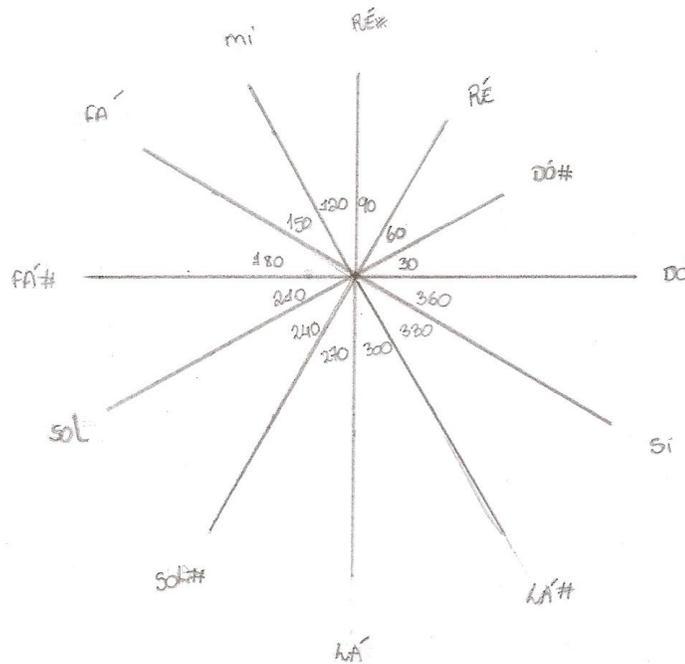


Fonte: <http://musicaeadoracao.com.br>

Os estudantes fizeram duas tentativas: inicialmente se basearam somente na ideia de que as semirretas distanciavam-se umas das outras pela mesma

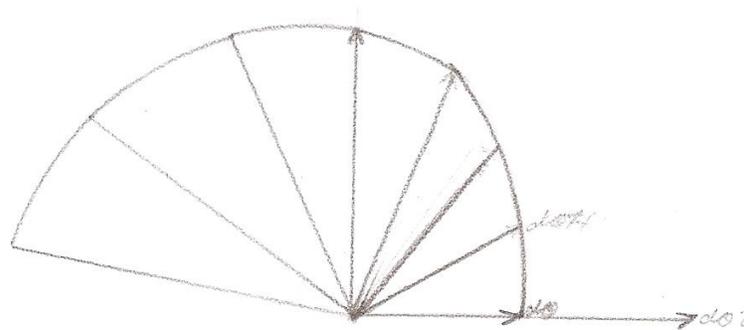
angulação e que estavam aumentando seu comprimento, porém não perceberam a proporção entre eles. Os mapas 17a e 17b mostram a primeira tentativa da estudante F e do estudante A.

Mapa 17a – Primeira tentativa espiral logarítmica – Estudante F.



Fonte: a autora

Mapa 17b – Primeira tentativa espiral logarítmica – Estudante A.



Fonte: a autora

A professora entregou-lhes uma calculadora a cada dois estudantes e insistiu que eles observassem o quanto cada semirreta estava aumentando em seu comprimento. Neste momento uma estudante fez subtrações e disse aumentar 0,0594631 no primeiro cálculo, 0,062999 no segundo, 0,0745861 no terceiro, contudo, estava em dúvida sobre seu raciocínio, afirmando serem diferentes os

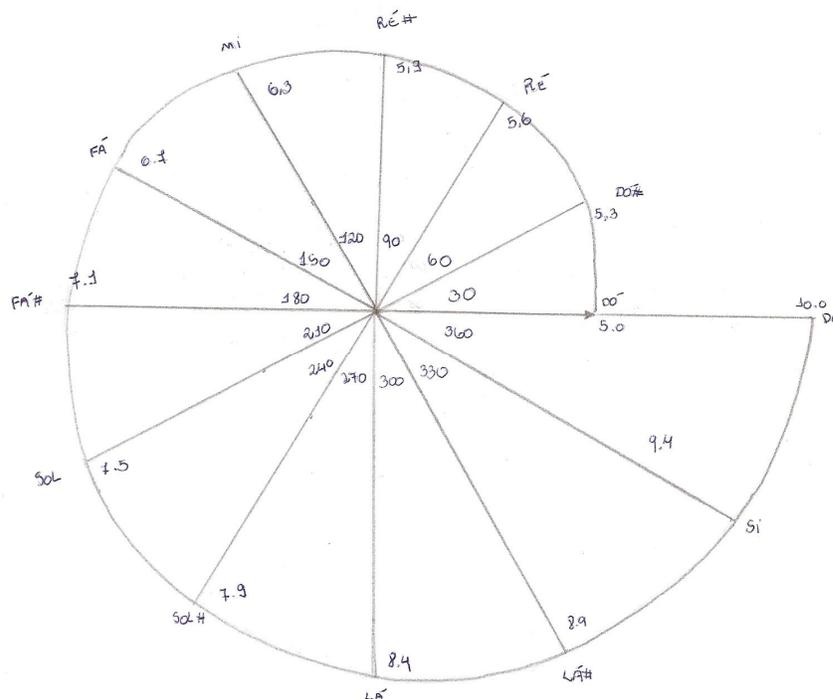
resultados. Isso levou a professora a sugerir que ao invés de subtrair, dividissem os valores. Foi então que os estudantes encontraram os mesmos resultados para todos os cálculos – 1,0594631.

A autora desta pesquisa, a partir dessa introdução, abordou conceitos como razão, proporção e sequência numérica. Aplicando exemplos e aplicações desses conteúdos teóricos.

Etapa 3 – Significação e Expressão

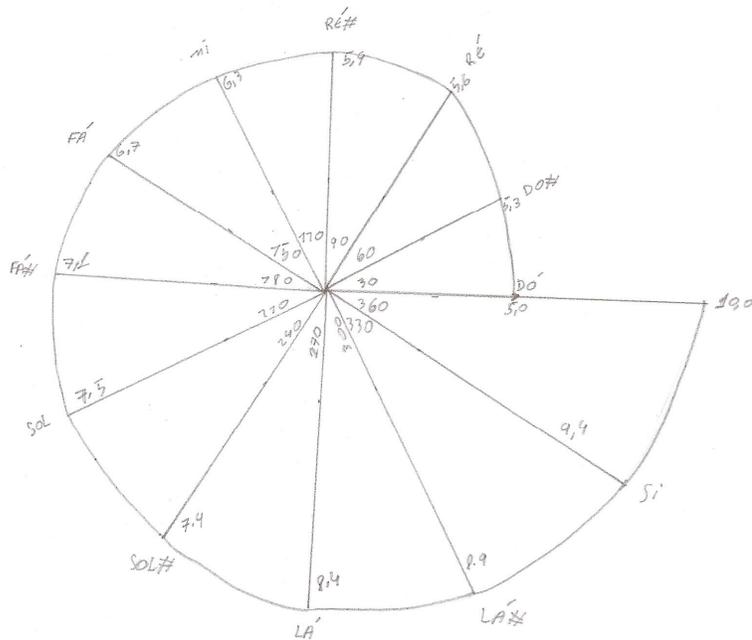
Baseados nos resultados deduzidos, os estudantes iniciaram a segunda tentativa interpretando-os e verificando a adequabilidade do padrão encontrado para a espiral logarítmica. Nessa tentativa, todos fizeram de forma padronizada utilizando a mesma medida inicial (5 cm), e a mesma razão (1,0594631). Os mapas 18a e 18b apresentam dois dos quatro resultados encontrados.

Mapa 18a – Segunda tentativa espiral logarítmica – Estudante F.



Fonte: a autora

Mapa 18b – Segunda tentativa espiral logarítmica – Estudante A.



Fonte: a autora

Assim, os estudantes testaram os conceitos abordados na etapa anterior, validando a elaboração da espiral logarítmica, de modo que todas as medidas de comprimento e angulação estavam correspondendo corretamente com a representação da escala musical temperadas.

3º encontro – dia 27 de novembro (quarta-feira)

No terceiro encontro compareceram quatro estudantes (A, C, E e F). Abordaram-se assuntos que constam nos momentos 2, 3 e 5 do Material de Apoio Didático (Apêndice D). O principal objetivo era relacionar o gráfico de uma onda sonora (de pressão por tempo) com o gráfico de uma senóide. Para isso, abordaram-se conteúdos como *oscilações*, *função seno* e *características do som*.

Da mesma forma como foi dividida a primeira aula, esta também foi baseada nas três fases da Modelação.

Etapa 1 – Percepção e Apreensão

O fenômeno a ser estudado neste encontro foi a organização de uma Música. Para que os estudantes entendessem a professora expôs alguns conceitos

que estavam envolvidos com o tema. Iniciou definindo *som* como uma vibração ou onda mecânica em um meio material. Em seguida fez a seguinte pergunta, que baseou os estudos desse encontro: *como se organiza uma Música?*

A professora propôs que inicialmente encontrassem uma definição para *Música*. Então, os estudantes e a professora discutiram e, alguns comentários sugeriram:

- Estudante A: *Música é a junção de notas.*

- Estudante F: *É, mas não só notas por notas. Não é só juntar um monte de notas sem ter um ritmo.*

- Estudante C: *Claro! Tem que saber tocar Música.*

- Estudante F: *É, tem que ter ritmo e melodia.*

- Professora: *Há pausa em uma Música?*

- Estudante C: *Lógico.*

- Professora: *Podemos chamá-la de silêncio, o que acham?*

- Estudante A: *Pode ser, mas não é um silêncio assim silencioso que não se escuta nada.*

- Estudante F: *Se é silêncio não se escuta nada.*

- Professora: *Se o silêncio for breve ou longo continua sendo silêncio, certo?*

- Estudante F: *Isso aí!*

- Professora: *Certo, então vocês concordam que temos sons e silêncio na definição de Música e que estes sons e silêncios precisam estar organizados e seguir regras?*

Estudantes: *Sim.*

Professora: *Então podemos definir da seguinte maneira: “Música é o resultado de uma organização de sons e silêncio, que seguem regras bem definidas”. O que acham?*

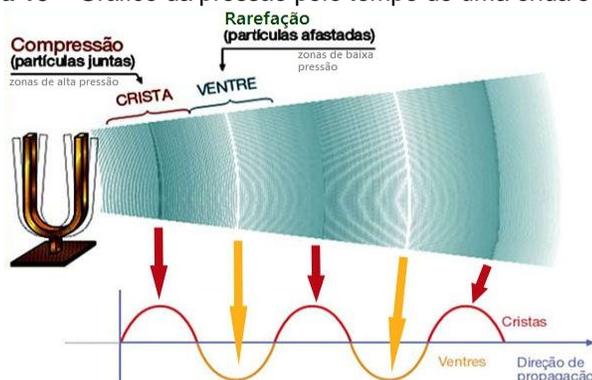
Estudante C: *É isso, tá pronto! (SIC)*

Após essa discussão, outros elementos precisaram ser definidos até que se chegasse ao gráfico da onda sonora, são eles, *oscilações*, *ondas*, *ondas longitudinais* e *ondas transversais*. Os conceitos desses elementos foram apresentados pela professora, que utilizou bibliografias da disciplina de física e alguns vídeos buscados no site www.youtube.com.

Etapa 2 – *Compreensão e Explicitação*

Feita a explanação desses conceitos, a professora apresentou a semelhança entre o gráfico da função seno com o gráfico da pressão pelo tempo de uma onda sonora, o qual mostra no seu ápice a compressão e no ventre a rarefação, conforme ilustra o mapa 19.

Mapa 19 – Gráfico da pressão pelo tempo de uma onda sonora



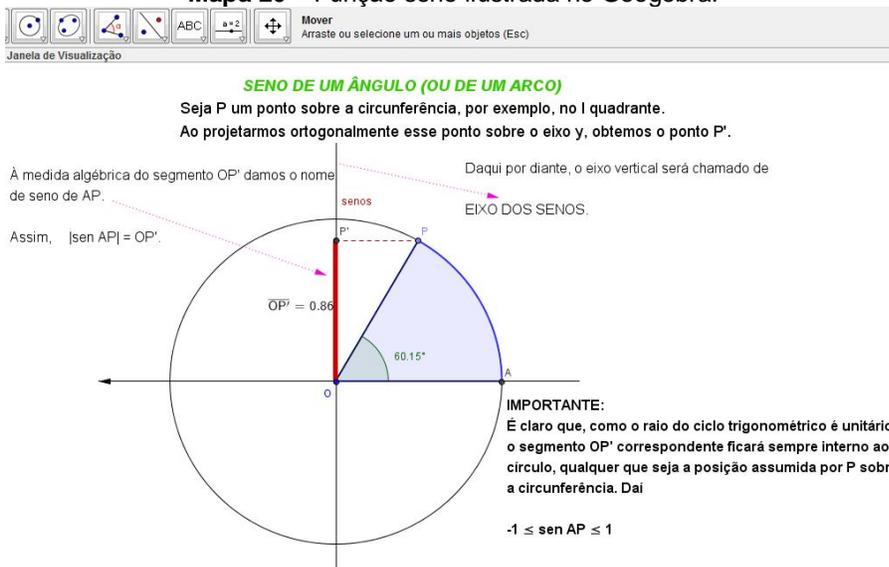
Fonte: <http://fisicoquimica2013.wordpress.com/som-e-luz>

Segundo Biembengut (2007), é na fase da *Compreensão e Explicitação* que os conteúdos curriculares e não curriculares são ensinados, contando com apresentações de exemplos análogos. Fundamentada pela teoria da mesma autora, a professora explicitou o conceito e as propriedades da função seno.

Para tanto, utilizou-se do software Geogebra para auxiliar na visualização e no entendimento das funções trigonométricas no círculo.

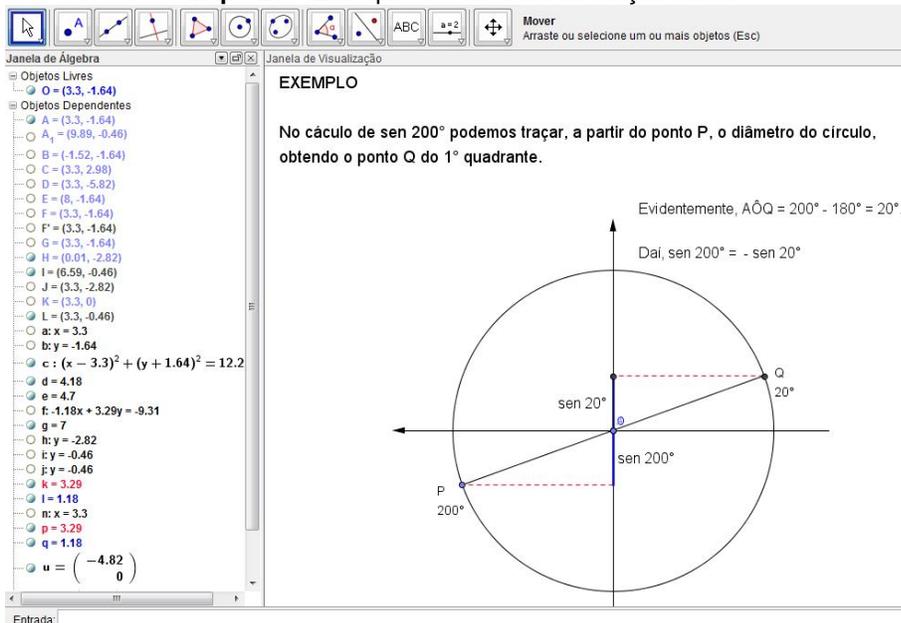
A professora desenhou no software o ciclo trigonométrico e associou os arcos aos valores na função, de forma dinâmica e fácil para entender. De tal maneira que ao movimentar o ponto que indica o arco, a medida no eixo referente ao valor do seno também se altera. Da mesma forma, apresentou-se a função cosseno. Os mapas 20 e 21 apresentam alguns exemplos expostos em sala de aula.

Mapa 20 – Função seno ilustrada no Geogebra.



Fonte: a autora

Mapa 21 – Exemplos de simetria da função seno.



Fonte – a autora

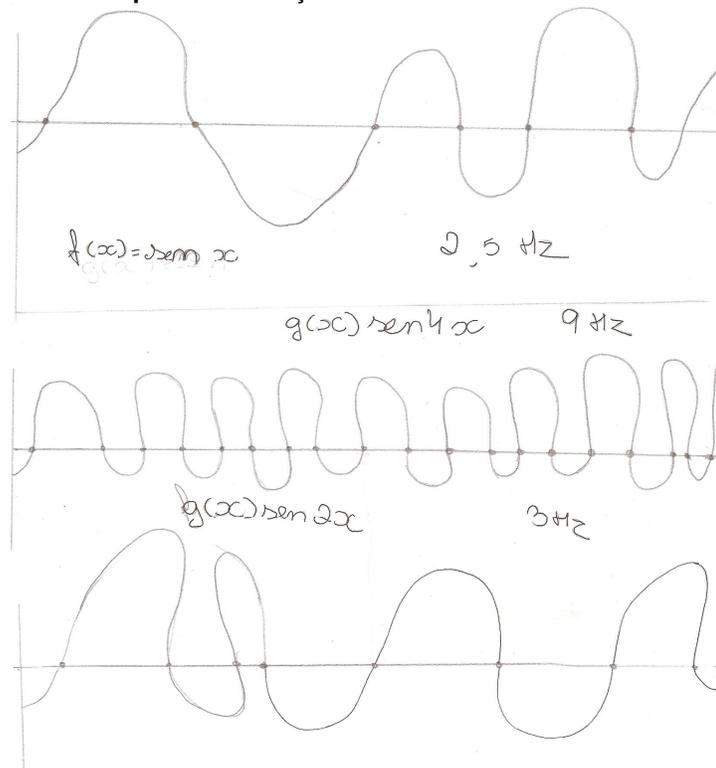
Além das representações das funções trigonométricas no círculo, foi apresentada aos estudantes a construção dos gráficos dessas funções e suas características: período, amplitude, comprimento. Essas características foram relacionadas com os elementos da onda sonora: frequência, amplitude e comprimento.

Após explanação do conteúdo matemático os estudantes resolveram alguns exercícios sobre o cálculo dos valores de seno para diferentes ângulos e diferentes quadrantes.

Etapa 3 – Significação e Expressão

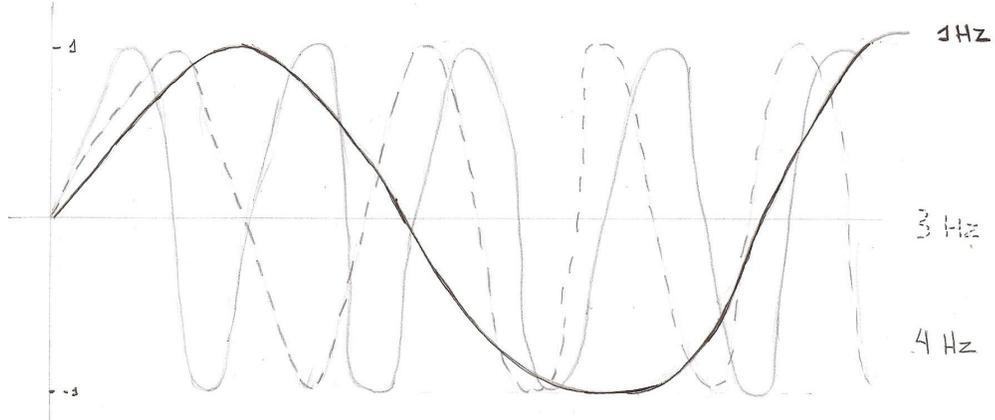
Na terceira etapa da aula a professora buscou verificar se os estudantes atribuíram significado ao conteúdo exposto e propôs que cada estudante representasse, por meio de um esboço, algumas ondas sonoras de diferentes frequências, indicando quantos *Hertz* ela possuía e apresentando a função trigonométrica que a descrevia. Os resultados estão apresentados nos mapas 22a, 22b, 22c e 22d.

Mapa 22a – Esboço ondas sonoras – Estudante C



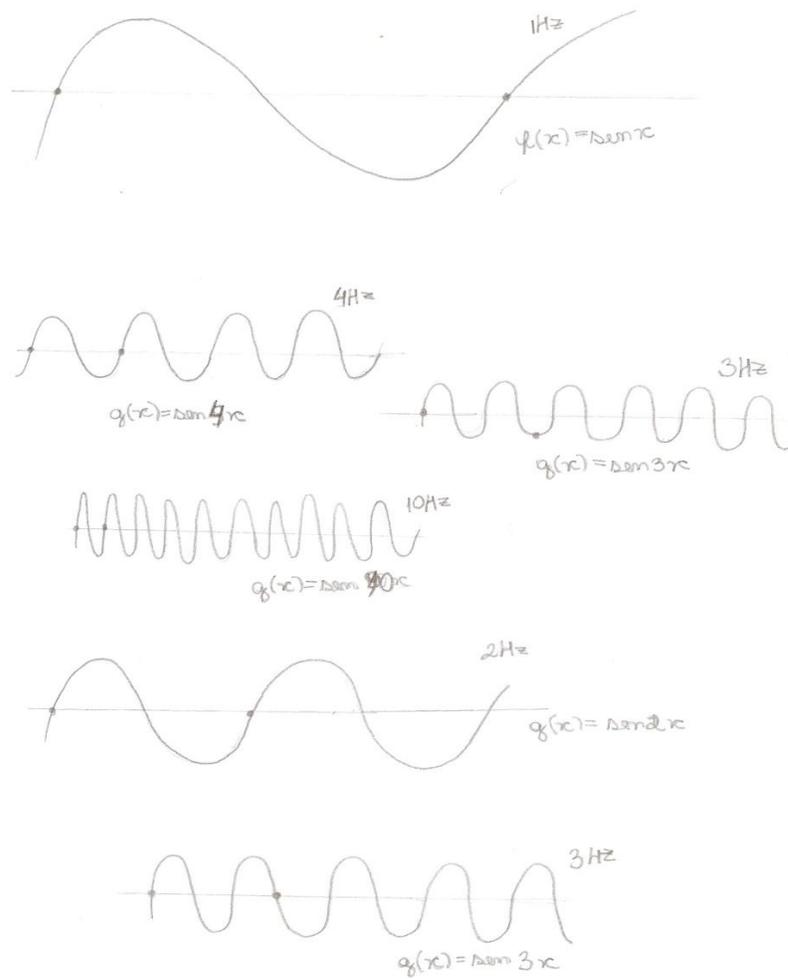
Fonte: a autora

Mapa 22b – Esboço ondas sonoras – Estudante F



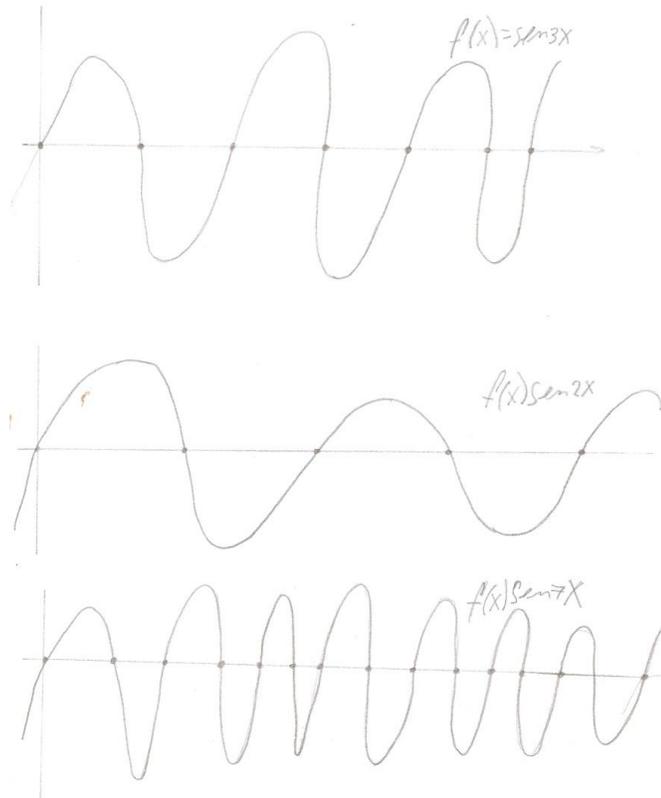
Fonte: a autora

Mapa 22c – Esboço ondas sonoras – Estudante E



Fonte: a autora

Mapa 22d – Esboço ondas sonoras – Estudante A



Fonte: a autora

4º encontro – dia 02 de dezembro (segunda-feira)

O objetivo deste encontro foi abordar os assuntos organizados no 8º momento do Material de Apoio Didático (Apêndice D), o qual busca observar o padrão formado pelas frequências de uma escala musical, definir *progressão geométrica* e relacionar esse conteúdo matemático com as frequências sonoras emitidas pela escala musical.

Inicialmente utilizou-se do vídeo como recurso sensibilizador e por meio dele buscou-se promover uma experiência prática em sala de aula, que servisse como modelo para estudo de conceitos matemáticos. De acordo com Morán (1995, p.27) “pelo vídeo sentimos, experienciamos sensorialmente o outro, o mundo, nós mesmo”, isto é possível, porque a linguagem do vídeo é dinâmica, provocando primeiro a afetividade e depois a razão. O vídeo conforme definido por Morán,

“[...] é sensorial, visual, linguagem falada e escrita. Linguagens que interagem superpostas, interligadas, somadas, não separadas. Daí a força. Somos atingidos por todos os sentidos e todas as maneiras. O

vídeo nos seduz, informa, entretém, projeta em outras realidades (no imaginário), em outros tempos e espaços” (1995, p.28).

Aliado ao vídeo apresentou-se a Música e sua relação com a Matemática, tomando a Música como “matéria-prima” para a atividade proposta, e por meio dela abordou-se conteúdos matemáticos previstos no currículo escolar, como *seqüências* e *progressões*.

Apresentação do Vídeo

A professora iniciou a atividade apresentando seguinte o vídeo: *Glass harp-Toccatà and fugue in D minor-Bach*, disponível em www.youtube.com.

O vídeo apresentado é uma apresentação da peça Toccatà and fugue in D minor de Johann Sebastian Bach, tocada por Robert Tiso em taças de cristal, com diversas alturas e espessuras, contendo diferentes quantidades de água.

A etapa 1 teve o intuito de utilizar o vídeo como sensibilizador e os cinco estudantes assistiram em silêncio e bastante atentos aos movimentos feitos pelo artista. A professora propôs que assistissem apenas alguns minutos do vídeo, por conta do tempo curto que dispunham naquele encontro, entretanto, após iniciar o vídeo todos se pronunciaram para que deixasse até o fim, pois, estavam gostando muito.

A professora decidiu então, rodar todo o vídeo, e notou que o mesmo despertou a curiosidade, tanto para os movimentos e sons que estavam passando no vídeo quanto para o novo tema que seria abordado, aguçando nos estudantes o desejo de aprofundar o assunto do vídeo. O estudante C, após encerrar a apresentação do vídeo, fez a seguinte pergunta:

- Professora, o que isso tem haver com Matemática? Nós vamos medir os copos, é isso? O conteúdo de hoje é medidas?

Para responder a pergunta a professora iniciou a primeira etapa da aula.

Etapa 1 – Percepção e Apreensão

Familiarização com o tema: A professora, então, iniciou a abordagem do tema fazendo as seguintes perguntas, relacionadas com estudos das aulas anteriores: (a) o que é som? (b) como e onde o som se propaga? (c) o que tinha de

curioso, de diferente, no vídeo que acabamos de assistir? (d) Por que o som se altera em cada copo?

O objetivo dessa etapa era a familiarização com o assunto a ser modelado, a busca por referenciais teóricos que pautassem a discussão. Segundo Biembengut, “para apreendermos a situação-problema, o fato ou o fenômeno, procuramos perceber os entes envolvidos na situação-problema. Isso nos requer um estudo de modo indireto ou direto” (no prelo).

A professora, autora desta pesquisa, esclareceu e lembrou alguns dados já familiarizados nos encontros anteriores, como a definição de som e o modo de propagação. Neste momento os estudantes A, C e D buscaram responder o que é som e participaram do seguinte diálogo:

- Estudante A: *É tudo que ouvimos?*

- Estudante C: *É, mas não esse tipo de resposta que a professora quer?*

- Professora: *C, que tipo de resposta você acha que eu quero?*

- Estudante C: *Ah professora, aquela explicação certinha que tem nos livros!* (SIC)

- Estudante D: *Vocês complicam demais, a professora só quer saber do que o som é feito, e nós já vimos várias vezes que são ondas sonoras.*

- Estudante C: *É claro que são ondas SONORAS, se é som são sonoras.*

- Estudante D: *Eu sei, você entendeu. E são aquelas ondas deitadinhas, lembra? Não são aquelas curvas. Como é o nome mesmo, professora?*

- Professora: *ondas longitudinais.*

- Estudante D: *Isso!!*

A discussão também continuou quando buscaram responder *como e onde o som se propaga*. Alguns estudantes buscaram anotações que tinham feito nas outras aulas. Percebeu-se que a maioria deles teve medo de responder errado, e a cada comentário olhavam para a professora para certificar-se de que seu comentário estava de acordo com o que haviam estudado anteriormente.

A partir das próprias questões que foram surgindo nestas discussões de reconhecimento e familiarização com o tema, a professora expôs um novo problema: *por que as pessoas escutam diferentes sons a cada toque de taça e como esses sons viram Música?*

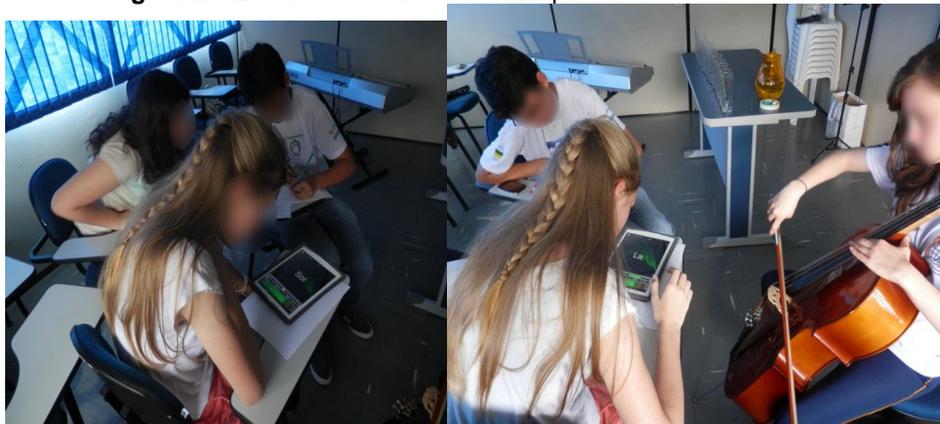
Para responder a questão, a professora propôs que os estudantes também fizessem Música nos copos, o que os levou ao espanto, dizendo que essa atividade

seria muito difícil para eles. A professora então explicou que inicialmente iriam apenas tentar alguns sons e fazer algumas experiências para entenderem como surge Música a partir dos copos.

A experimentação tem o papel de contribuir no processo de ensino e aprendizagem, conduzindo o estudante a relacionar seus novos conhecimentos com os conhecimentos existentes do cotidiano. A experimentação pode mostrar caminhos e soluções de algo desconhecido, de algo que antes era abstrato, visando o aprendizado do conteúdo teórico.

A partir desse pressuposto, uma das atividades da aula foi a reprodução do vídeo assistido, com restrições, de acordo com as possibilidades dos estudantes e do ambiente escolar. Assim, a professora entregou uma lista impressa de atividades (Apêndice G), na qual a primeira atividade foi elaborar uma tabela de frequências das notas musicais. Para isso os estudantes utilizaram um violoncelo e um aplicativo chamado *M Tools*. A estudante E tocava as notas no instrumento, enquanto a estudante F, com ajuda dos outros dois colegas, verificava no aplicativo qual a frequência de cada nota e a anotavam na lista.

Figura 2 – Estudantes verificando a frequência das notas musicais



Fonte: a autora

Após verificar e anotar a frequência de dezesseis notas musicais, na ordem da escala, os estudantes iniciaram a atividade de criar uma escala musical nos copos. O mapa 23 apresenta os materiais utilizados e os procedimentos necessários para realização da experiência.

Mapa 23 – Experiência copos

Materiais:

- 13 copos de vidro iguais;
- régua ou fita métrica;
- fita adesiva (marcadores);
- água;
- objeto para ser utilizado como baqueta;
- frequencímetro (aplicativo *M Tools*)
- tabela de frequência das notas da escala musical;
- instrumento musical.

Procedimentos:

- 1º) Encher os copos com água e bater levemente com a baqueta, testando o som que surge;
- 2º) Trocar as altura, ou seja, as quantidades de água de cada copo, e , testar novamente o som;
- 3º) Verificar qual relação o nível de água possui com o som produzido;
- 4º) Medir a frequência dos sons produzidos pelos copos com o auxílio do frequencímetro;
- 5º) Buscar equivalência das frequências dos sons produzidos nos copos com a frequência das notas da escala musical que está indicada na tabela;
- 6º) Encontradas as frequências de cada nota musical, medir qual porção de água corresponde cada nota musical. Utilizar as fitas para marcar a altura.

Fonte: a autora

A primeira etapa da experiência foi realizada pela estudante E, que testou o som que surgia de cada copo com quantidades variadas de água. A estudante utilizou apenas um critério para encher os copos: o primeiro deveria ter mais água que o segundo e este mais que o terceiro e assim sucessivamente. Este critério foi sugerido pelos seus colegas enquanto enchia os copos. O estudante C auxiliou sua colega conferindo os sons emitidos pelos copos, para isso utilizou um lápis como baqueta.

Figura 3 –Estudantes executando atividade



Fonte: a autora

Após essa verificação os estudantes responderam a seguinte pergunta: *Por que o som se altera em cada copo?* Duas das respostas foram:

- *Porque quanto menos água mais agudo e quanto mais água mais grave.*

- *Porque a quantidade de água e ar varia, quanto menos água mais agudo fica o som, aumenta o ar e assim fica mais agudo. Ou seja, o meio de propagação do som muda, por isso muda tudo, a velocidade, a frequência, etc.*

A próxima atividade foi verificar, no aplicativo citado, a frequência emitida por cada copo e compará-la com a frequência das notas musicais, tanto com a tabela que fora preenchida anteriormente quanto com um instrumento musical. Assim, os estudantes foram criando uma escala temperada, com as 12 notas existentes mais uma: o dó da escala seguinte. O objetivo de criar 13 notas musicais foi perceber a relação das frequências das mesmas notas que estão em escalas diferentes.

Figura 4 – Estudantes criando a escala musical nos copos



Fonte: a autora

A última atividade dessa fase foi preencher a tabela da lista de atividades, a qual solicitava o nível de água dos copos (altura em centímetros), a frequência emitida e a qual nota aquele copo se equivalia quando tocado com uma baqueta.

Mapa 24 – Espaço para registro dos dados coletados

<u>Copo 1</u> Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz Equivalente a nota musical: _____
<u>Copo 2</u> Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz Equivalente a nota musical: _____
<u>Copo 3</u> Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz Equivalente a nota musical: _____
<u>Copo 4</u> Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz Equivalente a nota musical: _____
<u>Copo 5</u> Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz Equivalente a nota musical: _____
<u>Copo 6</u> Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz Equivalente a nota musical: _____
<u>Copo 7</u> Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz Equivalente a nota musical: _____
<u>Copo 8</u> Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz Equivalente a nota musical: _____
<u>Copo 9</u> Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz Equivalente a nota musical: _____
<u>Copo 10</u> Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz Equivalente a nota musical: _____
<u>Copo 11</u> Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz Equivalente a nota musical: _____
<u>Copo 12</u> Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 13

Nível de água: _____ Freqüência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Fonte: a autora

Durante todo o tempo desta aula os estudantes realizaram em equipe as atividades, discutindo, dividindo as tarefas e colaborando um com os outros, o que resultou em respostas praticamente iguais.

Etapa 2 - *Compreensão e explicitação*

A segunda etapa deste encontro consistiu em relacionar o experimento da etapa anterior com o conteúdo matemático - *matematização*. Para isso, utilizou a seguinte questão como estratégia para instigar o estudante à dúvida, à inquietação: *Há um padrão numérico entre as frequências de uma escala musical. Qual é este padrão?*

O intuito foi induzir o estudante a perceber a presença de uma sequência numérica, em que cada termo a partir do segundo é igual ao anterior multiplicado por uma constante, neste caso 1,122. Assim, definir *Progressão Geométrica*.

Quando há inquietação há ânsia de responder e solucionar problemas. O conflito, com objetivos bem estruturados, provoca a curiosidade. E este fato é importante e fundamental para o estudante na busca por respostas com seus próprios meios, considerando este um agente participativo do processo de ensino e aprendizagem.

Nesta perspectiva, a professora deixou que os estudantes buscassem a resposta sozinhos, por seus próprios meios, orientou que observassem com atenção os números que anotaram referentes às frequências e às alturas da água nos copos, para verificar a relação entre eles.

Neste momento, a professora notou que não teriam tempo o suficiente para responder a questão naquela aula, pois, ainda naquela aula era preciso validar o “instrumento musical” com copos que haviam criado. Por isso, propôs que a levassem para casa e trouxessem respondida no próximo encontro.

Etapa 3 – Significação e Expressão

Para verificar e validar a escala musical formada nos copos, a professora entregou para cada estudante as partituras de duas Músicas simples (Apêndice H): *Sambalelê* e *Cai cai balão*, para que tocassem nos copos.

Inicialmente os estudantes se recusaram, justificando que seria muito difícil, mas, logo a estudante F se prontificou a testar o novo instrumento. Quando iniciou, a estudante achou que ficaria melhor escrever a partitura da Música no quadro. Neste momento, outros estudantes do Instituto estavam passando pela sala e ficaram curiosos com a agitação, vários ficaram assistindo pelo vidro que havia na divisória da sala. Uma das estudantes perguntou se poderia participar tocando seu violino, a professora autorizou e enquanto a estudante F tocava a Música *Cai cai balão* nos copos a nova estudante a tocava no violino.

Figura 5a – Validação do Instrumento criado com os copos



Fonte: a autora

Após alguns ensaios, as estudantes conseguiram tocar juntas as Músicas. No início a estudante F, que estava tocando nos copos, sentiu um pouco de dificuldade, afirmou que precisava de bastante agilidade, mas que os copos estavam soando as notas corretas. Em seguida, o estudante C se interessou e também testou o instrumento criado, tocando a mesma Música.

Figura 5b – Validação do Instrumento criado com os copos



Fonte: a autora

Os estudantes também testaram os copos comparando cada som isoladamente com as notas tocadas em um teclado disponível na sala de aula. Segundo depoimentos dos estudantes, o instrumento funcionou perfeitamente e emitiu os sons praticamente iguais aos dos instrumentos tocados por eles.

5º encontro – dia 04 de dezembro (quarta-feira)

Após o quarto encontro (segunda-feira), as secretárias do Instituto comunicaram à professora que na quarta-feira, data do próximo encontro, estava marcada uma reunião, às 17 horas, com toda a equipe e presidência do Instituto, e que ninguém poderia estar no Instituto no horário da reunião. Por esse motivo, adiantou-se o horário da aula, das 15h30min passou a ser às 15h.

Neste encontro compareceram os cinco estudantes. Somente três realizaram e levaram a atividade proposta no encontro anterior. Uma das estudantes procurou justificar dizendo que havia feito a tarefa, mas acabou esquecendo em casa, a professora falou que era importante que ela levasse a tarefa e pediu a ela que fizesse isso outro dia e deixasse com uma das secretárias do Instituto. O outro estudante não levou a tarefa, pois, não participou do encontro anterior, no qual a professora propôs a atividade.

Os objetivos deste encontro eram abordar o conteúdo de gráfico e soma de senóides, a partir de sua aplicação nos sons puros e complexos, e aplicar o questionário individual final (Apêndice I). Porém, além destes, foi preciso encerrar o conteúdo do quarto encontro que não houve tempo suficiente para tal, como explicado anteriormente.

Etapa 1 – Percepção e Apreensão

A professora iniciou retomando alguns conceitos importantes das aulas anteriores e solicitando que os estudantes expusessem as respostas da questão que resolveram como tarefa. A estudante B, não respondeu a questão. As respostas dos demais são apresentadas nos mapas 25a, 25b e 25c.

Mapa 25a – Resposta sobre padrão numérico entre as frequências – Estudante C

Há um padrão numérico entre as frequências de uma escala musical.
Qual é este padrão?

$15 \div 14,16 = 1,059322 \dots$ $13,33 \div 12,6 = 1,0579365 \dots$ $11,9 \div 11,2 = 1,0625 \dots$
 $10,6 \div 10 = 1,06 \dots$ $9,4 \div 8,9 = 1,056179 \dots$ $8,4 \div 7,9 = 1,063291 \dots$

Fonte: a autora

Mapa 25b – Resposta sobre padrão numérico entre as frequências - Estudante E

Há um padrão numérico entre as frequências de uma escala musical. 04/12/2013
Qual é este padrão?

$15 \div 14,16 = 1,059$
 $14,16 \div 13,33 = 1,062$
 $13,33 \div 12,6 = 1,057$
 $12,6 \div 11,9 = 1,058$
 $11,9 \div 11,2 = 1,062$
 $11,2 \div 10,6 = 1,056$
 $10,6 \div 10 = 1,06$
 $10 \div 9,4 = 1,063$
 $9,4 \div 8,9 = 1,056$
 $8,9 \div 8,4 = 1,059$
 $8,4 \div 7,9 = 1,063$

Aqui calculei e interessei entre as frequências desta escala musical, cheguei a um padrão numérico da escala entre 1,059 e 1,062, uma média.

Fonte: a autora

Mapa 25c – Resposta sobre padrão numérico entre as frequências - Estudante F

Há um padrão numérico entre as frequências de uma escala musical.
Qual é este padrão?

~~$26,16 \div 115 = 0,05733944954$~~

$15 \div 14,16 = 1,059322$

PADRÃO = 0,15

Fonte: a autora

Verificou-se que os três estudantes buscaram um padrão entre as alturas da água nos copos e não entre as frequências como foi solicitado. Entretanto, chegaram a um mesmo resultado: *progressão geométrica com razão 1,0593 aproximadamente*, o que não é coincidência, pois, estas medidas estão relacionadas com a frequência sonora emitida pelos sons nos copos, de modo indiretamente proporcional: quanto mais água menor a frequência e, quanto menos água maior a frequência.

O estudante C encontrou valores aproximados nas divisões, mas tentou explicar para a professora o porquê:

- *Professora, nós anotamos os valores das medidas, mas pode ser que estejam aproximados também, porque é difícil de “pegar” bem certinho a altura da água, e tinha uma diferença no fundo dos copos que era difícil de ver. Eu acho que por isso que o meu não deu bem certo.*

O raciocínio do estudante estava correto. Talvez o mesmo ocorresse com as frequências, pois, a maioria delas é representada por um número racional infinito, assim, os cálculos serão sempre aproximados.

O mesmo ocorreu com a estudante E. A estudante F fez apenas uma conta, que estava correta, porém, escreveu que o padrão era 0,15. A aluna não explicou como chegou a esse valor e nem o porquê.

Etapa 2 - Compreensão e Explicação

Matematização - A professora relacionou as respostas dos estudantes ao conceito de *Progressão Geométrica (PG)*. Definiu as sequências das frequências sonoras e das alturas da água nos copos como Progressão Geométrica bem como a constante – 1,0593 – como *razão*. A partir daí, com o objetivo de oportunizar a dedução do termo geral de uma PG, os estudantes buscaram resolver atividades e perguntas como: qual a frequência da nota Si duas escalas acima.

No início sentiram dificuldade, mas discutiram juntos e encontraram a solução multiplicando a frequência conhecida por 1,0593 até a frequência que estavam buscando, o que gastou bastante tempo. A professora, explicou que poderiam deduzir um método mais rápido para encontrar as frequências desde que conhecessem uma delas.

Os estudantes fizeram algumas tentativas, mas não descobriram a fórmula do termo geral de uma PG. Por conta do pouco tempo que possuíam, a professora resolveu mostrar-lhes a fórmula e lhes apresentou um exemplo. Após a abordagem deste conteúdo curricular finalizou-se o assunto da aula anterior.

Biembengut afirma que as três fases do processo de modelar não são disjuntas,

por exemplo, na segunda fase, na medida em que estamos comparando, analisando os dados a fim de formulá-lo, por muitas vezes, temos que retornar a primeira. Conhecimento e habilidades que aquilatam a cada pesquisa que realizamos: em cada atividade experimental, em cada estudo, em cada questão que queremos entender, aprimorar, inferir, produzir outros entendimentos (no prelo).

Para cumprir com os objetivos do quinto encontro, a professora precisou voltar para a primeira etapa do processo da Modelação, a fim de conceituar termos fundamentais na abordagem dos próximos conteúdos.

Etapa 1 – Percepção e Apreensão

A questão que deu subsídio a aplicação do conteúdo foi: *Será que os sons que ouvimos possuem apenas ondas representadas pela função $y = \sin x$?* A partir desta questão a professora definiu sons puros e sons complexos.

Iniciou-se uma discussão a cerca das representações das ondas sonoras das notas musicais e da junção delas na formação de uma música. A professora explicou que as notas, tocadas isoladamente, representam os sons puros e, os sons emitidos pela junção delas são sons complexos.

Com o auxílio de uma apresentação no *Prezi*, a professora apresentou estes conceitos, os quais são propostos pelo Material de Apoio Didático (Apêndice D) no sétimo momento.

Etapa 2 - Compreensão e explicitação

Matematização – Após a familiarização com o tema a professora relacionou o conceito de sons complexos com a soma de senóides. Com o auxílio do software *Geogebra* e do aplicativo *Oscium IMSO2*, a professora mostrou os resultados da junção de duas ondas que representam sons puros.

Além disso, os estudantes puderam ouvir o som emitido por duas ondas de som puro, quanto tocadas juntas e, perceber o que ocorre com a amplitude, a intensidade e a frequência desta nova onda, por meio do aplicativo *Oscillator*.

Conforme consta no sétimo momento do Material de Apoio Didático (Apêndice D) proposto pela autora desta pesquisa, apresentou-se a fórmula da soma de duas ondas senos, bem como um exemplo de sua aplicação. Por falta de tempo, os estudantes não tiveram oportunidade de calcular ou de deduzir a fórmula, por isso, a professora mostrou a eles.

A autora da pesquisa iria iniciar a terceira etapa, a significação e expressão, quando a secretária do Instituto interrompeu a aula dizendo que a reunião iria ser antecipada e que nenhum estudante poderia estar no prédio. Neste momento, a professora ficou muito preocupada, pois, aquele era o último encontro e ainda precisava aplicar o questionário final, a fim de avaliar todo o processo.

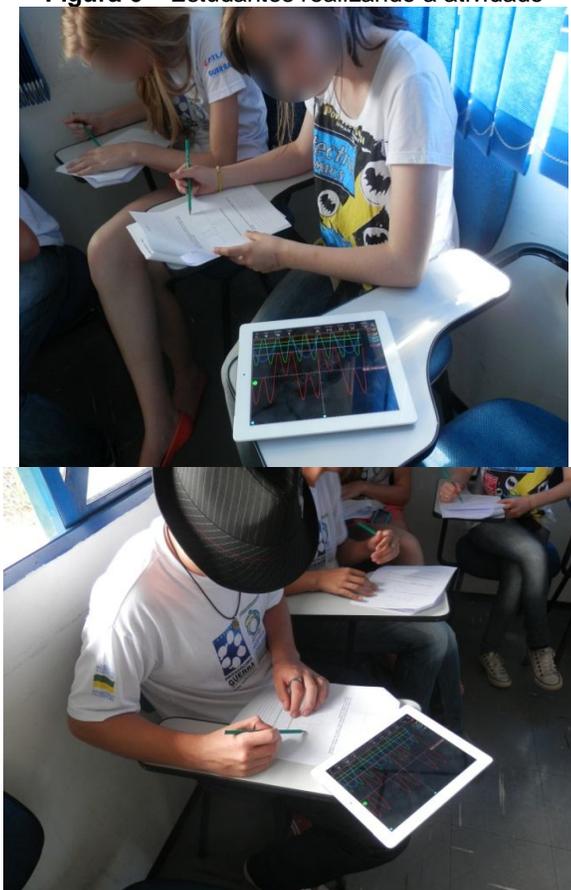
A preocupação da professora foi visível, o que fez com que os estudantes percebessem e comesçassem a sugerir soluções. Um deles sugeriu que iniciassem a avaliação na sala, pois ainda tinham quinze minutos e, finalizassem no pátio do Instituto. Todos concordaram e a professora entregou as atividades finais para cada estudante.

Etapa 3 – Significação e Expressão

Com os conceitos abordados e compreendidos, é necessária a validação dos métodos encontrados. Para isso, fez-se alguns testes, utilizando o mesmo método para outras situações, e, verificando a relevância e a adequação do mesmo.

Por conta da falta de tempo, considerou-se como a terceira etapa, especificamente deste encontro, uma das questões do questionário final: *Produza no osciloscópio (aplicativo Oscium iMSO2) a soma de duas ondas sonoras de frequência 30Hz e 90Hz, com mesma amplitude. Desenhe o resultado encontrado e indique a função seno desta onda.*

Figura 6 – Estudantes realizando a atividade



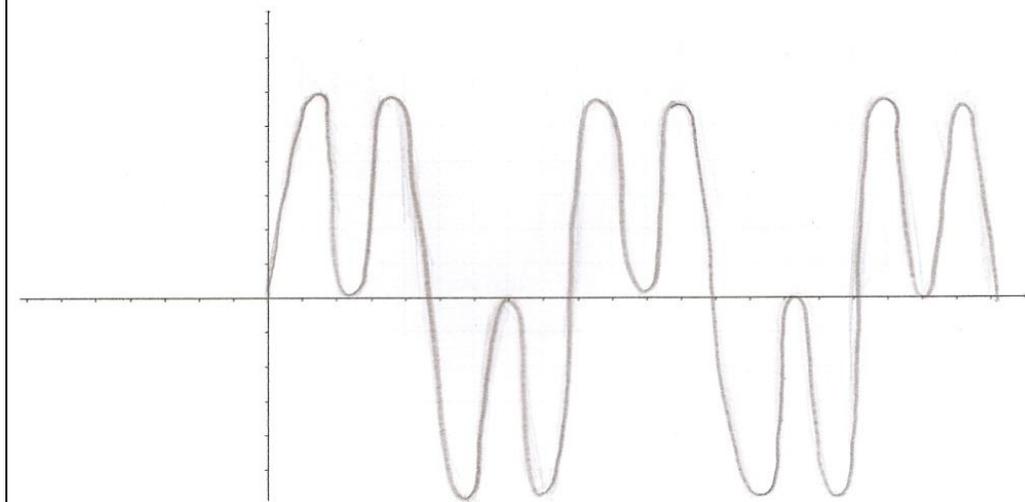
Fonte: a autora

Todos os esboços foram muito parecidos e a professora considerou correta a resolução da atividade e sua montagem no osciloscópio bem como a interpretação do resultado. O mapa 26 apresenta a resposta da estudante E.

Após resolver esta questão, os estudantes ficaram curiosos e realizaram vários testes no aplicativo disponível. Alteraram uma das frequências, a amplitude, as duas frequências, etc. Esses testes lhes ajudaram na interpretação dos resultados da soma de ondas representadas pela função seno, por exemplo, generalizaram que a frequência do som complexo obtido pela junção de dois sons puros é igual a menor das duas frequências. O mesmo ocorre com todas as funções seno, em qualquer contexto.

Mapa 26 – Esboço da junção de duas ondas sonoras - Estudante E

14) Produza no osciloscópio (utilize o aplicativo Oscium iMSO2) a soma de duas ondas sonoras de frequências 30Hz e 90Hz, com mesma amplitude. Desenhe o resultado encontrado.



Fonte: a autora

3.4 CONSIDERAÇÕES DESTE MAPA

Nesse capítulo apresentou-se a descrição das atividades elaboradas e aplicadas com estudantes do EM que participam de oficinas de Música em horários contrários às aulas regulares e às oficinas de instrumentalização, nas dependências dos Institutos Prosdócimo Guerra e Theóphilo Petrycoski. Apresentou-se neste mapa a descrição das ocorrências durante a aplicação do Material de Apoio Didático, elaborado pela autora da pesquisa, o qual utiliza-se da Modelação Matemática como método de ensino.

A seguir, destacam-se as principais ocorrências de cada encontro, apontando os fatos que identificou-se a percepção matemática dos estudantes:

1º encontro – dia 20 de novembro de 2013 (quarta-feira)

Neste encontro não houve a classificação das três fases da Modelação, pois, foi apenas destinado à aplicação um questionário inicial (Apêndice E). O qual teve o

intuito de conhecer os estudantes colaboradores e verificar seus conhecimentos prévios, para comparação futura, após realizadas todas as atividades programadas.

Durante a resolução do questionário surgiram algumas dúvidas e discussões sobre o conteúdo das questões. E, a partir das discussões foi possível identificar a percepção matemática dos estudantes quando relacionaram a *função seno* com as demais *funções trigonométricas: cosseno e tangente*.

Também neste encontro, acordou-se sobre as datas e horários dos encontros seguintes (segundas e quartas-feiras, das 15h30min às 17h30min).

2º encontro – dia 25 de novembro de 2013 (segunda-feira)

No segundo encontro os conteúdos abordados foram: *ouvido humano e energia e suas transformações*. Compareceram quatro estudantes. O encontro foi dividido em três etapas baseadas nas três fases da Modelação.

Explicou-se o funcionamento do ouvido humano, com o auxílio de uma peça sintética do ouvido e por meio de um vídeo de desenho animado o qual explicou o funcionamento do aparelho auditivo.

Dedicou-se maior atenção à parte interna do ouvido. Pois, partir do funcionamento da cóclea, abordou-se o conceito de *energia* e de *transformação de energia*, bem como o conceito matemático de *espiral* e *espiral logarítmica*.

Os estudantes desenharam uma *espiral logarítmica*, em duas tentativas, analisando os padrões e regularidades de um modelo o qual representava a escala musical temperada. Possibilitando a abordagem dos seguintes conceitos matemáticos: *razão, proporção e sequência numérica*.

A *espiral* foi validada na segunda tentativa, após a percepção dos conceitos matemáticos abordados, de modo que as medidas de comprimento e angulação correspondiam corretamente com o modelo da escala musical temperada.

3º encontro – dia 27 de novembro de 2013 (quarta-feira)

Quatro estudantes compareceram ao terceiro encontro, no qual abordaram-se os seguintes conteúdos: *oscilações, função seno e características do som*. A questão que baseou os estudos desse encontro foi: *como se organiza uma Música?* E para respondê-la, algumas reflexões foram feitas sobre a definição de Música,

chegando a seguinte conclusão: *Música é o resultado de uma organização de sons e silêncio, que seguem regras bem definidas.*

Na sequência apresentou-se a semelhança entre *função seno* e *onda sonora*. E, com o auxílio do software Geogebra, o conteúdo matemático foi abordado, seu conceito, características, gráficos e propriedades.

Para verificar se os estudantes atribuíram significado ao conteúdo matemático exposto, estes representaram algumas *ondas sonoras* de diferentes frequências e indicaram qual a *função trigonométrica* que a descrevia.

4º encontro – dia 02 de dezembro de 2013 (segunda-feira)

No quarto encontro buscou-se observar o padrão formado pelas frequências de uma escala musical, definir *progressão geométrica* e relacionar esse conteúdo matemático com as frequências sonoras emitidas pela escala musical. Para isso, apresentou-se um vídeo de uma peça musical de Sebastian Bach, tocada por Robert Tiso em taças de cristal.

Com o intuito de familiarizar os estudantes com o assunto a ser modelado, abordou-se os temas partindo das seguintes questões: (a) *o que é som?* (b) *como e onde o som se propaga?* (c) *o que tinha de curioso, de diferente, no vídeo que acabamos de assistir?* (d) *por que o som se altera em cada copo?*

Os estudantes participaram de discussões para responder essas questões e, a partir dessas discussões um problema surgiu: *por que as pessoas escutam diferentes sons a cada toque de taça e como esses sons viram Música?* Assim, em busca de respostas, os estudantes reproduziram (de acordo com as possibilidades do ambiente⁴) o vídeo, montando um “instrumento musical” com os copos, anotando as alturas das quantidades de água e das frequências musicais emitidas por cada copo (com o auxílio do aplicativo *M Tools*). A partir desses dados foi possível a abordagem do conteúdo matemática de *progressão geométrica*.

Para verificar e validar a escala musical formada nos copos, os estudantes tocaram duas Músicas, a partir de partituras fornecidas pela autora da pesquisa (Apêndice H), além de testarem o som de cada copo com o som emitido no teclado

⁴ Os estudantes substituíram as taças de cristal por copos de vidro de mesmo tamanho; Utilizaram uma baqueta de madeira ao invés do toque com as mãos, já que o material dos copos dificulta a emissão de sons apenas com os dedos; Após a montagem do experimento, tocaram músicas com notas bastante simples, pois, não possuíam habilidade com aquele novo “instrumento”.

eletrônico disponível naquela sala de aula. Concluindo que o instrumento emitia sons praticamente iguais aos dos instrumentos já conhecidos por eles.

5º encontro – dia 04 de dezembro de 2013 (quarta-feira)

No quinto encontro estavam presentes cinco estudantes. Parte deste encontro foi destinada à finalização de atividades do encontro anterior. O objetivo principal do quinto encontro foi definir *sons puros* e *complexos* e, relacioná-los *soma de senóides*. Para isso, utilizou-se o software *Geogebra* e o aplicativo *Oscium iMSO2* para mostrar os resultados da junção de duas ondas que representam *sons puros*.

Para validação destes conceitos e aplicações, os estudantes resolveram a seguinte atividade: Produza no osciloscópio (*Oscium iMSO2*) a soma de duas ondas sonoras de frequência 30Hz e 90Hz, com a mesma amplitude. Desenhe o resultado encontrado e indique a função seno desta onda. Além de concluir a atividade corretamente, os estudantes fizeram diversos testes parecidos com esta questão.

CAPÍTULO IV – MAPA DE ANÁLISE

Neste capítulo apresenta-se o Mapa de Análise. O Mapa de Análise busca a compreensão dos dados empíricos no contexto vivificado. Conforme Biembengut (2008, p.120), “o propósito de uma pesquisa centra-se na possibilidade de se compreender um fenômeno, um fato, para assim buscar meios para descrever e prever”.

Essa análise foi elaborada a partir das etapas vivenciadas anteriormente, aproximando os dados empíricos obtidos na aplicação da pesquisa e descritos no Capítulo III – Mapa de Campo, dos estudos teóricos sobre Relação da Matemática com a Música, Modelagem Matemática na Educação - Modelação e, Percepção, apresentados no Capítulo II – Mapa Teórico.

Como o objetivo dessa pesquisa é *analisar a percepção matemática de estudantes do EM por meio da Modelação Matemática na Música*, aplicou-se atividades pedagógicas de Matemática envolvendo conceitos de Música e processo auditivo para estudantes colaboradores/voluntários e interessados no tema. Neste mapa está exposta a interpretação e avaliação dos entes envolvidos na pesquisa, com o intuito de “transformar dados e informações em conhecimento e saberes” e “determinar valor, julgar, apreciar” (BIEMBENGUT, 2008, p.120).

Baseado nas teorias de percepção propostas por Alexander Romanovich Luria (1902 – 1977), cujo texto⁵ foi publicado em quatro tomos em Moscou, entre 1967 e 1970, e nos princípios gestálticos – psicologia da forma a qual teve início no século XX e tem como principal representante o psicólogo Max Wertheimer (1880 – 1943), estabeleceram-se as categorias de análise e as nomeiam como: **atenção**, **similaridade** e **relação**. A saber:

(1ª) **atenção**: trata-se da captação do fato novo ou inesperado pelos órgãos dos sentidos influenciados pelo interesse, necessidade, valores;

(2ª) **similaridade**: trata-se de como um ente (ou conhecimento) é acoplado a outro a partir de elementos similares;

(3ª) **relação**: trata-se da tomada de consciência do ente (ou conhecimento) e de implicações resultantes.

⁵ A coleção *Curso de Psicologia Geral* é uma síntese de diversos trabalhos de Alexander Luria, publicada em português entre 1991a e 1994a. Nesta coleção Luria resgata o pensamento e a linguagem vigotskiana, descrevendo as atividades mentais sintéticas como percepção, movimento e ação, atenção, memória, fala e pensamento.

O capítulo está dividido em dois itens: 4.1 Das Evidências no Percurso: **atenção**, **similaridade** e **relação** e 4.2 Deste ponto para outro futuramente.

4.1 DAS EVIDÊNCIAS NO PERCURSO: *atenção, similaridade e relação*.

A análise foi elaborada segundo dados empíricos obtidos nas práticas pedagógicas descritas no Capítulo III, seção 3.3 Como Chegar: Descrição da Aplicação das Atividades, p.80-107. Os dados empíricos tratam-se de expressões dos estudantes durante as respostas das atividades desenvolvidas. Essas expressões são perguntas, comentários, sugestões e respostas as atividades. O grupo de voluntários para a aplicação desta pesquisa foi composto de seis estudantes que cursavam o EM, e em horários contrários às aulas regulares e às aulas de Música do Instituto Prosdócimo Guerra e Theóphilo Petrycoski da cidade de Pato Branco (PR).

O primeiro encontro utilizou-se para tornar os estudantes cientes da pesquisa, portanto colaboradores e corresponsáveis. Aplicou-se um questionário (Apêndice E), para verificar os conhecimentos prévios dos estudantes. Estas respostas farão parte das considerações avaliativas deste mapa. Nos demais quatro encontros, foram aplicadas as atividades pedagógicas de Matemática e Música seguindo as três fases da Modelação, propostas por Biembengut (2014).

Como o Material de Apoio Didático elaborado para aplicação dessa pesquisa está proposto em três fases (conforme Capítulo II, seção 2.1.2 Modelagem Matemática na Educação – Modelação, p.37), e considerando que cada um dos quatro encontros (para obtenção dos dados empíricos) foi desenvolvido seguindo essas três fases, para a análise, fez-se uma síntese das ocorrências por fase a partir das categorias de análise propostas: **atenção**, **similaridade** e **relação**.

Como exposto, o primeiro encontro foi dedicado a aplicação do questionário inicial com o objetivo de verificar e comparar os conhecimentos prévios dos estudantes, e apesar deste encontro não seguir as três fases da Modelação, analisou-se as declarações deste a partir das categorias propostas.

Assim, notou-se que ao responder questões sobre a *função seno*, os estudantes identificaram **relação** entre a palavra *seno* com *coosseno* e *tangente*: lembraram que estudaram essas funções simultaneamente e que havia

similaridade entre elas, mas não souberam esboçar o gráfico da função nem informar o seu período. Ou seja, ao falar de *seno* eles se remeteram às demais *funções trigonométricas* (*coosseno* e *tangente*), mas, inicialmente, não lembraram o seu conceito.

Segundo Gazzaniga & Heatherton (2005), a **atenção** seletiva opera em múltiplos estágios de processamento perceptual. Ou seja, o processamento dos estímulos aos quais se presta **atenção** é maior se comparado ao dos estímulos “não-atendidos”, contudo, os estímulos não-atendidos também são processados.

Ao aproximar a teoria sobre **atenção seletiva** dos dados empíricos obtidos nas questões sobre a *função seno*, a autora da pesquisa interpreta que houve estímulo na percepção dos estudantes, mesmo esses não tendo o conceito de *função seno* bem definido. Pois, “embora um sujeito não consiga repetir uma mensagem à qual não prestou atenção, ele ainda pode ter processado seus conteúdos” (GAZZANIGA e HEATHERTON, 2005, p.178).

A seguir apresentam-se, por fase da Modelação, a análise a partir da síntese das ocorrências dos demais quatro encontros:

1ª – Análise da *Percepção e Apreensão*

Segundo Biembengut (no prelo), a primeira fase do processo de modelar agrupa as seguintes etapas: “percepção no reconhecimento da situação-problema” e “apreensão na familiarização com o assunto modelado”. Nos quatro encontros, nesta primeira fase – *Percepção e Apreensão* – a autora da pesquisa buscou familiarizar os estudantes com os temas: *funcionamento do ouvido humano; energia e suas transformações; oscilações; características do som; ondas sonoras; frequência sonora da escala musical; sons complexos e puros*. Discutiram-se conceitos, definições e conteúdos específicos envolvidos em cada encontro.

Ao abordar esses temas, tratou-se de conteúdos de Biologia, Física e Matemática, seguindo, assim, as recomendações de Biembengut (no prelo), que afirma que “ao utilizar a Modelação como método, ultrapassa-se os limites de uma só disciplina”. Para explicar um fenômeno é necessário conhecer todos os entes envolvidos na situação-problema, e assim, “é dada ao estudante a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, instigando seu interesse e aguçando seu senso crítico e criativo” (BIEMBENGUT, no prelo).

Utilizou-se duas abordagens distintas para a apresentação do funcionamento do *ouvido humano*: a primeira, a partir da explicação verbal, auxiliada por uma peça sintética do sistema auditivo; e, a segunda, por meio de um vídeo de desenho animado, o qual informa sobre o funcionamento do ouvido.

Foi possível identificar que houve interesse por parte dos estudantes, na medida em que prestavam **atenção** mostrando-se curiosos, principalmente com a peça sintética do ouvido. Para Davidoff, presta-se “especial atenção a eventos que são novidade, inesperados, intensos ou mutantes” (1983, p.215). O interesse pela peça sintética e suas partes influenciou a **atenção** desses estudantes.

Ao buscar uma manifestação da percepção matemática dos estudantes, a autora desta pesquisa os questionou sobre a existência de conteúdos matemáticos nos assuntos abordados. E, após refletir por alguns instantes o estudante **A** arriscou um comentário: *Vimos que tem Física aí, então com certeza tem Matemática, pois, para fazer todos os cálculos de Física e essas transformações de energia que você explicou, precisamos da Matemática, mas não sei exatamente o quê.* O estudante **B** comentou que percebeu a **relação** do funcionamento do ouvido humano com a Música, já que é preciso o ouvido para ouvi-la, mas, nesta fase, ainda não notou **relação** com a Matemática.

A partir desses comentários foi possível identificar que os estudantes não se atentaram à semelhança da cóclea com uma espiral logarítmica.

Uma experiência comum sugere que as pessoas frequentemente percebem sem atentar ou tomar consciência. Ao dirigir nota-se que é possível ir de um lugar para outro sem ter depois a menor lembrança do trajeto. É como se um piloto automático estivesse ligado. Não obstante, absorveu-se e processou-se informações sobre as condições do trajeto (DAVIDOFF, 2001, p.145).

A etapa da *Percepção e Apreensão* foi organizada de tal modo que os estudantes pudessem participar das definições e conceitos que seriam tratados. Assim, para abordar os seguintes conteúdos teóricos: *oscilações, função seno e características do som*, a autora da pesquisa iniciou questionando-os: *Como se organiza uma Música?* Conforme discussões descritas no Capítulo III – Mapa de Campo, a participação foi bastante expressiva, sendo que três dos quatro estudantes presentes buscaram responder a questão. Após discussões a professora apresentou a seguinte definição, presente no Material de Apoio Didático (Apêndice

D): *Música é o resultado de uma organização de sons e silêncio, que seguem regras bem definidas.*

De modo espontâneo e em tom de brincadeira um estudante fez o seguinte comentário: *se existem regras na Música só pode ser agora que entra a Matemática.* O comentário foi dito sem qualquer influência da autora da pesquisa, o estudante percebeu a presença da Matemática imediatamente após a definição de Música. Esta autora julgou relevante o comentário, na medida em que o objetivo da pesquisa esperava a percepção matemática deles.

Existe uma forte semelhança entre o pensamento matemático e o pensamento musical no que diz respeito às buscas por padrões e regularidades. A matemática estuda a regularidade presente nas formas e nos números. Na música, busca-se a percepção das regularidades sonoras e temporais. A linguagem musical fundamenta-se na articulação entre determinados padrões rítmicos, melódicos e harmônicos que podem ser percebidos e manipulados. O próprio som musical só é reconhecido como nota afinada devido a uma regularidade interna dos pulsos sonoros (GRANJA, 2010, p.98).

Nos conteúdos de *oscilações e ondas*, os estudantes logo perceberam a relação com a Matemática. A professora, após definir *ondas longitudinais e transversais* e relacionar com *ondas sonoras*, novamente questionou-os sobre a presença da Matemática. Facilmente, responderam: *aí a Matemática deve estar presente em algum conteúdo de gráfico.* Os estudantes não perceberam **relação** com *funções*, tão pouco com *funções trigonométricas*, contudo sabiam que os eixos horizontal e vertical poderiam representar os eixos das abscissas e das ordenadas no plano cartesiano, isto é, perceberam **similaridade** entre as representações de ondas com o sistema cartesiano.

O cérebro humano, segundo abordagem gestáltica, possui capacidade de organizar informações com o intuito de extrair significado das informações recebidas. Assim, baseados na **similaridade** dos eixos horizontal e vertical mostrados na representação da *onda sonora*, os estudantes organizaram as informações atribuindo significado de gráfico em um sistema cartesiano.

Com o intuito de subsidiar a abordagem do conteúdo de *progressão geométrica*, presente na grade curricular de Matemática, a autora da pesquisa mostrou um vídeo o qual retratou uma peça musical de Johann Sebastian Bach (1685 – 1750)⁶ tocada em taças de cristal. Identificou-se a **atenção** dos estudantes a

⁶ Conforme Nota 1, p.34.

partir do interesse em assistir a algo tão novo e inesperado: das taças soavam notas musicais idênticas àquelas tocadas em seus instrumentos.

Segundo Luria (1991), os fatores que determinam a **atenção** são divididos em dois grupos: o primeiro caracterizado por *estímulos externos*, e o segundo referente aos fatores da atividade do *próprio sujeito*.

No que diz respeito à **atenção** dos estudantes para o vídeo das “taças musicais”, nota-se a presença de ambos os grupos de fatores, sendo que a **atenção** foi atraída por um fator externo, sendo este, a “*novidade do estímulo* ou diferença entre este e outros estímulos” (LURIA, 1991, p.3), ou seja, tocar uma Música em um instrumento nada convencional se distingue acentuadamente de fatos conhecidos e atrai **atenção**.

Nota-se também, nesse fato, a presença do segundo grupo de fatores que influenciam a **atenção** – *atividades do próprio sujeito*, pois, nesse fato, a **atenção** foi influenciada pelo interesse dos estudantes sobre sua percepção musical.

Segundo Luria (1991), as necessidades e interesses possuem caráter de fatores motivacionais complexos que se formam no processo da história social. Ou seja, os estudantes que se interessam por Música distinguem entre toda a informação que lhes chega que se refira a teoria ou prática musical, “inibindo simultaneamente os sinais secundários que não pertencem ao seu campo de interesses” (p.5).

A questão que orientou os estudos foi: *por que as pessoas escutam diferentes sons a cada toque de taça e como esses sons viram Música?* Em busca de uma resposta os estudantes iniciaram a reprodução do vídeo: primeiramente, verificaram a frequência de cada nota musical com auxílio da tecnologia (aplicativo *M tools* no tablet) e de um instrumento musical conhecido (violoncelo), instigou a **atenção** dos estudantes quando perceberam números para representar cada frequência musical, e **similaridade** com proposições matemáticas. A **relação** entre as frequências e o conteúdo de *progressão geométrica* só foi percebida na fase seguinte.

As demais atividades, descritas no Mapa de Campo, foram criar uma escala musical nos copos e anotar os dados obtidos (nível de água em centímetros, frequência emitida por cada copo em *hertz* e, a qual nota musical equivalia a batida no copo) em uma tabela. Solicitou-se aos estudantes que observassem atentamente

e respondessem se existia alguma **relação** tanto entre as alturas em cada copo como entre as frequências anotadas, as quais formam uma *progressão geométrica*.

Segundo Davidoff (2001), o ato de perceber requer seletividade e, essa seleção é feita apenas com episódios aos quais devotam-se **atenção**. As respostas dos estudantes referentes ao padrão numérico existente entre as frequências sonoras⁷ mostram que houve *atenção seletiva*, pois, filtraram certas características que permitiram a percepção de que cada valor dividido pelo anterior resulta no mesmo quociente. Essas respostas, apresentadas integralmente no Capítulo III, asseguram que os estudantes perceberam a **relação** matemática existente nas frequências das notas musicais ordenadas em escala.

Ainda nessa etapa de *Percepção e Apreensão* preconizou-se a aplicação da *função seno*. Os estudantes verificaram, por meio do aplicativo *Oscillator*, diferentes representações das *ondas sonoras*, percebendo assim que não haviam apenas ondas sonoras representadas pela função $y = \text{sen } x$. Essa percepção auxiliou a abordagem do conteúdo de *soma de senóide* e sua **relação** com *ondas complexas*.

2º – Análise da *Compreensão e Explicitação*

Segundo Biembengut (no prelo), é na segunda fase da Modelação que se ensinam os conteúdos programáticos da disciplina. Na aplicação do Material de Apoio Didático, a fase da *Compreensão e Explicitação* requeria os conteúdos: *espiral logarítmica, razão e proporção, função seno, gráficos, progressão geométrica, soma de senóides*.

Propôs-se que cada estudante reproduzisse uma espiral da escala temperada, em duas tentativas. Na primeira tentativa alguns estudantes perceberam a **similaridade** entre as angulações das semirretas e concluíram que as semirretas distanciavam-se umas das outras pela mesma angulação: 30°. Também notaram que seus comprimentos aumentavam na medida em que aumentava a angulação, entretanto, inicialmente não perceberam a *proporção* existente nesses comprimentos.

⁷ Embora os estudantes tenham feito a tarefa utilizando os valores dos níveis de água dos copos, o mesmo resultado vale para as frequências sonoras.

Conforme a Teoria da Gestalt, nesse fato os estudantes perceberam de maneira organizada e com mais simplicidade os elementos da espiral logarítmica em uma forma estável e coerente.

A autora da pesquisa ensinou-lhes o conceito de *proporção* e, partindo do pressuposto que perceber e conceber articulam-se no processo de conhecimento, utilizou exemplos, analogias e casos concretos sobre o conteúdo teórico. Após algumas tentativas na calculadora, a estudante F encontrou o resultado correto da *razão* dos comprimentos.

Segundo Marina, “não existem compartimentos estanques na subjetividade humana. Vemos a partir do que sabemos, percebemos a partir da linguagem, pensamos a partir de modelos construídos a partir de casos concretos” (1995, p.62).

Na abordagem gestáltica à percepção da forma, os estudantes organizaram informações de objetos “ocultos parcialmente” (a proporção entre as semirretas) com o objetivo de extrair significado das informações recebidas (a proporção entre as semirretas significou o aumento proporcional das notas da escala temperada).

Para explicar os conceitos e as propriedades da *função seno*, a autora dessa pesquisa utilizou-se de exemplos e aplicações da função na representação do *gráfico* da pressão de uma *onda sonora*. Nesse momento alguns estudantes mostraram expressões de dúvidas, outros de satisfação, estes comentaram já ter estudado esse conteúdo antes, mas que visualizando no Geogebra e imaginando que a *função seno* pode ser uma *onda sonora*, tudo ficava mais simples.

Verificou-se na análise que ao perceber a **relação** da *função seno* com a *onda sonora* os estudantes que já haviam estudado algo sobre a *função seno* sentiram-se mais confortáveis com a explicação e ainda declararam que o conteúdo estava esclarecido naquele momento, atribuindo, assim, significado à explicação verbal da autora da pesquisa. Para Luria (1991), “é de grande importância para a percepção a experiência anterior e a percepção material das imagens correspondentes” (p.69).

Segundo Granja, “a percepção depende fundamentalmente do modo pelo que se entende o mundo”. Perceber e conceber articulam-se mutuamente no processo de conhecer. A percepção não está desvinculada de um contexto de significação e **relação**. O conhecimento é resultado de uma articulação contínua entre os processos perceptivos e os momentos de elaboração conceitual (GRANJA, 2010, p.53).

Outro objetivo da segunda etapa da Modelação foi o de induzir os estudantes a perceber a presença de uma *progressão geométrica* nas frequências das notas musicais, anotadas por eles. A partir da questão: *Há um padrão numérico entre as frequências de uma escala musical. Qual é este padrão?*, os estudantes perceberam a presença de uma sequência numérica, em que cada termo a partir do segundo é igual ao anterior multiplicado por uma constante. O que permitiu a **relação** da sequência das frequências sonoras com o conceito de *progressão geométrica*.

A **relação** do conceito de *sons complexos e puros* com a *soma de senóides* também foi tema para a fase de *Compreensão e Explicitação*. A percepção matemática dos estudantes nessa etapa foi induzida por meio da percepção visual na utilização de aplicativos no *tablet*.

Os estudantes perceberam, nas representações das *ondas sonoras* no *tablet*, que existem diferentes representações das mesmas, percebendo assim que não haviam apenas ondas sonoras representadas pela função $y = \sin x$. A partir dessa percepção a autora da pesquisa definiu *sons puros e complexos*.

De acordo com a lei de Prägnanz gestáltica, nesse aspecto os estudantes organizaram o conteúdo matemático: *soma de senóides*, a partir das *ondas sonoras complexas* representadas no aplicativo (arranjo visual dado) e identificadas por diferentes cores e tamanhos, percebendo assim, “os elementos discrepantes numa forma estável e coerente, em vez de como uma miscelânea de sensações ininteligíveis e desorganizadas” (STERNBERG, 2000, p.120).

Com o uso dos aplicativos os estudantes perceberam e comentaram as possíveis alterações de uma onda sonora e de uma senóide ao juntar dois sons de frequências diferentes, por exemplo.

3ª fase – *Significação e Expressão*

Biembengut define a terceira fase da Modelação como o momento de interpretação e avaliação dos resultados, bem como verificação da adequabilidade da solução. A autora propõe que se faça a “interpretação da solução e a verificação se o modelo é válido ou não – significação” (BIEMBENGUT, no prelo). Sendo assim, baseados nos resultados da fase da *Compreensão e Explicitação*, os estudantes avaliaram as atividades realizadas.

Inicialmente, verificaram que a espiral logarítmica feita por eles não condizia com o modelo exposto pela autora da pesquisa e que não haviam seguido as regras explicitadas na segunda fase. Foi, então, que a autora retornou a fase anterior, reforçando os conceitos envolvidos e, os estudantes fizeram mais uma tentativa.

Nessa nova tentativa identificou-se o foco de **similaridade** da espiral logarítmica desenhada por eles com a espiral da escala temperada (bem como com o modelo da cóclea, estudada na fase de *Percepção e Apreensão*). Verificou-se que todos os estudantes perceberam e compreenderam os conteúdos expostos e necessários para a reprodução de uma *espiral logarítmica*. Todos a reproduziram de igual forma, com os mesmos ângulos e medidas.

Ao fundamentar-se na lei da Gestalt, nota-se que por meio da **similaridade** os estudantes criaram formas mais estáveis e consistentes a partir de um determinado padrão (ATKINSON, 2002).

A análise da *Significação e Expressão* se deu, também, por meio da representação de ondas sonoras com frequências diferentes. A maioria dos estudantes representou e fez a **relação** da *função seno* com a *frequência* em Hertz das *ondas sonoras*.

O processo de internalização descrito por Vygotsky⁸ supõe que inicialmente a **relação** do indivíduo com o objeto de conhecimento ocorre externamente, isto é, de forma intersíquica ou interpessoal, e depois são internalizadas e passam a fazer parte do repertório do sujeito em um nível intrapsíquico ou intrapessoal. Primeiro aprende-se, observando a ação, depois a incorpora-se aos conhecimentos (COELHO, 2003).

Os estudantes utilizaram os conteúdos e as informações repassadas nas etapas anteriores para fazer esboços das *ondas sonoras*. Para indicar alterações da *função seno* era necessário alterar o comprimento de onda a partir de um comprimento fixo definido inicialmente para a função $y = \text{sen } x$. Entretanto, a estudante C do grupo não fixou o comprimento inicial, mas, percebeu que a cada valor que se multiplicava a variável x era necessário aumentar o período.

⁸ Lev Semenovitch Vygotsky (1896 – 1934), russo, gradou-se em Direito e Medicina. Estudou Literatura e História. Seu interesse pela Psicologia levou-o a uma leitura crítica de toda produção teórica de sua época, nomeadamente as teorias da "Gestalt", da Psicanálise e o "Behaviorismo". Teve diversas experiências na docência, o que levou-o ao estudo dos distúrbios de aprendizagem. Seu interesse pela Medicina estava associado à manutenção do grupo de pesquisa ("troika") de neuropsicologia com Alexander Luria e Alexei Nikolaievich Leontiev. As suas principais contribuições à defectologia estão reunidas no livro "Psicologia Pedagógica".

A aproximação e a **similaridade** da Música com as *funções trigonométricas* contribuíram com a significação desse conteúdo e corroborou a ideia de que as funções periódicas podem ser representadas por uma *soma de funções seno* ou *coosseno* (GRANJA, 2010).

Além dessas avaliações, a terceira etapa da Modelação teve o intuito de verificar e validar a escala musical formada nos copos. Para isso, testaram-se cada som emitido pelos copos comparando-os com os sons equivalentes emitidos pelo teclado disponível na sala de aula. Os sons foram percebidos praticamente iguais e, os estudantes espantaram-se com o resultado encontrado, sendo esse a emissão de sons praticamente idênticos aos dos instrumentos tocados por eles.

Novamente, identificou-se a **similaridade** ao criar uma escala musical inusitada (nos copos) a partir de um determinado padrão, fato este que segue as leis da Gestalt, pois, possui todos os traços de uma percepção integral estruturalmente organizada (LURIA, 1991).

Uma peça musical não é apenas um fluxo de sons elementares, e sim uma rede organizada hierarquicamente de sons, motivos, frases, passagens, seções movimentos, etc. – por exemplo, intervalos temporais cujos limites perceptivos são amplamente determinados pela natureza dos sons e as relações que se produzem entre eles (TENNEY & POLANSKY p. 205, 1980).

As *ondas sonoras* possuem propriedades que as distinguem, assim, é possível perceber cada nota que forma um acorde e ouvir sons individuais que formam os *sons complexos*. Os estudantes perceberam os sons nos copos, sendo que, a percepção auditiva é composta por sons, o que implica na **relação** de ondas sonoras com experiências subjetivas do ser humano (DAVIDOFF, 2001).

Os estudantes tocaram uma Música com os copos por meio de uma partitura sugerida pela autora da pesquisa (Apêndice H). Eles sentiram dificuldade no início, sendo que faltava habilidade para manusear e “tocar os copos”, contudo, após alguns testes conseguiram tocar toda a Música e acompanhar com batucadas e com um violino.

Essa etapa valida também as etapas anteriores desse encontro, considerando que o instrumento nos copos foi criado por meio das informações e conhecimentos adquiridos na primeira e segunda etapa da aula. Ou seja, se o instrumento foi criado de forma satisfatória, com todas as notas coincidindo com

seus verdadeiros sons, ocorreu, pois, as etapas anteriores foram suficientemente cumpridas.

A etapa de *Significação e Expressão*, atribuiu-se uma das questões do questionário final, na qual os estudantes reproduziram a soma de duas ondas sonoras de frequências 30Hz e 90Hz, com o auxílio do aplicativo *Oscium IMSO2*. O resultado esboçado por eles foi igual a representação gráfica da soma das funções $g = \text{sen } x$ e $h = \text{sen } 3x$.

A **similaridade** associada a dois objetos somente indicará uma representação quando estabelecida uma **relação** de comparação de um objeto com outro (SANTAELLA, 1998). Dessa forma, na maioria dos fatos os estudantes, a partir da **atenção**, identificaram a **similaridade** dos conceitos matemáticos com temas de Música e estabeleceram **relação** entre eles e suas implicações na Música, tomando consciência desses conhecimentos.

4.2 DESTE PONTO PARA OUTRO FUTURAMENTE

Esta pesquisa de mestrado teve como objetivo geral *analisar a percepção matemática de estudantes do EM por meio da Modelação Matemática na Música*. As questões que guiaram o estudo foram: *Como e em que medida a Modelagem Matemática e a Música pode levar estudantes do EM a perceber os conceitos matemáticos? E, qual a contribuição de atividades didáticas de Modelação Matemática na Música para o ensino de Matemática no EM?* A expectativa foi responder, por meio da análise, *como a Modelação Matemática na Música pode favorecer a percepção matemática de estudantes de EM?*

Para tanto, utilizou-se de estudos e apontamentos teóricos sobre Matemática e Música (tema da atividade pedagógica), Modelagem Matemática na Educação (tema da pesquisa) e, Percepção (tema de análise), bem como dos dados empíricos advindos da aplicação da proposta pedagógica. A aplicação foi feita com seis estudantes de Música, voluntários, em horários contrários às aulas regulares e às aulas de Música, nos Institutos Prosdócimo Guerra e Theóphilo Petrycoski na cidade de Pato Branco (PR). Realizaram-se cinco encontros, nos quais aplicou-se uma proposta pedagógica com base na Modelação Matemática.

Para aplicação e análise, a autora desta pesquisa elaborou um Material de Apoio Didático (Apêndice D) que reúne aspectos fundamentais da relação da Matemática com a Música e utilizou-se da Modelação como método de ensino. Assim, buscou-se, em cada encontro, abordar as três fases da Modelação, propostas por Biembengut (no prelo): *Percepção e Apreensão*, *Compreensão e Explicitação* e, *Representação e Expressão*. As três fases da Modelação tiveram o intuito de oportunizar o estudante a fazer pesquisa, proporcionando o aprendizado de conteúdos, a interpretação de situações-problemas e a resolução destes. Além de integrar conhecimentos de diferentes áreas.

Ao interpretar e avaliar os entes envolvidos nesta pesquisa, baseando-se nas teorias de percepção, estabeleceram-se três categorias de análise: **atenção**, **similaridade** e **relação**. Embora, as categorias **similaridade** e **relação** estiveram presentes, com maior frequência na 2ª (*Compreensão e Explicitação*) e na 3ª (*Representação e Expressão*) fases, todas as categorias foram identificadas simultaneamente durante as três fases da Modelação.

Observou-se que o motivo pelo qual as categorias **similaridade** e **relação** apareceram mais nas últimas fases foi que, na primeira fase, os estudantes estavam se familiarizando com os temas envolvidos e não ainda não conheciam os conceitos e conteúdos que seriam abordados nas fases seguintes. Ou seja, somente na formulação dos problemas, do modelo e na resolução (2ª e 3ª fases), os estudantes perceberam a **similaridade** e a **relação** dos entes envolvidos com aqueles conceitos abordados na primeira fase.

O resultado da pesquisa mostrou que, por meio da Modelagem Matemática, os estudantes levantaram hipóteses, observaram, refletiram, interpretaram, solucionaram problemas e, assim, perceberam na Música conteúdos teóricos da Matemática. Foi possível identificar a percepção dos estudantes nas três fases da Modelação, concluindo, assim, que a partir da Modelação Matemática na Música os estudantes perceberam, por meio das categorias citadas, os conceitos matemáticos envolvidos no tema Música, o que contribui para o desenvolvimento destes conteúdos no EM. Recomenda-se que este estudo tenha continuidade e seja desenvolvido com um maior número de estudantes e ainda, que se apliquem todos os momentos do Material de Apoio Didático elaborado para esta pesquisa, buscando assim verificar e validar a proposta por completa.

REFERÊNCIAS

- ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e Música: pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Escrituras Editora, 2003. 333 p.
- ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.
- AIUB, Mônica. **Interdisciplinaridade: da origem à atualidade**. O mundo da Saúde, São Paulo, v. 30, n.1, p. 107-116, 2006.
- ATKINSON, Rita L. **Introdução à psicologia de Hilgard**. Porto Alegre: Artmed, 2002.
- BASSANEZI, Rodney C. **Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2006.
- BECKER, Rosane Nunes. **Musicalização: da descoberta à consciência rítmica e sonora**. 2.ed. Ijuí: UNIJUÍ, 1985. 128p.
- BENBASAT, I.; GOLDSTEIN, D. K.; MEAD, M. **The Case Research Strategy in Studies of Information Systems**. MIS Quarterly, 1987.
- BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem Matemática como Método de Ensino Aprendizagem de Matemática em cursos de 1o e 2o graus**. 1990. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP, 1990.
- _____. Modelagem Matemática & Etnomatemática: Pontos (In)Comum. In: I Congresso Nacional de Etnomatemática. São Paulo, 2000. **Anais...** São Paulo, 2000. CD-ROM.
- _____. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática**. 2. ed. – Blumenau: edifurb, 2004. 114p.
- _____. **Mapeamento da pesquisa educacional**. Ed. Ciência Moderna: Rio de Janeiro, 2008. 148p.
- _____. **Mapeamento das pesquisas sobre modelagem matemática no ensino brasileiro: análise das dissertações e teses desenvolvidas no Brasil**. Revista Dynamis, 2008. n. 14, vol. 1, p. 54-61.
- _____. Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Básica. In: **Revista Tópicos Educacionais**. Recife, 2012. v.1, p.12-20.

_____. **Modelagem Matemática no Ensino Fundamental**. Edifurb. Blumenau, 2014.

_____. no prelo.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2007.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. Ed. Contexto: São Paulo, 2009. 127p.

BLUM, Werner. **Introduction for the un-Initiated Reader**. In: **Modelling and Applications in Mathematics Education – The 14th ICMI Study**. Estados Unidos, 2007.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução a teoria e aos métodos**. Porto. Porto Editora, 1994.

BRAGHIROLI, Elaine Maria; BISI, Guy Paulo; RIZZON, Luiz Antônio; NICOLETTO, Ugo. **Psicologia Geral**. 9ª ed. Porto Alegre: Editora Vozes, 1990.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretária da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 2000.

_____, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília: MEC/SEF, 2000b.

_____, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 05 dez. 2012.

_____, Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf Acesso em: 05 dez. 2012.

BRÉSCIA, Vera Lúcia Pessagno. **Educação Musical: bases psicológicas e ação preventiva**. São Paulo: Átomo, 2003.

COELHO, S.M. . **A alfabetização na perspectiva histórico social**. Cadernos de Formação do Pedagogo Cidadã, São Paulo, p. 01-15, 2003.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: Da realidade à ação reflexões sobre educação (e) matemática**. São Paulo: Summus Editorial, 1986, 115p.

DAVIDOFF, Linda L. **Introdução à Psicologia**. 3ª ed. São Paulo: Makron, 2001.

GARDNER, Howard. **Estruturas da mente: A teoria das inteligências múltiplas**. Artmed. Porto Alegre, 1994.

GARDNER, Howard. **Inteligências Múltiplas: A Teoria na Prática**. Artmed. Porto Alegre, 1995. 257p.

GAZZANIGA, Michael S.; HEATHERTON, Todd F. **Ciência Psicológica: Mente, Cérebro e Comportamento**. Porto Alegre: Artmed, 2005.

GRANJA, Carlos Eduardo de Souza Campos. **Musicalizando a escola: música, conhecimento e educação**. Escrituras. São Paulo, 2010. 157p.

HESSEN, Johannes. **Teoria do Conhecimento**. Trad. António Correia. 7 ed. Ed. Arménio Amado. 1980.

KAISER, Gabriele; LEDERICH, Carl; RAU, Vin. Theoretical Approaches and Examples for Modelling in Mathematical Education. In: BERINDERJEET, Kaur; JAGUTHSING, Dindyal. **Mathematical Applications and Modelling**. Singapore: Word Scientific, 2010. p. 219-246.

LIPSCOMB, Scott D. The Cognitive Organization of Musical Sound. In: HODGES, D. (Ed.). **Handbook of Music Psychology**. San Antonio: IMR Press, 1999.

LORENZATO, Sérgio. **Educação infantil e percepção matemática**. Autores Associados. Campinas, 2006. 197p.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

LURIA, A. R. **Curso de Psicologia Geral: Sensações e Percepção: Psicologia dos Processos Cognitivos**. Vol II. 2ª ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1991.

MARINA, José Antônio. **Teoria da Inteligência Criadora**. Caminho da Ciência: Lisboa. 1995.

MORAN, José Manuel. **O Vídeo na Sala de Aula**. In: Revista Comunicação & Educação. São Paulo, ECA-Ed. Moderna. 1995. Disponível em: <<http://www.eca.usp.br/prof/moran/vidsal.htm>>. Acesso em 12 dez. 2013.

MORAN, José Manuel. **Desafios na Comunicação Pessoal**. 3ª Ed. São Paulo: Paulinas, 2007.

RODRIGUES, José Francisco. **A matemática e a música**. Lisboa, PT. 200?. 15p. <http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus_99.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2008.

SANTAELLA, Lucia. **A Percepção: uma teoria semiótica**. 2ª ed. São Paulo: Experimento, 1998.

STERNBERG, Robert J. **Psicologia Cognitiva**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

TENNEY, James; POLANSKY, Larry. **Temporal Gestalt Perception in Music**. Journal of Music Theory, vol 24, n. 2, p.205 – 242, 1980.

YIN, Robert. **Case Study Research: Design and Methods**. 2 Ed. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications, 1994.

APÊNDICE A – Solicitação de Autorização

SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO

Eu, Ana Laura Bertelli Grams, professora de Matemática, venho por meio desse documento solicitar ao presidente do Instituto Prosdócimo Guerra e Theóphilo Petrycoski, José Aldir Vendrusculo, permissão para o desenvolvimento de uma pesquisa, como parte do mestrado em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUC-RS.

O objetivo da pesquisa é analisar a percepção matemática de estudantes do Ensino Médio por meio da Modelação Matemática na Música. Para isso, torna-se necessário a colaboração de estudantes, no sentido de realizar atividades previamente preparadas. Estas atividades serão desenvolvidas com estudantes convidados, formando um grupo de aproximadamente 10 voluntários. Os encontros devem ocorrer em horários contrários às aulas de música, previstos para as tardes de segundas e quartas-feiras, das 15h30min às 17h30min, em um número mínimo de cinco, nas dependências do Instituto. Os instrumentos para coleta de dados consistem na aplicação de atividades matemáticas por meio da Modelagem Matemática.

Comprometo-me em não expor o nome dos estudantes e, também em vista dos propósitos do estudo, os procedimentos a serem realizados, as garantias de confidencialidade, de esclarecimentos permanentes e a isenção de despesas para o Instituto.

Nestes termos, solicito a autorização.

Pato Branco - PR, 01 de novembro de 2013.

Ana Laura Bertelli Grams
Mestranda PUC/RS

APÊNDICE B – Autorização para pesquisa

INSTITUTO PROSDÓCIMO GUERRA e
THEÓPHILO PETRYCOSKI

AUTORIZAÇÃO

Eu, Aldir Vendrusculo, presidente do Instituto Prosdócimo Guerra e Theóphilo Petrycoski, autorizo o desenvolvimento da pesquisa da mestranda Ana Laura Bertelli Grams, nas dependências do Instituto, nos horários previamente combinados.

Pato Branco - PR, 01 de novembro de 2013.

Aldir Vendrusculo
Presidente

APÊNDICE C – Carta-Convite e Termo de Consentimento

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Gostaria de convidá-lo a colaborar com a pesquisa que estou desenvolvendo junto ao curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUC-RS).

Esta colaboração implica em participar de 5 (cinco) encontros presenciais, no Instituto Prosdócimo Guerra em horário combinado. Os encontros serão no turno da tarde, nos dias **18 e 25 de novembro e 2 e 9 de dezembro de 2013** das **15h30min às 17h30min**.

As informações pessoais obtidas por meio desta pesquisa terão sigilo, bem como o nome dos estudantes não serão divulgados. A participação na pesquisa, isenta o pesquisador em arcar com custos de transporte e alimentação dos colaboradores. Informo ainda que a pesquisa conta com a autorização da Direção do Instituto Prosdócimo Guerra.

Os pais que desejarem melhor esclarecimento antes de assinar o termo podem contatar com a professora ou com responsável no Instituto Prosdócimo Guerra.

Pesquisador: Profa. Esp. Ana Laura Bertelli Grams

Orientadora: Profa. Dra. Maria Salett Biembengut

Eu, _____, responsável legal pelo estudante _____, aluno do Instituto Prosdócimo Guerra, declaro ter sido informado(a) e autorizo a sua participação, como voluntário na pesquisa em desenvolvimento da professora Ana Laura Bertelli Grams, para a conclusão do curso de Mestrado no programa de Educação em Ciências e Matemática da PUCRS.

Pato Branco, PR, 13 de novembro de 2013.

Responsável pelo estudante

APÊNDICE D – Material de Apoio Didático

Sistema Auditivo e os Sons



Objetivos:

- Apresentar a função e o mecanismo da audição;
- Apresentar conceitos de som.
- Conceituar espiral logarítmica.

Como ouvimos?

Quando falamos algo o ar vibra, e esta vibração produz um *som* que pode ser captado por outra pessoa ou animal.

O órgão sensorial que predomina as sensações **auditivas** é o **ouvido**.

Nosso ouvido é composto por três partes, e cada parte tem uma função específica para interpretar os sons, são elas:

- *Ouvido externo*: capta o som do ambiente e leva-o para dentro do aparelho auditivo.
- *Ouvido médio*: transforma a energia de uma onda sonora em vibrações internas da estrutura óssea, formando uma onda de compressão, a qual provoca o deslocamento do tímpano para frente e para trás, fazendo-o vibrar na mesma frequência da onda. Assim, o tímpano transforma as vibrações sonoras em **vibrações mecânicas**¹.
- *Ouvido interno*: transforma a energia da onda de compressão dentro de um fluido em impulsos nervosos para serem transmitidos ao cérebro. Esse fluido é o líquido coclear, que se move em uma onda líquida ao longo da cóclea, convertendo a energia mecânica em **energia hidráulica**.

Observação

Neste momento o professor de **FÍSICA** pode explorar conceitos e transformações de **Energia** (mecânica, hidráulica, elétrica.)



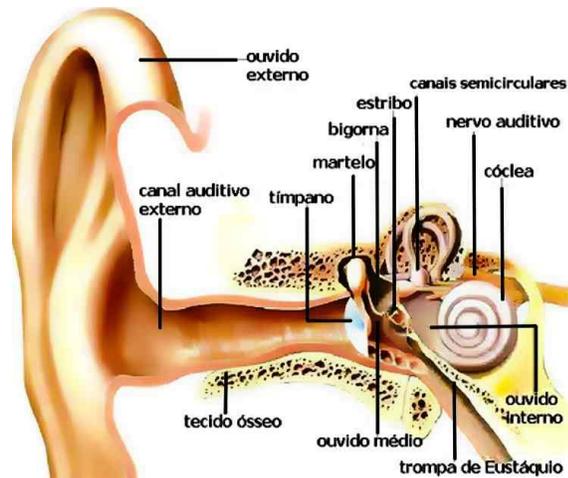


Figura 1 – Ouvido Humano
 Fonte: www.portalsaofrancisco.com.br

As frequências sonoras são detectadas pela cóclea em zonas diferentes, de acordo com o tipo de som produzido. À medida que a frequência aumenta, estas zonas estão cada vez mais próximas da base da cóclea. Na figura seguinte é possível observar as diferentes zonas dos máximos e mínimos da excitação da cóclea.

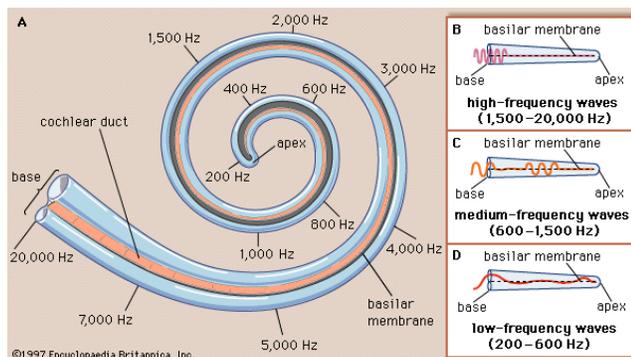


Figura 2 – Zonas da cóclea onde são detectadas as diferentes frequências

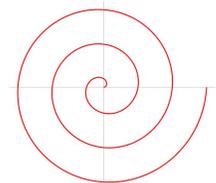
A agitação do líquido coclear gera impulsos nas pequenas terminações nervosas até os centros auditivos do cérebro. Assim, a energia hidráulica transforma-se em **energia elétrica**.

A audição identifica padrões que estão presentes nos sons e a informação é processada e interpretada pelo cérebro; O cérebro recebe os estímulos auditivos e os interpreta cada um como sons diferentes.

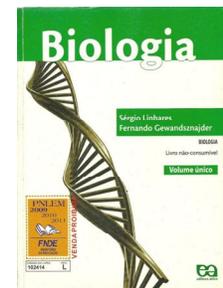
A cóclea tem forma de uma *espiral logarítmica*.

Mas, o que é uma espiral logarítmica?

Espiral é uma curva que gira em torno de um ponto central, afastando-se ou aproximando-se deste ponto, dependendo do sentido em que se percorre a curva.



Para saber + sobre o funcionamento do **Ouvido Humano** você pode buscar referências específicas de **BIOLOGIA** como esta:



Para uma *espiral* ser *logarítmica* ela deve cumprir as seguintes características:

Auto-similaridade: mesmo que o seu tamanho aumente, ela não altera o seu formato

Dado o ponto O , a espiral logarítmica é uma curva tal que a amplitude do ângulo formado pela tangente em qualquer de seus pontos P com a semi-reta \overline{OP} é constante, ou seja α é **constante** durante todo o trajeto da espiral (Veja figura seguinte).

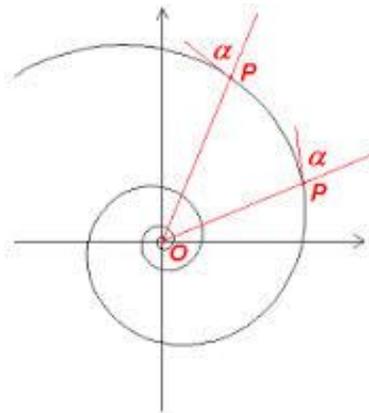


Figura 3: Espiral Logarítmica

Como se produz sons a partir de um instrumento? Mas, o que é som?

O som é uma **sensação auditiva** que detectamos por meio do **ouvido**. Essa sensação ocorre pelo movimento organizado das moléculas que compõe o ar.

Ao bater no *diapasão*, por exemplo, provocamos uma perturbação que faz vibrar o ar e que se propaga até ser captada pelos ouvidos, constituindo o som.

Som é toda e qualquer vibração ou onda mecânica em um meio elástico (no ar, água ou outro meio) dentro da faixa de áudio frequência²

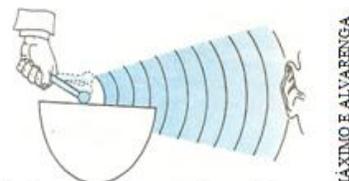


Diapasão é um instrumento metálico em forma de forquilha, que serve para afinar instrumentos e vozes por meio de sua vibração. Foi inventado por Jhon Shore em 1711. A frequência mais comum que ele é afinado PE o Lá de 440 Hz

Assim, os fenômenos sonoros estão relacionados com as vibrações dos corpos materiais. Sempre que escutamos um som, há um corpo material que vibra, produzindo este som. Quando falamos, o som que emitimos é

produzido pelas vibrações de nossas cordas vocais; quando batemos em um tambor, em um pedaço de madeira ou de metal, estes corpos vibram e emitem som; as cordas de um piano ou de um violão também emitem som quando estão em vibração.

Todos estes corpos são fontes sonoras que, ao vibrarem, produzem ondas que se propagam no meio material (sólido, líquido ou gasoso). Este meio material está situado entre as fontes sonoras e o nosso ouvido. Ao penetrarem no ouvido, as ondas provocam vibrações que nos causam *sensações sonoras*.



Tambor, ao vibrar, produz ondas que, ao alcançarem o ouvido, provocam sensações sonoras.

NOTAS

¹ As vibrações mecânicas são comunicadas aos menores ossos do corpo humano: **martelo, bigorna e estribo**

O cabo do martelo está fixado ao centro da membrana timpânica. Na outra extremidade, o martelo está ligado com a bigorna, (assim, sempre que o martelo se mover, a bigorna também se moverá com ele). A outra extremidade da bigorna está ligada ao cabo do estribo, e a platina do estribo ligada à extremidade do labirinto membranoso da cóclea, na abertura da janela oval.

Esses ossículos do ouvido médio encontram-se suspensos por meio de ligamentos, e por esta razão fazem o martelo e a bigorna oscilarem como uma alavanca única.

Como a bigorna está articulada com o estribo, toda vez que a membrana e o cabo do martelo se movem para dentro o líquido coclear é empurrado, e toda vez que eles se movem para fora o líquido coclear é puxado. Dessa forma, inicia-se uma onda líquida que viaja ao longo da membrana basilar (superfície rígida que se estende por toda a extensão da cóclea)

² ABNT (1959)

Oscilações na Música



Objetivos:

- Definir: oscilação, ondas transversais e longitudinais.
- Relacionar movimento oscilatório com os sons.

Como se organiza uma música?

Quando perguntamos o que é música, encontramos dezenas de respostas, desde as objetivas até as mais filosóficas. A maioria das definições procura distinguir a música do barulho.

Mas, de maneira geral, a música é definida como a *arte de combinar sons*.

A particularidade está nestes sons que compõe uma música. Atualmente, existem centenas de estilos musicais e ritmos diferentes, e um barulho também pode virar música!

Uma definição, bastante subjetiva, é afirmar que a música é uma combinação de ritmos, melodia e harmonia de maneira agradável ao ouvido. Mas, se nos basearmos nesta definição poderemos classificar certas organizações sonoras (as que não nos agradam) como não sendo música. Com o intuito de sermos mais práticos e menos subjetivos vamos considerar a seguinte definição para música:

Música é o resultado de uma **organização** de sons e silêncio, que seguem **regras bem definidas**.

Do mesmo modo que a linguagem utiliza-se da palavra como matéria prima, a música utiliza o som. Sua matéria prima é o *som bem definido*.

Para saber +

Música do grego μουσική τέχνη - musiké téchne, a arte das musas.

Observação

Neste momento os professores de **ARTE** e de **HISTÓRIA** podem abordar o tema História da Música como produção cultural e explorar características das civilizações do mundo antigo até a atualidade para estudar a evolução cultural dos povos.

Mas, o que é um som bem definido?

Um som bem definido é *uma vibração que podemos medir*. Como já definimos, som é *toda e qualquer vibração (movimento oscilatório) ou onda mecânica em um meio*.

Oscilação? O que é? O que tem a ver com o som?

Uma oscilação é qualquer movimento de vaivém, como o de um pêndulo. Quando esse movimento se propaga num meio material ou pelo espaço, ele se torna uma onda.

As oscilações ou vibrações geram efeitos sonoros. No ar, as vibrações sonoras são transmitidas como uma onda por meio das suas moléculas; muitas outras substâncias transmitem o som de forma semelhante.

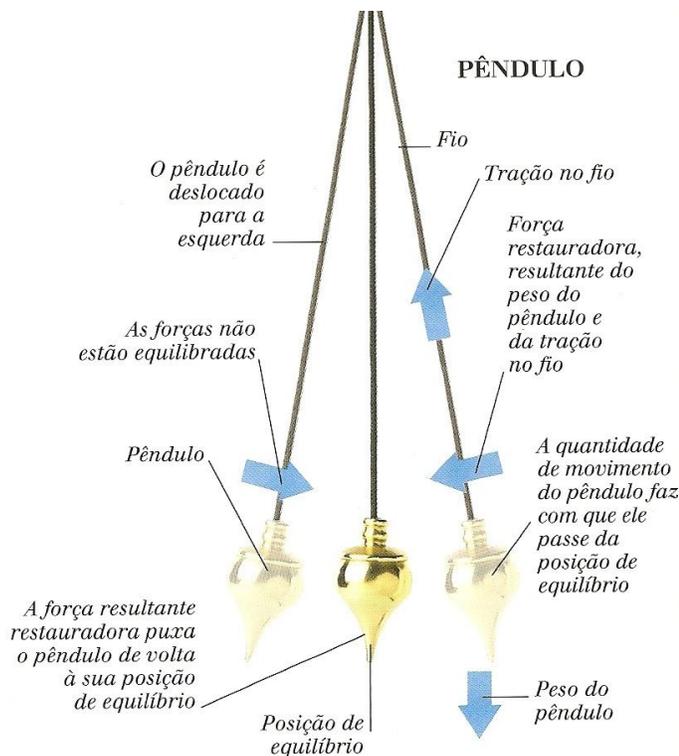


Figura 1 – Pêndulo. Atlas visuais (p.20).

Pode haver dois tipos de ondas num sólido: as ondas ***transversais***, e as ***longitudinais***.

A figura 2 mostra uma onda transversal em uma mola; podemos notar que os pontos da mola deslocam-se para cima e para baixo enquanto a onda se propaga para a direita, ao longo da mola.

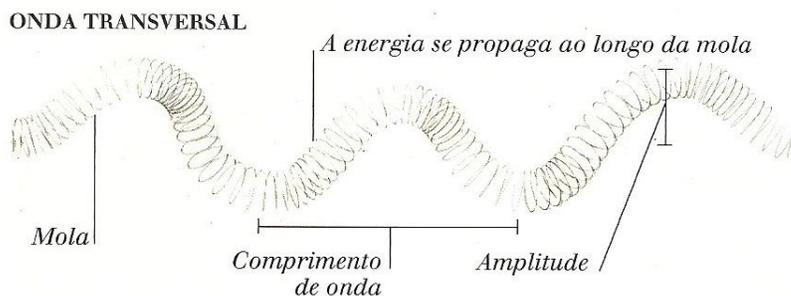
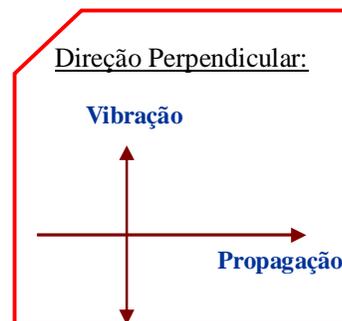


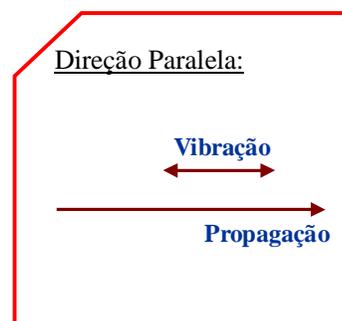
Figura 2 – Onda transversal em uma mola. Atlas visuais (p.20).



Ondas transversais são ondas nas quais as oscilações dos pequenos elementos do sólido são **perpendiculares à direção de propagação** da onda.¹

Se movimentarmos a extremidade de uma mola esticada para frente e para trás, dando a esta extremidade um movimento oscilatório na direção da própria mola, verificamos que um distúrbio, constituído por uma série de “compressões” e “rarefações”, propaga-se ao longo da mola. Este distúrbio é denominado uma onda *longitudinal*.

Ondas longitudinais são ondas nas quais as oscilações são **paralelas à direção de propagação**.²



ONDA LONGITUDINAL



Figura 3 – Onda longitudinal em uma mola. Atlas visuais (p.20).

Então, nas ondas longitudinais a vibração dos pontos se faz na mesma direção em que a onda está se propagando.

Observação
Neste assunto é possível abordar o movimento de um sistema massa-mola, na disciplina de **FÍSICA**.

NOTAS

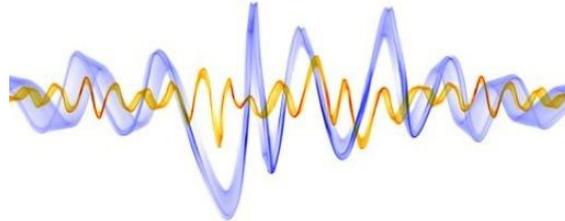
¹ HALLIDAY, D. RESNICK R. WALKER J. **Fundamentos de Física:** Gravitação, Ondas e Termodinâmica. 4ª ed. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1996.

² HALLIDAY, D. RESNICK R. WALKER J. **Fundamentos de Física:** Gravitação, Ondas e Termodinâmica. 4ª ed. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1996.

A função seno e as ondas sonoras

Objetivos:

- Relacionar as funções trigonométricas com fenômenos periódicos;
- Entender o conceito de círculo trigonométrico e funções seno.



E as vibrações do som, que tipo de onda formam?

Um corpo vibrando, como o diapásão mostrado na próxima figura, provoca variações de pressão no ar ao seu redor. Regiões de alta ou baixa **pressão**, conhecidas como zonas de **compressão** e **rarefação**, se propagam por meio do ar como ondas sonoras.

As ondas sonoras são LONGITUDINAIS!

Na figura 1 as ondas sonoras estão atingindo um microfone gerando oscilações elétricas que estão sendo mostradas em um osciloscópio¹.

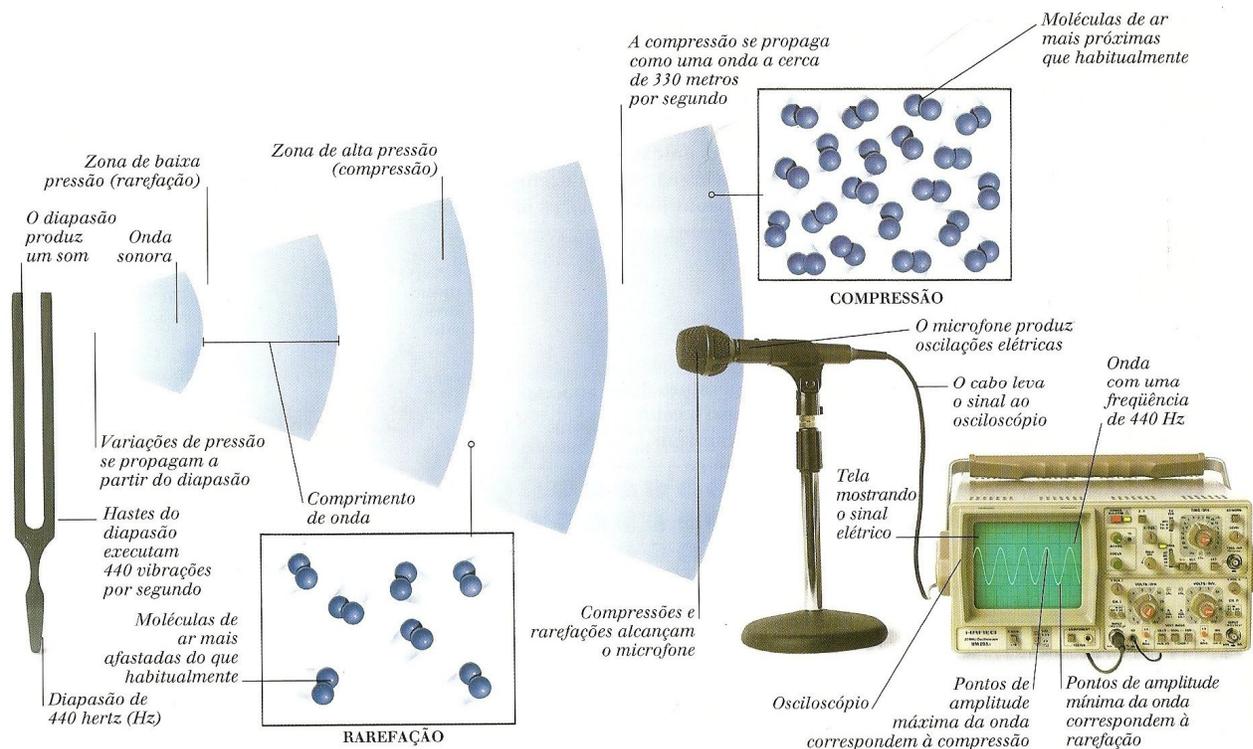


Figura 1 – o som como vibração do ar. Atlas visuais (p.21).

De que modo o som se transmite pelo espaço?

A transmissão do som pelo espaço se chama: *propagação do som*.

O som precisa de um meio para se propagar. As ondas de som são transmitidas por meio do ar ou por outros materiais (gasosos, líquidos e sólidos).

O SOM NÃO SE PROPAGA NO VÁCUO!!

O deslocamento de ar provocado, por exemplo, por um diapasão, muda a densidade do ar na camada adjacente, o que provoca uma MUDANÇA DE PRESSÃO (compressão ou descompressão). A variação de pressão produz o deslocamento da camada de ar adjunta, e assim por diante².

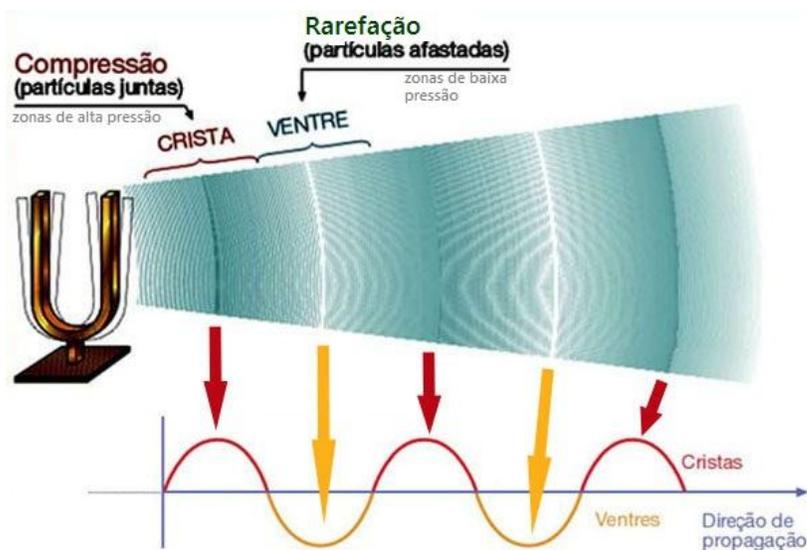


Figura 2:

Fonte: <http://fisicoquimica2013.wordpress.com/som-e-luz/som/ondas/>

Na figura 2 podemos observar que a partir da compressão e da rarefação do ar representa-se um gráfico do nível de pressão acústica em função do tempo.

O gráfico citado terá a forma exata de uma *senóide* no caso de um tom puro.

O que é uma senóide?

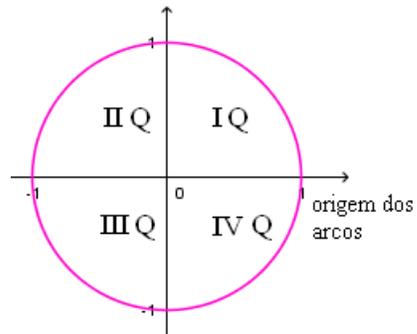
A senóide ou onda senoidal é uma forma de curva idêntica ao gráfico da **função seno**. Esta função é uma função trigonométrica³. Funções trigonométricas são funções angulares usadas para resolver problemas envolvendo triângulos.

A função seno é a função $f : R \rightarrow R$ que associa cada número real x ao número real $y_p = \text{sen } x$, ou seja, $f(x) = \text{sen } x$

Para entender os conceitos de seno é necessária a construção de um sistema chamado **círculo trigonométrico**.

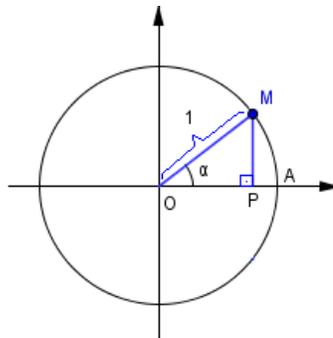
Vamos considerar um plano cartesiano e um círculo com centro na origem $O(0,0)$ e raio unitário. O círculo trigonométrico possui as seguintes características:

- a) a orientação positiva é no sentido anti-horário e a negativa no sentido horário;
- b) o ponto $(1, 0)$ é considerado a origem dos arcos.
- c) os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamadas quadrantes; esses quadrantes são contados no sentido anti-horário, a partir da origem dos arcos.



A cada ponto M da *circunferência trigonométrica* associamos medidas em graus ou radianos do arco AM , chamados **arcos trigonométricos**⁴.

Consideremos na circunferência trigonométrica um arco AM de medida α .



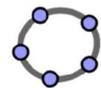
No triângulo retângulo OMP , temos:

$$\cos \alpha = \frac{OP}{1} = OP$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{MP}{1} = MP$$

DICA

Para melhor visualização dos valores do seno e cosseno de um arco podemos utilizar o software **Geogebra**.



GeoGebra

Constrói-se o ciclo trigonométrico e associa-se os arcos aos valores na função, de forma dinâmica e fácil para entender.

Valores importantes para $\text{sen } \alpha$:

Marcando os pontos M, imagens dos números reais $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π , temos:

$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$	$x = \pi$	$x = 2\pi$	$x = \frac{3\pi}{2}$
sen 0° = 0	sen 90° = 1	sen 180° = 0	sen 360° = 0	sen 270° = -1

Refleta

Se o eixo dos senos é o eixo vertical e dos cossenos o horizontal, como seria preenchida esta tabela para os valores de $\text{cos } \alpha$?

Pense e analise:

Os pontos de ordenada positiva, na função seno, estão em quais quadrantes? E, os de ordenada negativa?



¹ Aparelho que serve para tornar visíveis as variações periódicas de uma corrente elétrica.

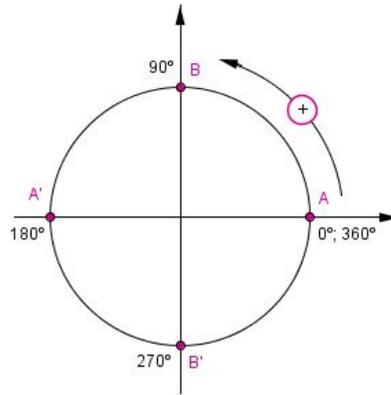
² Veja a figura animada que ilustra o movimento das partículas de ar na propagação do som em: http://telecom.inescn.pt/research/audio/cienciaviva/natureza_som.html

³ A palavra trigonometria vem do grego e significa medida (*metria*) em triângulos (*trígon*). A trigonometria se ocupa dos métodos de resolução de triângulos. Fazem parte de seu campo de estudo a investigação e o uso das funções trigonométricas. Muitos fenômenos físicos e sociais de comportamento cíclico, ou periódico, podem ser modelados por funções trigonométricas. Daí a enorme aplicação desse estudo em campos variados da ciência, como Acústica, Astronomia, Economia ou Medicina.

Uma circunstância exemplar é o monitoramento da frequência cardíaca, isto é, do número de batimentos cardíacos em um período de tempo, geralmente medido em bpm (batimentos cardíacos por minuto). (Matemática: construção e significado).

4 Exemplos de arcos trigonométricos:

- a) Partindo do ponto A e girando uma volta completa no sentido anti-horário, associamos as seguintes medidas aos pontos A, B, A' e B':



- b) Partindo do ponto A e girando uma volta completa no sentido horário, associamos as seguintes medidas aos pontos A, B, A' e B':

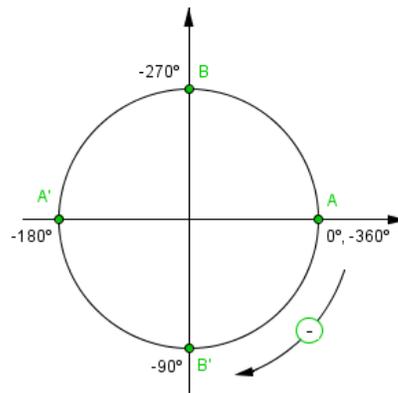
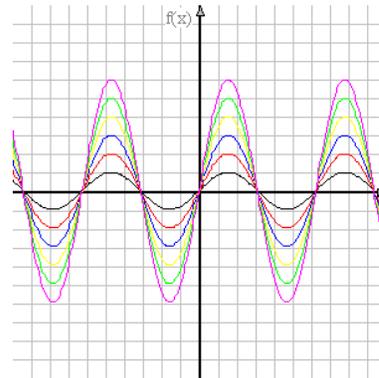


Gráfico da função seno

**Objetivos:**

- Relacionar as funções trigonométricas com fenômenos periódicos;
- Construir o gráfico da função seno;
- Estudar as características da função seno.

O que a curva senoidal tem em comum com o som?

Como vimos anteriormente, o som faz vibrar as partículas do meio em que se propaga. E quanto o meio de propagação é o ar, há uma mudança de pressão (compressão e rarefação), a qual é possível representar no seguinte gráfico:

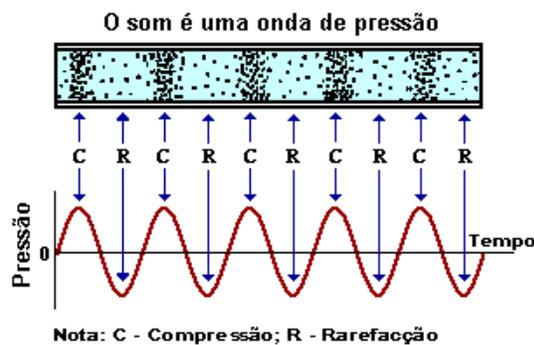


Figura 1: Propagação do som e representação gráfica da variação de pressão.
<http://www.prof2000.pt/users/eta/ruido.htm>

Esta onda é idêntica a onda senoidal! Os picos da onda correspondem ao nível de pressão do ar mais elevado. Os mínimos representam as pressões menos elevadas. E, os pontos intermediários (pontos em que a função toma o valor zero) equivalem às situações em que a pressão do ar toma o mesmo valor que quando está em situação de repouso.

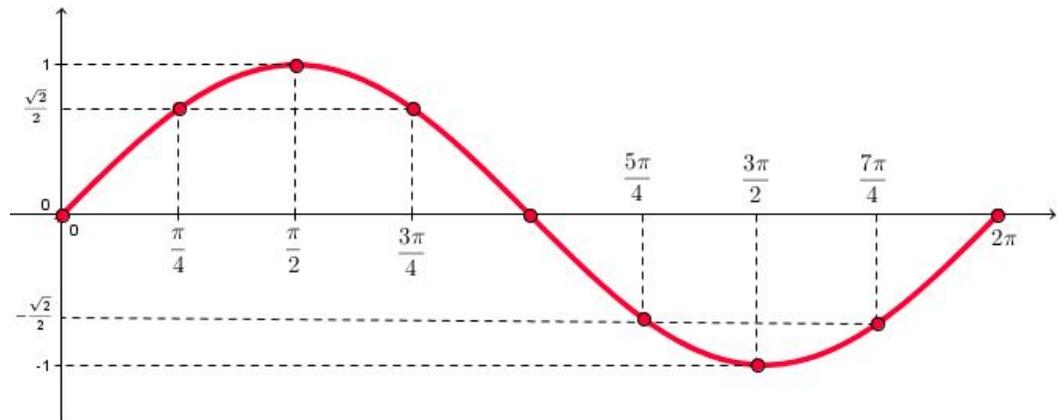
Agora que já sabemos que as vibrações sonoras formam ondas senoidais, vamos aprender mais sobre estas ondas e suas modificações.

Vamos construir o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$ a partir de uma tabela de valores para x .

Com $x \in [0, 2\pi]$, (ou seja, x pertencente a primeira volta) temos a seguinte tabela

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\text{sen } x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

A curva obtida neste intervalo é:

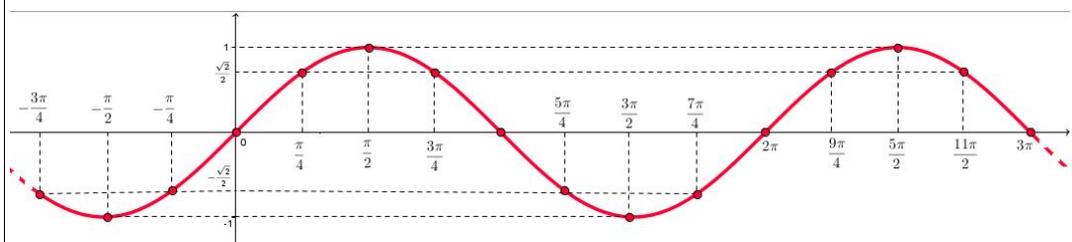


Com alguns valores maiores que 2π e menores que 0, temos a seguinte tabela:

x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	4π
$\text{sen } x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Com esses valores percebemos que a função seno de x assume valores iguais aos da primeira volta (2π). Por isso, classificamos esta função como *periódica*, pois:

para todo $x \in \mathbb{R}$: $\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } (x + 4\pi) = \dots = \text{sen } (x + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

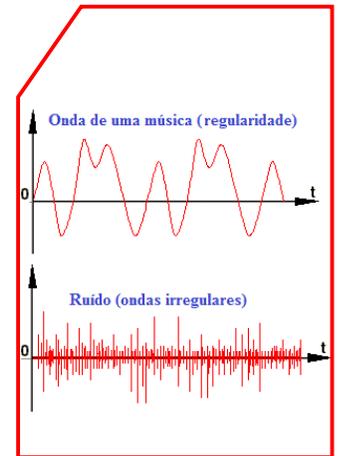


As ondas senoidais possuem uma regularidade impressionante, possuem a mesma forma, com comprimentos idênticos a cada repetição e, se repetem em intervalos perfeitamente regulares.

É essa regularidade que distingue a música do ruído!

A onda sonora de um ruído tem a forma de uma curva completamente desordenada.

No entanto, se a regularidade é exagerada e absoluta, se produz uma simples monotonia desagradável. Como se tocássemos sempre a mesma nota por um período longo de tempo. Por isso, para estudarmos como se organiza uma música precisamos entender a composição de todas as suas notas, primeiro desvendando as formas das notas isoladamente.



A *função seno* tem as seguintes características (as quais podem ser comparadas e igualadas as de um **tom puro** isolado):

- É periódica, de período 2π ;
- É limitada, ou seja, possui valores no intervalo $[-1, 1]$. ($\text{Im}=[-1,1]$);
- É crescente nos intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, etc., e decrescente nos intervalos $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$, etc.;
- É positiva quando x pertence aos intervalos: $]0, \pi[$, $]2\pi, 3\pi[$, etc., e negativa para x pertencente a $]-\pi, 0[$, $]\pi, 2\pi[$, $]3\pi, 4\pi[$, etc.;
- Tem **amplitude** igual a 1.

Características dos Sons



Objetivos:

- Conhecer as alterações sonoras conforme suas características;
- Comparar a frequência, o comprimento e a velocidade da onda sonora com o gráfico da função seno.
- Estudar as alterações gráficas da função seno.

Como percebemos e distinguimos os sons?

O som constitui um movimento ondulatório, caracterizado por uma **FREQUÊNCIA**, por um **COMPRIMENTO DE ONDA** e uma **VELOCIDADE** de propagação.

Além disso, possui qualidades que nos faz distinguir cada som. São elas: altura, intensidade e timbre.

O que é Frequência do Som?

Ao intervalo de tempo entre dois acontecimentos repetidos damos o nome de *período*. Assim, o tempo de um ciclo completo de uma onda é igual a um período.

A frequência de uma onda sonora é determinada pelo número de vezes que o período é repetido no intervalo de um segundo, convencionalmente corresponde ao número de vibrações por segundo (medida em hertz, Hz).

Assim, se uma dada onda tem um período de 0,2 segundos, então a sua frequência será de 5 Hertz.

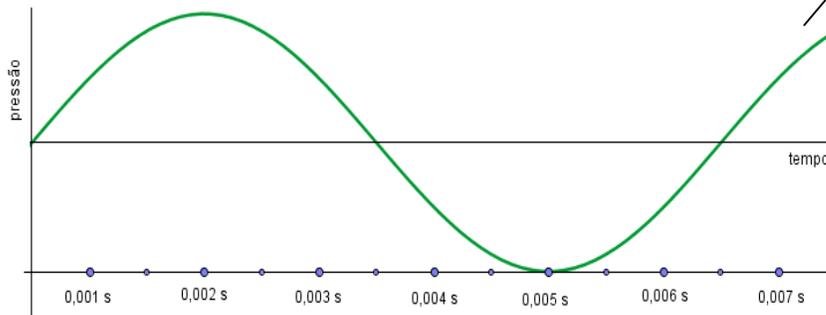
A frequência determina a *altura* som – quanto mais oscilações houver, mais *agudo* é o som.

Para saber +

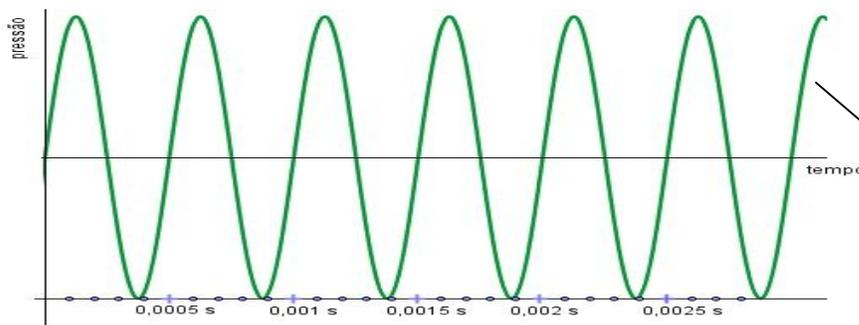
A **frequência** da **voz** num ser humano varia entre os 85Hz e os 1100Hz:

Valores próximos a 1100Hz correspondem a sons agudos (altos). Por exemplo, num som com 1100Hz de frequência, as partículas que propagam o som efetuam 1100 vibrações completas a cada segundo.

As figuras seguintes representam duas ondas sonoras com frequências distintas.



**ONDA SONORA
CORRESPONDENTE
A UM SOM GRAVE
– 150 Hz**

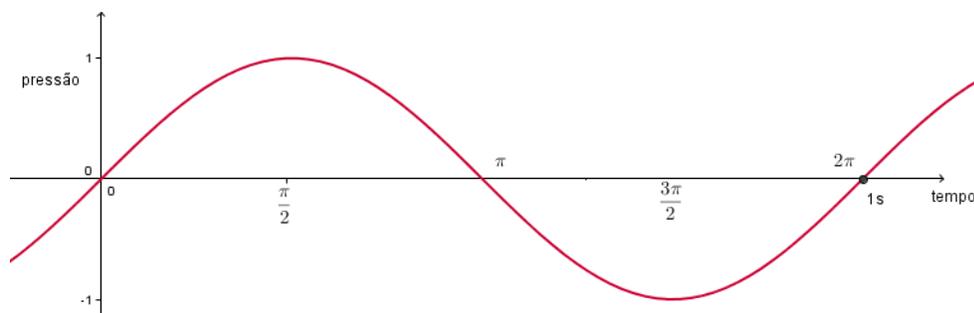


**ONDA SONORA
CORRESPONDENTE
A UM SOM AGUDO
– 2000 Hz**

Quando comparamos estas ondas sonoras com a função seno, dizemos que a curva está sofrendo uma alteração de período, embora conservem a amplitude.

Mas, que alteração matemática ocorre na função?

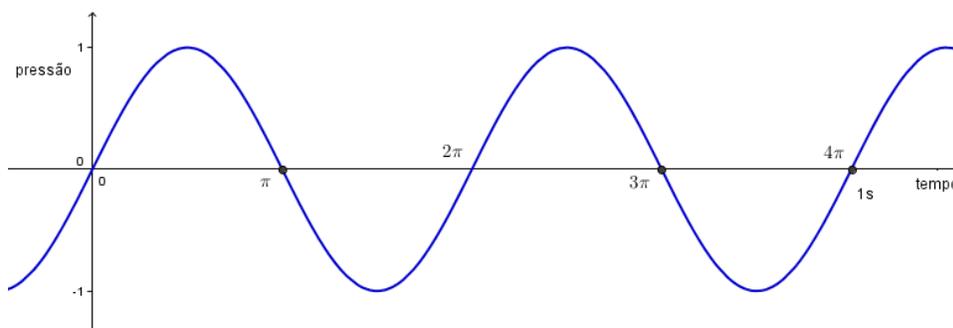
Observe a onda sonora representada no seguinte gráfico:



Podemos dizer que esta é uma onda sonora de 1Hz, já que em 1s ocorre 1 período da onda.

Vamos juntar estas informações da onda sonora com a definição de senóide e atribuir a este gráfico a função: $f(x) = \text{sen } x$.

Vamos observar agora o próximo gráfico:



Qual é a frequência da onda sonora representada?

Vejamus que em um segundo dois períodos de onda se repetem. Por isso, podemos afirmar que é uma onda de 2Hz.

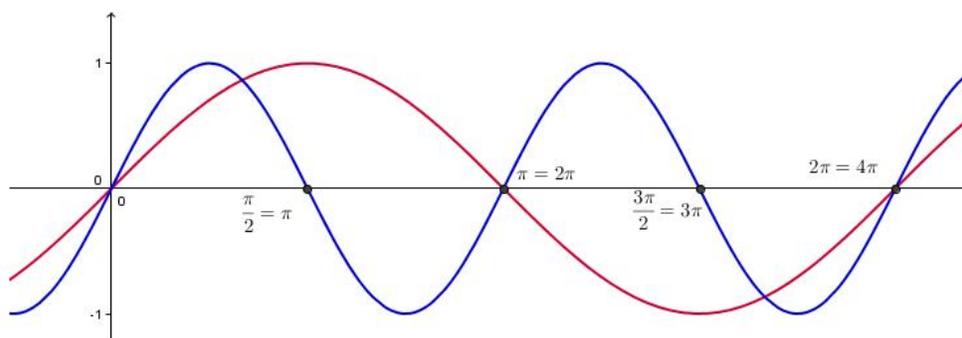
Comparando com o gráfico anterior, o que mudou?

Qual é a função matemática que representa a onda sonora?

Observe que:

- os valores de máximo e mínimo no eixo vertical (pressão) não se alteram;
- o período é reduzido pela metade: $p_1 = 1s$ e $p_2 = 0,5s$

Se fizermos uma sobreposição dos dois gráficos e compararmos com os valores da função seno, temos:



Na onda de 1Hz os valores da função coincidem com os valores de sen x, dispostos na tabela:

$\text{sen } \frac{\pi}{2}$	$\text{sen } \pi$	$\text{sen } \frac{3\pi}{2}$	$\text{sen } 2\pi$
1	0	-1	0

Mas, e os valores da onda de 2Hz, o que está acontecendo com eles?

Estão sendo multiplicados por 2, e isso implica na seguinte alteração na função: $f(x) = \text{sen } 2x$

Assim,

O gráfico de funções do tipo $f(x) = \text{sen } c.x$, sofre uma alteração no período (frequência da onda). O período será $\frac{2\pi}{|c|}$, enquanto no gráfico original era 2π .

O que é Comprimento de Onda?

O comprimento de uma onda é a distância entre duas compressões do ar, ou ainda, entre a crista de uma onda e a da seguinte (medida em centímetros), como mostra a figura 11.

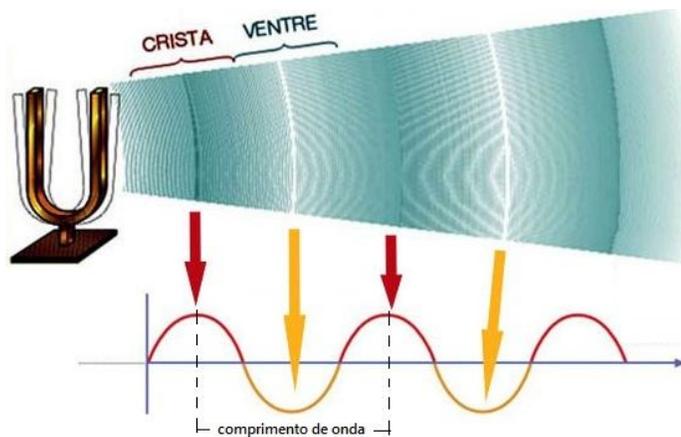


Figura – Indicação do comprimento de onda

Esta grandeza está indiretamente relacionada com a frequência da onda e com a velocidade de propagação do som no meio. Ondas sonoras com pequeno comprimento de onda têm alta *frequência* e **som agudo** (veremos essas qualidades mais adiante)

O que é Velocidade do Som?

É fácil percebermos que, em uma tempestade, *ouvimos* o trovão certo tempo após termos *visto* o relâmpago, embora um relâmpago e o trovão sejam produzidos no mesmo instante.

Isto ocorre porque a *velocidade da luz* é muito grande (aproximadamente 300.000 Km/s), portanto, o relâmpago pode ser visto praticamente no mesmo instante em que ele é produzido. E, o intervalo de tempo entre a percepção do relâmpago e a do trovão representa o tempo gasto pela onda sonora para chegar até nós.

Em geral, a **velocidade do som nos sólidos é maior que a velocidade do som nos líquidos que é maior do que nos gases:**

$$v_{\text{sólidos}} > v_{\text{líquidos}} > v_{\text{gases}}$$

→ quanto maior a densidade, maior será a velocidade

A velocidade do som no ar pode ser calculada fazendo a seguinte experiência: enquanto uma pessoa detona uma bomba, a uma distância conhecida, outra pessoa mede o tempo entre a percepção do clarão e a do som produzidos pelo tiro. Esta medida representa o tempo que o som leva para percorrer a distância pré estabelecida.

Assim, para calcularmos a velocidade do som em determinado meio multiplicamos o comprimento da onda pela sua frequência:

$$v = \lambda \cdot f$$

A **velocidade** do som no **ar** a 20°C é de 340 m/s

Observação

A especificação da temperatura é necessária, pois, quanto maior for a temperatura de um gás, maior a velocidade com que a onda sonora nele se propaga.

Sabe por quê?

A agitação das moléculas de um gás aumenta com a temperatura, fazendo com que a propagação da onda sonora seja mais rápida.

Qualidades dos Sons

**Objetivos:**

- Identificar em dois sons distintos quais as qualidades que os distinguem;
- Definir logaritmo.

Como podemos distinguir qual som soa de qual instrumento quando assistimos a um show de música?

A característica que distingue um som MUSICAL de um RUÍDO é a PERIODICIDADE. E as características que distinguem dois sons musicais são: **altura (tom), timbre, intensidade**

Vamos conhecer estas qualidades:

Altura (tom): é a qualidade que permite ao ouvido diferenciar sons graves de sons agudos. Ela depende apenas da FREQUÊNCIA do som.

Ex: a nota mais *baixa* do piano é o Lá₀ de frequência $f = 27,5\text{Hz}$, e a nota mais alta é o Dó₈, com $f = 4186\text{Hz}$.

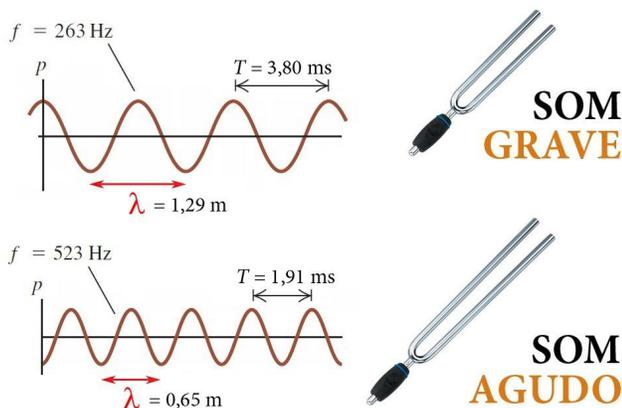


Figura 1: Altura de um som

Fonte: <http://www.yduka.com/sumarios-e-licoes-8/item/atributos-som>

Observação

Em linguagem musical, diz-se que um som agudo é **ALTO** e um som grave é **BAIXO**.

Uma nota musical é caracterizada por sua frequência, isto é, quando um instrumento musical emite notas diferentes, ele está emitindo sons de *frequências diferentes*. Em um piano, por exemplo, as teclas à esquerda do pianista correspondem às notas de frequências menores (sons graves) e, as da direita, às notas de frequências mais elevadas (sons agudos).

Intensidade: é a qualidade que permite ao ouvido diferenciar os sons fracos dos sons fortes. O nível de intensidade sonora varia aproximadamente com o logaritmo de intensidade do som.

Os sons fortes são representados por ondas sonoras de grande amplitude. Os sons fracos por ondas de pequena amplitude.

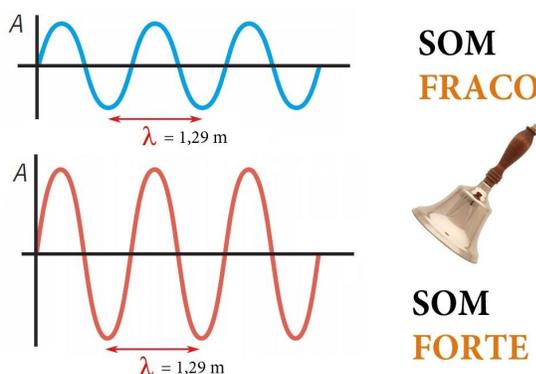


Figura 2: Intensidade dos sons.

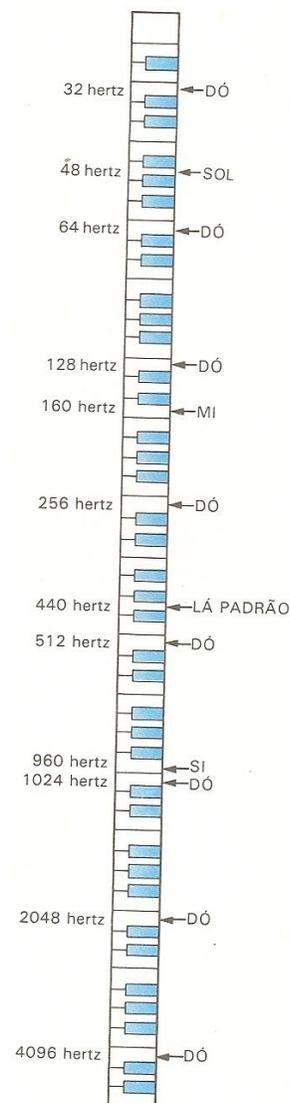
Fonte: <http://www.yduka.com/sumarios-e-licoes-8/item/atributos-som>

A intensidade de um som é tanto maior quanto maior for a amplitude da onda sonora.

A intensidade é uma propriedade do som que está relacionada com a energia de vibração da fonte que emite a onda sonora. Ao se propagar, a onda transporta esta energia, distribuindo-a em todas as direções. Quanto maior for a quantidade de energia (por unidade de tempo) que a onda sonora transportar até nosso ouvido, maior será a intensidade do som que percebemos.

A nossa percepção sonora depende bastante da intensidade do som, e esta depende da distância à qual se encontra a fonte sonora do receptor. **Quanto mais distantes estiverem da fonte sonora, mais fracos serão.**

Existe um valor mínimo de intensidade de som, abaixo do qual é impossível o ser humano ouvir algo. Essa intensidade se chama *limiar de audibilidade*.



Considerando I_0 como a menor intensidade de som audível pelo ser humano ($I_0 = 10^{-12} \text{ W / m}^2$) e I a intensidade do som que se quer determinar, define-se:

$$\text{nível de intensidade} = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

A intensidade do som é medida em uma unidade denominada 1 bel (em homenagem a Graham Bell). Usa-se mais comumente um submúltiplo desta unidade: 1 decibel = 1 dB = 0,1 bel.

Tipo do som	Nível Sonoro
Silêncio absoluto	0 dB
Conversa em voz baixa	20 dB
Aspirador de pó	80 dB
Buzina de Caminhão	100 dB
Conjunto de Rock	120 dB
Decolagem de avião	140 dB

Tabela 1 – Intensidade Sonora

*log é a abreviação de logaritmo, mas, o que significa e para que serve?*¹

Para resolvermos algumas equações exponenciais utilizamos logaritmos.

De forma simplificada, o logaritmo de um número é o expoente que uma dada base deve ter para produzir certa potência.

Se perguntamos: *quanto vale 3²*? Trata-se de um assunto de *potenciação*.

Mas se a pergunta for: *qual é o número a que devemos exponenciar 3 para se obter 9*? Trata-se de uma pergunta sobre *logaritmo*. E, montamos a seguinte equação:
 $3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

Dizemos que 2 é o logaritmo de 9 na base 3. Escreve-se:
 $\log_3 9 = 2$.

Dados a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, o **logaritmo de b na base a** é o número real x tal que:
 $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. O número b é chamado *logaritmando*.

Para resolvermos equações que envolvem logaritmos precisamos conhecer as propriedades operatórias:

Consequências

- O logaritmo de 1 em qualquer base é 0:

$$\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$$

- log da base é igual a 1:

$$\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$$

- a potência de base a e expoente $\log_a b$ é b :

$$a^{\log_a b} = b$$

Logaritmo do produto:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Logaritmo do quociente:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Logaritmo da potência:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Mudança de base:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Assim, podemos encontrar o nível de intensidade das ondas sonoras:

- Para os metrô antigos, estima-se que a intensidade sonora seja de 10^{-2} W/m^2 . Daí, o nível de intensidade é:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{10^{-2}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{10} = 10 \cdot 10 \cdot \log 10 = 10 \cdot 10 \cdot 1$$

$$\Rightarrow \beta = 100 \text{ dB}$$

- A intensidade da onda correspondente à fala humana, a um metro de distância, é $4 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$. A quantidade de decibéis é:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{4 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 10 \cdot [\log 4 + \log 10^{-6} - \log 10^{-12}]$$

$$\Rightarrow \beta = 10 \cdot [0,6 - 6 + 12] = 66 \text{ dB}$$

Observação

Os logaritmos de base 10 são chamados logaritmos decimais e os representamos, simplesmente, por $\log x$ (ou seja, a base pode ser oculta).

Timbre: é a qualidade que permite ao ouvido diferenciar sons de mesma altura e intensidade, emitidos por fontes diferentes.

O timbre é determinado pelo número e intensidade dos **harmônicos** e também pelo valor da frequência do tom fundamental.

Harmônicos são as ondas que acompanham uma determinada frequência cujas frequências são múltiplos da fundamental. Assim, se a frequência de um som for de 600Hz, o segundo harmônico terá uma frequência de 1200Hz, o terceiro de 1800Hz e assim por diante.

Harmônicos são componentes de um tom harmônico cujo som é multiplicado por um número inteiro ou adicionado com uma nota tocada em um instrumento musical. Os múltiplos não-inteiros são chamados de **sobretons** e **desarmônicos**.

A figura 3 representa três ondas de mesma frequência com diferentes timbres.

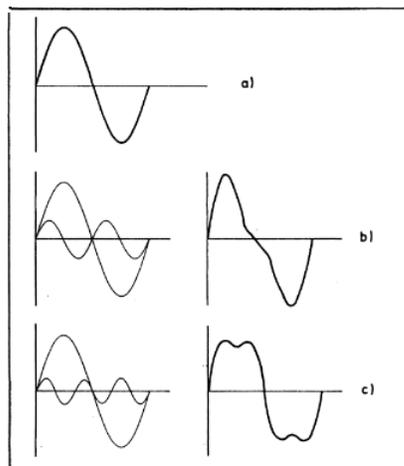


Figura 3 – VASSALLO, Francisco Ruiz. Manual de Caixas Acústicas e Auto-Falantes. Hemus. Disponível em < <http://books.google.com.br>>

- A onda *a* é uma onda sem harmônicos, dita **pura** ou **fundamental**.
- A onda *b* é resultante da soma da fundamental com o **segundo harmônico**.
- A onda *c* é a soma da onda fundamental com o **terceiro harmônico**.

As formas de ondas que ouvimos no nosso cotidiano são ainda mais complexas, considerando que os sons são acompanhados de diversos harmônicos que são somados a onda fundamental.

Se tocarmos a mesma nota musical (mesma frequência) em dois instrumentos diferentes, e com mesma intensidade, seremos capazes de distinguir um instrumento do outro. Isto ocorre pois, as notas possuem *timbres* diferentes. O que resulta em uma *forma de onda* diferentes para cada timbre de sons de mesma frequência.

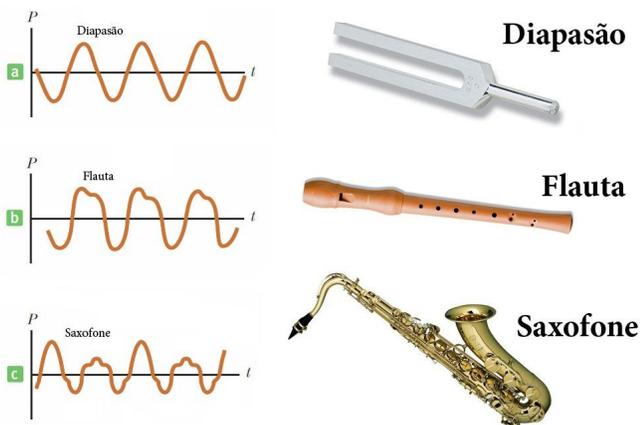
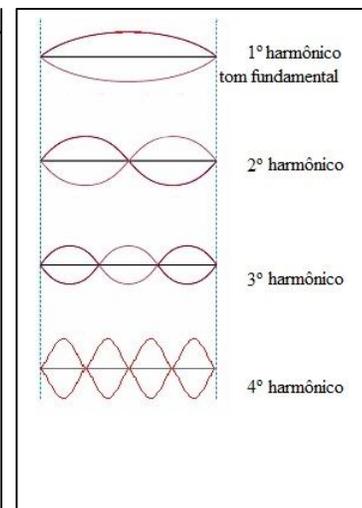


Figura 4: Formas de Ondas segundo o timbre

Fonte: <http://www.yduka.com/sumarios-e-licoes-8/item/atributos-som>

Você sabia ...

É o timbre que nos faz identificar uma pessoa pela sua voz!



¹ *Outras Aplicações dos logaritmos:*

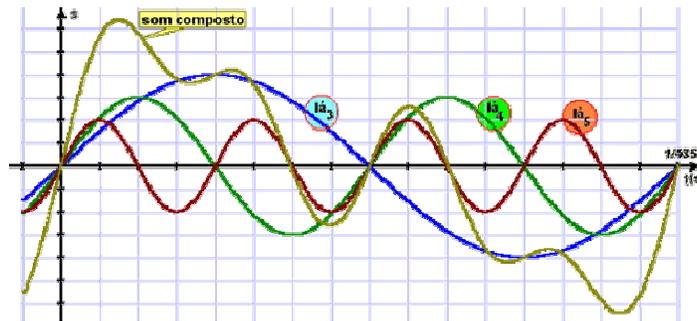
- A escala Richter foi desenvolvida em 1935 por Charles Richter e Beno Gutenberg, no Califórnia Institute of Technology. Ela serve para avaliar a magnitude de um terremoto, de acordo com a energia liberada sob forma de ondas, medida por aparelhos chamados sismógrafos.

A escala Richter é uma escala logarítmica: a magnitude (graus) de Richter corresponde ao logaritmo da medida das amplitudes das ondas sísmicas, a 100 km do epicentro. A fórmula utilizada é: $\log A - \log A_0$.

- O pH é uma escala usada em Química para expressar o grau de acidez ou basicidade de uma solução aquosa. Os valores do pH variam de 0 a 14. Para o cálculo do pH usamos a expressão: $pH = -\log [H^+]$, onde $[H^+]$ é a concentração de íons em mol/l.

(IEZZI, G...[et al.]. **Matemática**. 4ª ed. São Paulo: Atual, 2007).

Sons puros e Sons complexos

**Objetivos:**

- Conceituar sons puros e sons complexos.
- Aplicar as fórmulas de transformação de soma em produto.

Será que os sons que ouvimos possuem somente ondas representadas pela função $y = \text{sen } x$?

Existem dois tipos de som: os **puros** e os **complexos**.

Os **sons puros**, também chamados de sons simples, possuem uma **frequência bem definida** e sua representação se assemelha com o gráfico da função $y = \text{sen } (x)$.

Um exemplo de som puro é o som do diapasão, que representa o som e a frequência de uma nota isolada.

Os **sons complexos** são compostos de **vários sons puros** e sua **frequência é variável**.

A nossa fala, os sons emitidos por uma flauta ou por um saxofone, são considerados sons complexos.

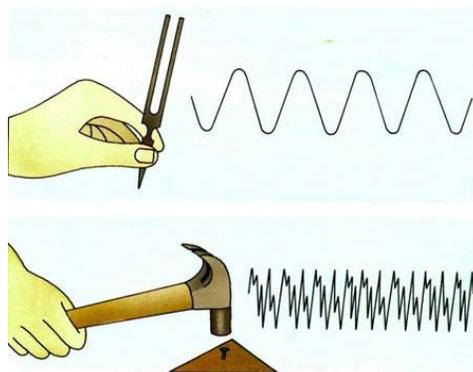
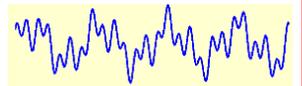


Figura 1: Tom puro (acima: diapasão). Som complexo (abaixo: martelo)
Fonte: http://www.audireaparelhosauditivos.com.br/o_som.php

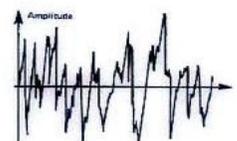
Importante

Sons complexos podem ser periódicos ou não

Periódico:



Não periódico:



Os sons complexos resultam da **sobreposição** de sons puros.

Por exemplo, as duas ondas sonoras no gráfico seguinte se sobrepostas originam um som, complexo, com intensidade sonora variável.

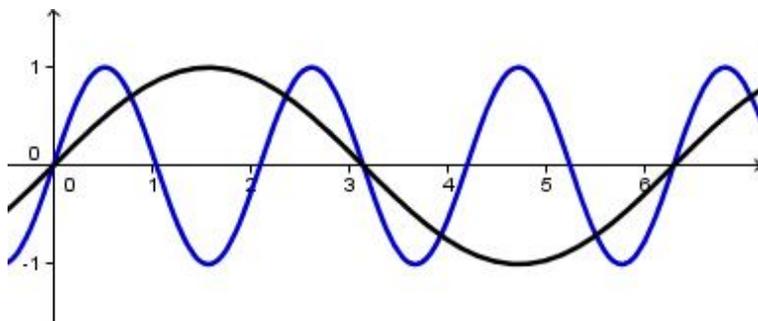


Gráfico 1: dois sons puros $-f_1(x)$ e $f_2(x)$

O próximo gráfico mostra a onda resultante da sobreposição das duas ondas anteriores.

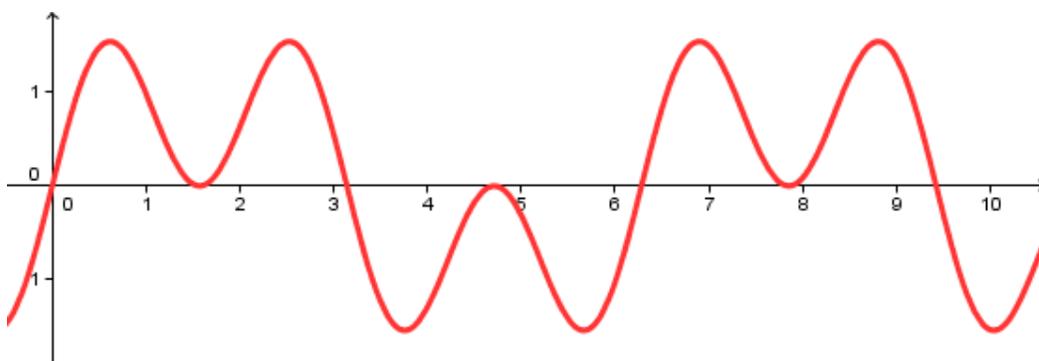


Gráfico 2: Som complexo - resultante da sobreposição dos sons puros $-f_3(x)$

Pensando matematicamente, podemos representar as duas ondas de sons puros com as respectivas funções: $f_1(x) = \text{sen } 3x$ e $f_2(x) = \text{sen } x$.

Como podemos representar matematicamente a onda resultante desta sobreposição?

A onda resultante é a mesma indicada por $f_3(x) = \text{sen } 3x + \text{sen } x$.

A fórmula para soma de senos é:

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

Assim, a função descrita no gráfico 2 é:

$$\sin 3x + \sin x = 2 \cdot \sin \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2}$$

$$f_3(x) = 2 \cdot \text{sen } 2x \cdot \text{cos } x$$

Observação

Conhecendo os valores das funções trigonométricas e realizando operações de adição e subtração de arcos, outras transformações das funções podem ser encontradas, como:

seno da soma,
seno da diferença,
seno do arco duplo,
triplo, etc.

Veja ▼

$$\text{sen } 2a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \text{cos } a$$

$$\text{sen } 3a = \text{sen } (2a + a)$$

...

NOTAS

¹ A fórmula da soma de senos é resultante das seguintes operações:

$$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \text{cos } b + \text{sen } b \cdot \text{cos } a$$

e

$$\text{sen } (a - b) = \text{sen } a \cdot \text{cos } b - \text{sen } b \cdot \text{cos } a$$

Adicionando as duas equações temos:

$$\begin{aligned} \text{sen } (a + b) + \text{sen } (a - b) &= (\text{sen } a \cdot \text{cos } b + \text{sen } b \cdot \text{cos } a) + (\text{sen } a \cdot \text{cos } b - \text{sen } b \cdot \text{cos } a) = \\ &= 2 \cdot \text{sen } a \cdot \text{cos } b. \end{aligned}$$

Conceitos e Notação Musical



Objetivos:

- Conceituar notas e escalas musicais.
- Observar o padrão formado pelas frequências de uma escala musical.
- Definir progressão geométrica.

Anteriormente definimos que *música* é a organização de dois elementos: *sons* e *silêncio*. Os sons das músicas são compostos por *notas musicais*.

O que são notas musicais?

Nota musical é o número de repetições de uma forma de onda do espectro sonoro audível em um segundo.

Musicalmente falando, é um sinal gráfico que representa a altura e a duração dos sons musicais. O número de repetições de uma forma de onda por segundo é definido como frequência do sinal, que é dada em Hertz (Hz).

São sete as notas musicais:

DÓ, RÉ, ME, FÁ, SOL, LA, SI - a partir daí há repetição

Alguns países utilizam o sistema de cifras para representar as notas:

C, D, E, F, G, A, B

Qual é a relação entre a frequência de uma nota musical e a próxima nota na escala?

Para responder esta pergunta, vamos fazer a seguinte experiência:

- 1) Alinhe oito copos de vidro iguais. Bata com uma baqueta¹ em cada um deles, para certificar-se de que, quando estão vazios, eles emitem o mesmo som.

¹ Objeto, preferencialmente, de madeira, utilizado para bater levemente nos copos.
Sugestão: lápis.

Curiosidade

Em alguns países, como na Alemanha, o si é representado por H.

- 2) Feito isso, coloque diferentes quantidades de água em cada um dos copos. Alinhe-os de forma que as quantidades de água sejam crescentes. E, verifique que, ao serem percutidos com a baqueta, cada copo emite um som diferente.

Por que o som se altera em cada copo?

O som ouvido em cada copo, a partir do segundo, é mais grave ou mais agudo que o som do copo anterior a ele? Por quê?

Vamos observar qual a relação existente entre as quantidades de água nos copos e a frequência emitida por cada um ao serem percutidos.

Para isso, precisamos de um frequencímetro. Assim, vamos anotar cada uma das frequências emitidas pelos copos ao serem percutidos com a baqueta.

Copo 1

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Copo 2

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Copo 3

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Copo 4

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Copo 5

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Copo 6

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Copo 7

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Copo 8

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Depois de testarmos alguns níveis de água para verificarmos a frequência emitida, vamos “criar” uma escala de dó a dó, variando convenientemente as quantidades de água nos copos.

Para isso utilizamos uma tabela de frequências de notas musicais, ou um instrumento musical afinado (um violão ou um piano, por exemplo), para fazer comparações.

Observação

Com o auxílio da tecnologia, podemos saber a frequência exata de um som além de observar sua forma de onda.

Abaixo um exemplo de aplicativo que pode ser usado com este objetivo:



Copo 1

Nível de água: _____ Freqüência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 2

Nível de água: _____ Freqüência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 3

Nível de água: _____ Freqüência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 4

Nível de água: _____ Freqüência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 5

Nível de água: _____ Freqüência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 6

Nível de água: _____ Freqüência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 7

Nível de água: _____ Freqüência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 8

Nível de água: _____ Freqüência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Há um padrão numérico entre as freqüências de uma escala musical. Qual é este padrão?

Se olharmos com atenção a ordem das freqüências da escala musical que criamos, podemos concluir que elas estão aumentando em uma mesma razão.

E ainda, se dividirmos qualquer freqüência, a partir da segunda, pela anterior a ela na escala musical, encontraremos sempre o mesmo valor.

A esta seqüência numérica que as freqüências foram damos o nome de ***progressão geométrica***.

O que é uma progressão geométrica?

Progressão geométrica ***é uma seqüência numérica*** com a seguinte característica:

A partir do segundo termo, o quociente entre um elemento e seu antecessor é sempre igual.

A este quociente damos o nome de razão.

Assim, na sequência das frequências musicais notamos uma progressão geométrica:

PG = (349,2282 Hz; 391,9954 Hz; 440 Hz; 493,8833 Hz), com razão, aproximadamente, igual a 1,12246

Essa sequência equivale, respectivamente, as frequências das notas: Fá, Sol, Lá e Si.

Entre as sete notas musicais existem outras notas que chamamos de sustenidos (#) ou bemois (*b*), dependendo da nota.

Por exemplo, a nota que está entre o Dó e o Ré se chama Dó# (Dó sustenido), ou Ré*b* (Ré bemol).

Assim, a ordem das doze notas musicais é:

Dó, Dó# (ou Ré*b*), Ré, Ré# (ou Mi*b*), Mi, Fá, Fá# (ou Sol*b*), Sol, Sol# (ou Lá*b*), Lá, Lá# (ou Si*b*), Si

Veja que entre as notas Mi e Fá, não há notas intermediárias. Dessa forma a nota Mi# é exatamente a nota Fá, assim como, Fab é igual a Mi. Esse fato também ocorre entre o Si e o Dó:

Si# = Dó e Dó*b* = Si.

Esse conjunto das doze notas é chamado de oitava, e isso significa que a frequência de cada nota **dobra** quando muda para oitava acima e **cai pela metade** uma oitava abaixo.

Qual a razão da progressão geométrica composta pelas frequências das doze notas musicais?

As frequências que queremos observar são:

Dó = 261,6256 Hz;
Dó# = 277,1826 Hz;
Ré = 293,6648 Hz;
Ré# = 311,127 Hz;
Mi = 329,6276 Hz;
Fá = 349,2282 Hz;
Fá# = 369,9944 Hz;
Sol = 391,9954 Hz;
Sol# = 415,3047 Hz;

Lá = 440 Hz;
Lá# = 466,1638 Hz;
Si = 493,8833 Hz;
Dó = 523,2511 Hz

Segundo a definição que acabamos de aprender, se dividirmos qualquer frequência, a partir da segunda, pela anterior, teremos a razão da PG.

Assim,

$$277,1826 \div 261,6256 \approx 1,05946$$

Podemos comprovar, fazendo mais algumas divisões:

$$349,2282 \div 329,6276 \approx 1,05946$$

$$440 \div 415,3047 \approx 1,05946$$

Desta forma, concluímos que a *razão (q)* da progressão geométrica formada pelas frequências das notas musicais é igual a **1,05946**.

A partir do segundo termo, o quociente entre um elemento e seu antecessor é sempre igual.

A este quociente damos o nome de razão.

Assim, na sequência das frequências musicais notamos uma progressão geométrica:

PG = (349,2282 Hz; 391,9954 Hz; 440 Hz; 493,8833 Hz), com razão, aproximadamente, igual a 1,12246

Essa sequência equivale, respectivamente, as frequências das notas: Fá, Sol, Lá e Si.

APÊNDICE E – Questionário Inicial

QUESTIONÁRIO INDIVIDUAL - INICIAL

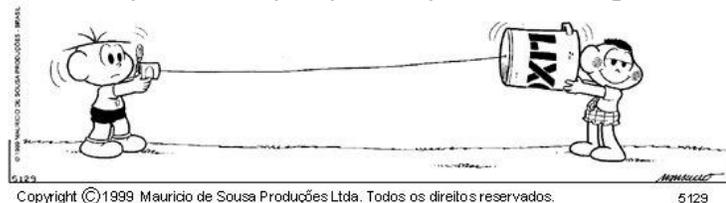
DADOS PESSOAIS

Nome: _____ Idade: _____ anos

Escola: () pública () privada Série: _____

MÚSICA

- 1) Há quanto tempo participa das oficinas do Instituto Prosdócimo Guerra?
- 2) Você toca algum instrumento? Qual ou quais? Há quanto tempo?
- 3) Por que você participa de oficinas de música?
- 4) A sua rotina na escola mudou depois que você começou a participar das oficinas de música? Se mudou, conte-me o que.
- 5) O que você entende por som?
- 6) Geralmente a voz das mulheres é menos “grossa” que a dos homens. Qual é a explicação deste fato?
- 7) Dois imaginários habitantes da Lua poderiam se comunicar por meio de ondas sonoras, como fazemos aqui na Terra? Por quê?
- 8) A tira de humor a seguir ilustra um brinquedo comum – *telefone com fio*. Este brinquedo nada mais é que dois copos presos por um fio longo.



Como você acha que esse brinquedo funciona?

- 9) Você sabia que a música possui relações importantes com a matemática?
() sim () não

MATEMÁTICA

- 1) Você gosta de matemática?
- 2) Sobre trigonometria você considera que conhece:
() nada () pouco () muito

3) Sobre progressão geométrica você considera que conhece:
() nada () pouco () muito

4) Faça um esboço do gráfico da função seno.

5) Qual é o período da função seno, ou seja, iniciando do zero, em qual valor a função seno começa a se repetir?

6) O que é uma progressão geométrica?

7) Descubra qual o próximo elemento da seguinte sequência numérica:
11, 33, 99, 297,...

8) E, qual é o vigésimo termo da sequência anterior?

APÊNDICE F – Respostas Questionário Inicial

Idade:

Estudante A: 15 anos
Estudante B: 14 anos
Estudante C: 15 anos
Estudante D: 14 anos
Estudante E: 15 anos
Estudante F: 14 anos

Série:

Todos 1º ano do EM

Escola Pública: 5 alunos

Escola Privada: 1 aluna

Há quanto tempo participa das oficinas do Instituto Prosdócimo Guerra?

Estudante A: 3 meses
Estudante B: 4 meses
Estudante C: 1 ano e meio
Estudante D: 4 anos
Estudante E: 2 anos e meio
Estudante F: 2 anos e meio

Você toca algum instrumento? Qual ou quais? Há quanto tempo?

Estudante A: viola – 4 anos
Estudante B: violino – 4 meses
Estudante C: viola clássica – 1 ano e meio
Estudante D: violino – mais de 7 anos
Estudante E: violoncelo – 2 anos e meio
Estudante F: violoncelo – 2 anos e meio; violão – 4 anos

Por que você participa de oficinas de música?

Estudante A: Porque eu me sinto bem tocando música
Estudante B: Pois amo música e me interessei em aprender mais um pouco sobre esses ritmos
Estudante C: Porque era um sonho meu e pretendo seguir carreira um dia
Estudante D: Porque gosto.
Estudante E: Porque o violoncelo me agrada muito. Meu interesse pela música é grande
Estudante F: Porque eu gosto da música

Seu desempenho na escola mudou depois que você começou a participar das oficinas de música? Se mudou, conte-me o que.

Estudante A: Não
Estudante B: Sim, ela melhorou em todos os sentidos pois a oficina de música abriu meu interesse mais em ter um compromisso sério com minhas coisas.
Estudante C: Mais ou menos
Estudante D: Não

Estudante E: Algumas coisa, presto mais atenção nas aulas. E a música ajuda nas matérias, como assuntos de ondas sonoras ou “resonância”.

Estudante F: Sim, um pouco talvez na matemática.

O que você entende por som?

Estudante A: Nada

Estudante B: Som é tudo aquilo que ouvimos.

Estudante C: meio de comunicação

Estudante D: conjunto de ondas sonoras

Estudante E: som pra mim é tudo que ouvimos

Estudante F: o som é transmitido através das ondas sonoras, que possui altura, tempo, frequência, etc.

Geralmente a voz das mulheres é menos “grossa” que a dos homens. Qual é a explicação deste fato?

Estudante A: não sei exatamente.

Estudante B: vi na escola mais não me lembro.

Estudante C: sim, a tendência da voz feminina é ser mais aguda.

Estudante D: o homem possui uma voz grave, e a mulher uma voz aguda.

Estudante E: As mulheres por vários fatores (como as cordas vocais) têm a voz AGUDA em relação a dos homens.

Estudante F: não sei.

Dois imaginários habitantes da Lua poderiam se comunicar por meio de ondas sonoras, como fazemos aqui na Terra? Por quê?

Estudante A: Sim. O porque não sei.

Estudante B: Não, pois não há som no vácuo.

Estudante C: Não sei.

Estudante D: Não, acredita que na lua não se tem o chamado reverb conhecido como eco.

Estudante E: Não, porque o som não se propaga no espaço.

Estudante F: Não sei.

A tira de humor a seguir ilustra um brinquedo comum – *telefone com fio*. Este brinquedo nada mais é que dois copos presos por um fio longo.



Copyright ©1999 Mauricio de Sousa Produções Ltda. Todos os direitos reservados.

5129

Como você acha que esse brinquedo funciona?

Estudante A:

Estudante B: Através das ondas sonoras que permitem que saem o som.

Estudante C: Não sei.

Estudante D: O fio que liga um copo ao outro transmite as ondas sonoras.

Estudante E: A frequência que o som da voz de um deles passa pelo fio e ecoa na outra lata.

Estudante F: Funciona por ondas sonoras.

Você sabia que a música possui relações importantes com a matemática?

- Estudante A: Não
- Estudante B: Sim
- Estudante C: Não
- Estudante D: Sim
- Estudante E: Sim
- Estudante F: Sim

Você gosta de matemática?

- Estudante A: Sim
- Estudante B: Sim
- Estudante C: Não
- Estudante D: Não
- Estudante E: Um pouco
- Estudante F: Sim

Sobre trigonometria você considera que conhece:

nada pouco muito

- Estudante A: Nada
- Estudante B: Pouco
- Estudante C: Pouco
- Estudante D: Pouco
- Estudante E: Pouco
- Estudante F: Nada

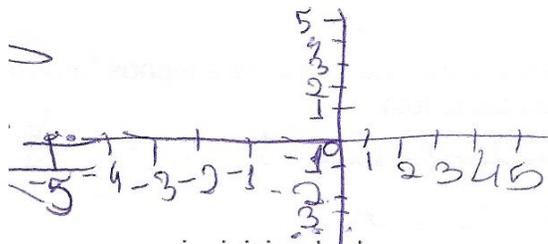
Sobre progressão geométrica você considera que conhece:

nada pouco muito

- Estudante A: Pouco
- Estudante B: Pouco
- Estudante C: Pouco
- Estudante D: Pouco
- Estudante E: Pouco
- Estudante F: Não muito

Faça um esboço do gráfico da função seno.

- Estudante A: não sei
- Estudante B: *em branco*
- Estudante C:



- Estudante D: *em branco*
- Estudante E: não lembro, já estudei
- Estudante F: não sei

Qual é o período da função seno, ou seja, iniciando do zero, em qual valor a função seno começa a se repetir?

- Estudante A: não me lembro
- Estudante B: a partir da segunda
- Estudante C: não sei
- Estudante D: *em branco*
- Estudante E: não lembro, já estudei
- Estudante F: não sei.

O que é uma progressão geométrica?

- Estudante A: nunca vi
- Estudante B: não me lembro, pois faltei essa aula
- Estudante C: não sei
- Estudante D: *em branco*
- Estudante E: é uma sequência de números
- Estudante F: não sei.

**Descubra qual o próximo elemento da seguinte sequência numérica:
11, 33, 99, 297,...**

- Estudante A: *em branco*
- Estudante B: não faço ideia
- Estudante C: não sei
- Estudante D: *em branco*
- Estudante E: 308
- Estudante F: 891.

E, qual é o vigésimo termo da sequência anterior?

- Estudante A: *em branco*
- Estudante B: não sei
- Estudante C: não sei
- Estudante D: *em branco*
- Estudante E:

a₂₀ = ?

11, 33, 99, 297, ...

interpolador

ou

calcular o número de termos?

Estudante F: 53460

APÊNDICE G – Atividades 4º encontro

ALUNO: _____

DATA: _____

ATIVIDADES

1) Vamos montar uma tabela de frequência das notas musicais, utilizando o aplicativo M TOOLS.

- i) Toque a escala musical em algum instrumento conhecido por você;
- ii) Verifique no aplicativo qual a frequência de cada nota e anote;
- iii) Faça isso, pelo menos, para duas escalas.

Nota: _____ Frequência emitida: _____ Hz

2)

- i. Alinhe oito copos de vidro iguais. Bata com uma baqueta em cada um deles, para certificar-se de que, quando estão vazios, eles emitem o mesmo som.
- ii. Feito isso, coloque diferentes quantidades de água em cada um dos copos. Alinhe-os de forma que as quantidades de água sejam crescentes. E, verifique o que ocorre com os sons.

- Por que o som se altera em cada copo?

- O som ouvido em cada copo, a partir do segundo, é mais grave ou mais agudo que o som do copo anterior a ele? Por quê?

3) Depois de testarmos alguns níveis de água para verificarmos a frequência emitida, vamos “criar” uma escala de dó a dó, variando convenientemente as quantidades de água nos copos.

Para isso utilizamos a tabela de frequências de notas musicais que fizemos no exercício 1 e um instrumento musical afinado (um violão ou um piano, por exemplo), para fazer comparações.

Copo 1

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz
Equivalente a nota musical: _____

Copo 2

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz
Equivalente a nota musical: _____

Copo 3

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz
Equivalente a nota musical: _____

Copo 4

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz
Equivalente a nota musical: _____

Copo 5

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz
Equivalente a nota musical: _____

Copo 6

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 7

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 8

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 9

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 10

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 11

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 12

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Copo 13

Nível de água: _____ Frequência emitida: _____ Hz

Equivalente a nota musical: _____

Há um padrão numérico entre as frequências de uma escala musical. Qual é este padrão?

Apêndice H – Partitura das músicas Sambalele e Cai Cai Balão

Sambalele

Música e versos recolhidos por Oneida Alvarenga,
in "Melodias registradas por meios não mecânicos"
(1º volume), 1946, Arg. Folclórico da Discoteca Pública Munic.,
Prefeitura Municipal de São Paulo.

Musical score for Sambalele, featuring four staves of music with lyrics in Portuguese. The score includes chord markings (F, C) and a key signature of one flat (B-flat).

Sambalele tá do - en - te Tá co'a ca - be - ça que - bra - da,
Sambalele pre - ci - sa - va É d'na - mes oi - to taru - ba - da
Pi - sa, pi - sa, Pi - sa, mu - la - ta, Pi - sa na bar - ra da sai - a, mu - la - ta,
Pi - sa, pi - sa, Pi - sa, mu - la - ta Pi - sa na bar - ra da sai - a.

Copyright © 2002 Alessandro Valente / Jangada Brasil
<http://www.jangadabrasil.com.br>

WWW.MAMALISA.COM

CAI CAI BALÃO

Musical score for Cai Cai Balão, featuring three systems of music with lyrics in Portuguese. The score includes a key signature of one flat (B-flat) and a time signature of 2/4.

Cai cai ba - lão, cai cai ba - lão a -
-qui na mi - nha mão. Não cai não, não cai não, não cai
não cai na ru - a do sa - bão. Cai bão.

WWW.MAMALISA.COM

Apêndice I – Questionário Individual Final

QUESTIONÁRIO INDIVIDUAL – FINAL

Nome: _____

1) O que você entende por som?

2) Geralmente a voz das mulheres é menos “grossa” que a dos homens. Qual é a explicação deste fato?

3) Dois imaginários habitantes da Lua poderiam se comunicar por meio de ondas sonoras, como fazemos aqui na Terra? Por quê?

4) A tira de humor a seguir ilustra um brinquedo comum – telefone com fio. Este brinquedo nada mais é que dois copos presos por um fio longo.

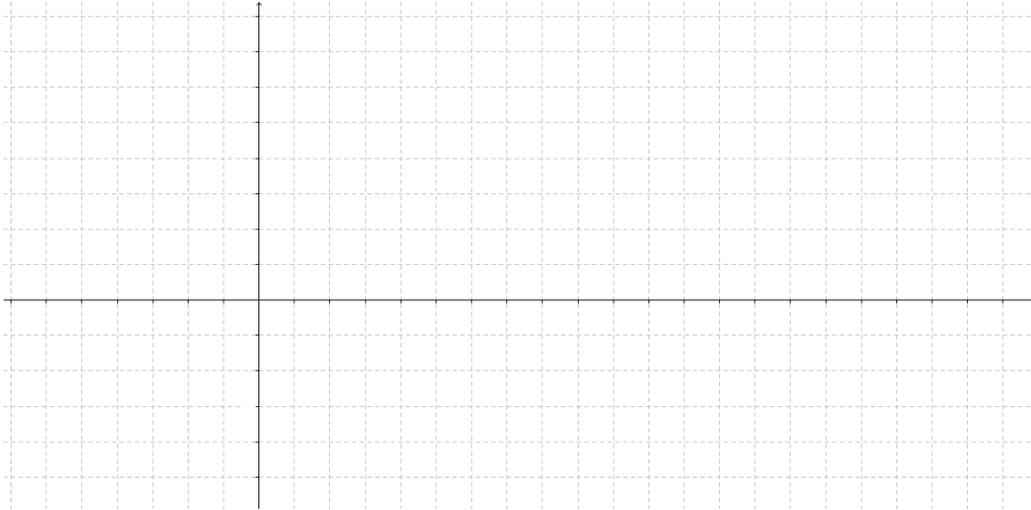


Copyright ©1999 Mauricio de Sousa Produções Ltda. Todos os direitos reservados.

5129

Como você acha que esse brinquedo funciona?

5) Faça um esboço do gráfico da função seno.



6) O que este gráfico tem em comum com o som?

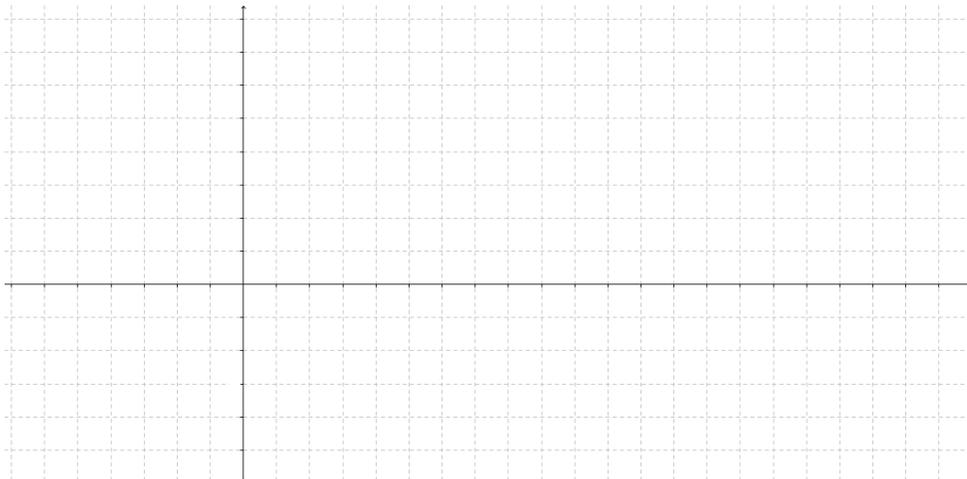
7) Qual é o período da função seno, ou seja, iniciando do zero, em qual valor a função seno começa a se repetir?

8) Que informações nos é fornecida no eixo horizontal de uma onda sonora?

9) Que informações nos é fornecida no eixo vertical de uma onda sonora?

10) Considere a função $y(x) = \text{sen } x$, que descreve um som harmônico.

a) Esboce a representação de dois sons sobrepostos de amplitude A e frequência f e $2f$.

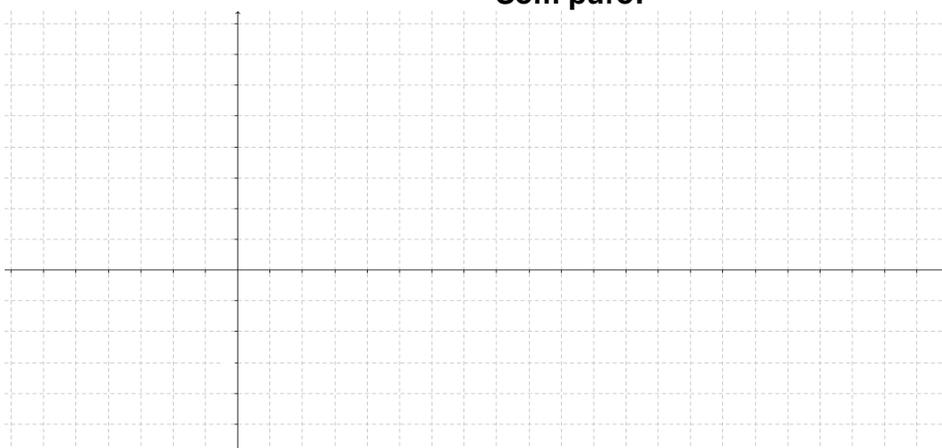


11) Os sons que ouvimos possuem somente ondas representadas pela função $y = \text{sen } x$?

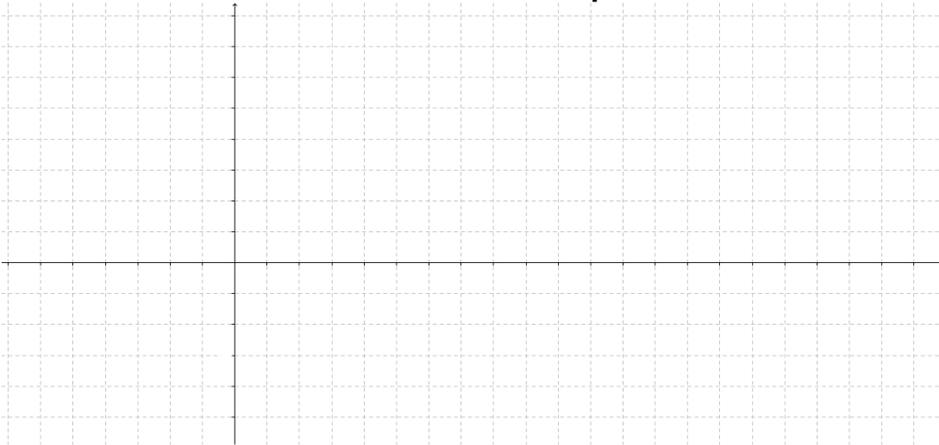
12) O que é um som complexo?

13) Faça um esboço de um som puro e de um som complexo.

Som puro:



Som complexo:



14) Produza no osciloscópio (utilize o aplicativo Oscium iMSO2) a soma de duas ondas sonoras de frequências 30Hz e 90Hz, com mesma amplitude. Desenhe o resultado encontrado.



15) Qual a frequência do som complexo obtido anteriormente?

16) Qual é a relação entre a frequência de uma nota musical e a próxima nota na escala?

17) Analise as frequências das notas musicais abaixo:

Dó0 = 8,175799 Hz

Dó#0 = 8,661957 Hz

Ré0 = 9,177024 Hz

Ré#0 = 9,722718 Hz

Mi0 = 10,30086 Hz

Fá0 = 10,91338 Hz

Fá#0 = 11,56233 Hz

Qual a relação existente entre estas frequências, dispostas nesta ordem?

18) Suponha que conheçamos apenas frequência das notas Sol#(415.3047 Hz) e Lá (440 Hz). De que modo podemos descobrir a frequência da nota Si na mesma escala? E da nota Sol, duas escalas acima? Há um padrão para encontrar estas frequências? Qual?

19) Descubra qual o próximo elemento da seguinte sequência numérica:

11, 33, 99, 297,...

20) E, qual é o vigésimo termo da sequência anterior?

APÊNDICE J – Descrição dos Resultados do Questionário Final

1) O que você entende por som?

Fernanda: O som são ondas sonoras transmitidas pelo ar; fio; ferro; água, ou seja, por algum meio de “comunicação”.

Letícia: Som é tudo aquilo que somos capazes de ouvir, ele só chega a nós se tiver um meio para se propagar, mas só é entendido como SOM quando chega ao nosso cérebro, antes disso ele é onda. Antes de passar a ser som, a onda vira, mecânica, hidráulica e elétrica.

Eduarda: Som é tudo aquilo que ouvimos.

Ezequiel: Som é um meio de comunicação com as pessoas por meio de ondas sonoras.

Alan: Som é tudo o que você faz qualquer coisa que você bata vai sair um som. Ex: Se você bater em uma madeira sairá um som.

2) Geralmente a voz das mulheres é menos “grossa” que a dos homens. Qual é a explicação deste fato?

Fernanda: sendo a voz das mulheres mais aguda ela faz mais ciclos em um segundo e os homens ao contrário.

Letícia: Por vários fatores, incluindo os ossos, as mulheres emitem ondas sonoras com mais ciclos que as dos homens, oscilando e assim sendo mais agudas.

Eduarda: Pois ela faz mais ciclos em 1 segundo, quanto mais ciclos mais agudo fica.

Ezequiel: Porque ela quando canta ocorre que a voz dela possui frequência maior de oscilação.

Alan: A voz da mulher é mais fina que a de um homem porque quanto mais vibração tiver, mais ciclos em um segundo terá.

3) Dois imaginários habitantes da Lua poderiam se comunicar por meio de ondas sonoras, como fazemos aqui na Terra? Por quê?

Fernanda: Não, porque na lua não existe ar, e o som precisa de um meio físico para se propagar, ou seja, o som não se propaga no vácuo.

Letícia: Não, porque o som não se propaga no espaço.

Eduarda: Não, pois não existe som no vácuo.

Ezequiel: Através do ar que leva as conversas até a outra pessoa direto ao cérebro.

Alan: em branco

4) A tira de humor a seguir ilustra um brinquedo comum – telefone com fio. Este brinquedo nada mais é que dois copos presos por um fio longo.



Copyright ©1999 Mauricio de Sousa Produções Ltda. Todos os direitos reservados.

5129

Como você acha que esse brinquedo funciona?

Fernanda: O som se propaga mais rápido e com mais intensidade por meio do fio do que por meio do ar.

Letícia: O som transmitido por uma das pessoas se propaga no próprio copo e se propaga por meio do fio, levando o som até o outro copo.

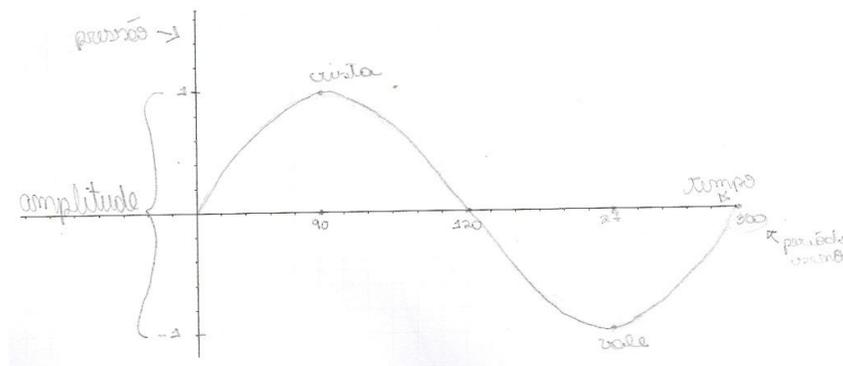
Eduarda: Pois o som se propaga em um meio.

Ezequiel: Porque o som se propaga por um meio.

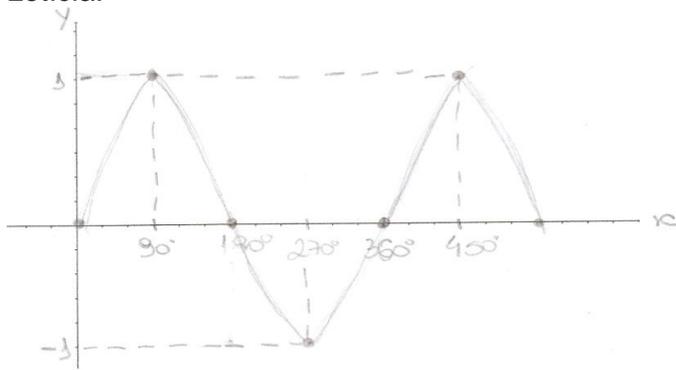
Alan: Quando uma pessoa fala de um lado as ondas sonoras se propagam em meio o barbante até chegar ao outro lado.

5) Faça um esboço do gráfico da função seno.

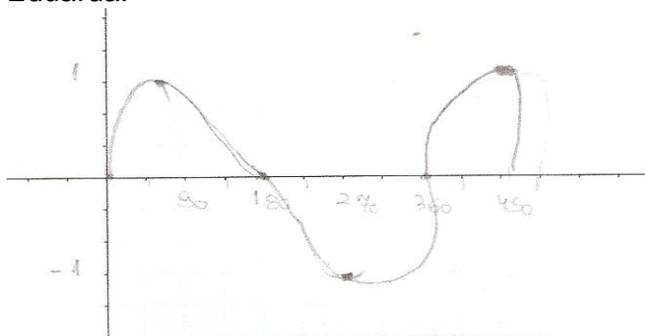
Fernanda:



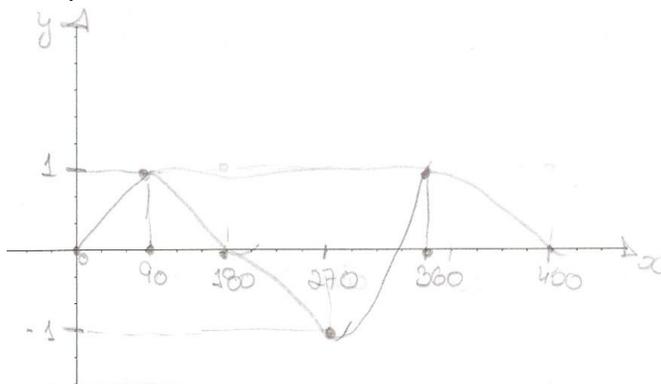
Letícia:



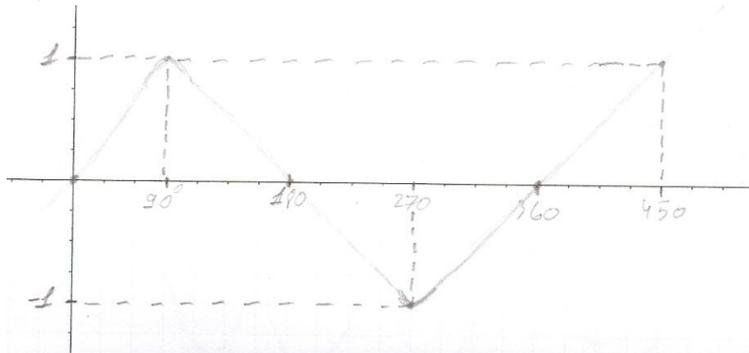
Eduarda:



Ezequiel:



Alan:



6) O que este gráfico tem em comum com o som?

Fernanda: Pressão e rarefação.

Letícia: Mostra as ondas sonoras, como elas são quando o som é emitido.

Eduarda: Bom, ele demonstra frequências, ciclos que o som emite.

Ezequiel: Mostra as ondas emitidas pelo instrumento.

Alan: em branco.

7) Qual é o período da função seno, ou seja, iniciando do zero, em qual valor a função seno começa a se repetir?

Fernanda: 360° .

Letícia: Em 360° .

Eduarda: No 360° .

Ezequiel: Vai se repetir em 360° .

Alan: A função seno começa a se repetir no 360° .

8) Que informações nos é fornecida no eixo horizontal de uma onda sonora?

Fernanda: O tempo, que indica a frequência.

Letícia: Tempo que indica frequência.

Eduarda: Tempo.

Ezequiel: O tempo.

Alan: No eixo horizontal é o tempo.

9) Que informações nos é fornecida no eixo vertical de uma onda sonora?

Fernanda: A pressão, que representa a amplitude da onda.

Letícia: Pressão = amplitude.

Eduarda: Pressão.

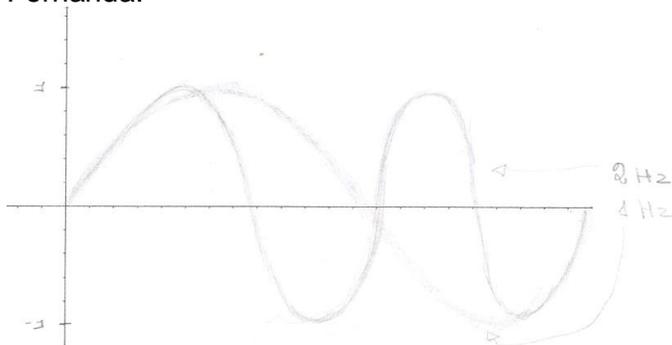
Ezequiel: Pressão.

Alan: No eixo vertical é a pressão.

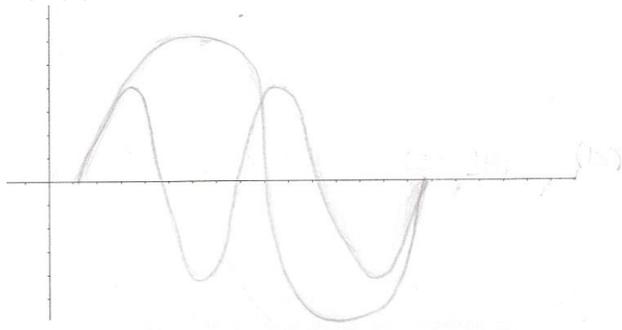
10) Considere a função $y(x) = \text{sen } x$, que descreve um som harmônico.

a) Esboce a representação de dois sons sobrepostos de amplitude A e frequência f e $2f$.

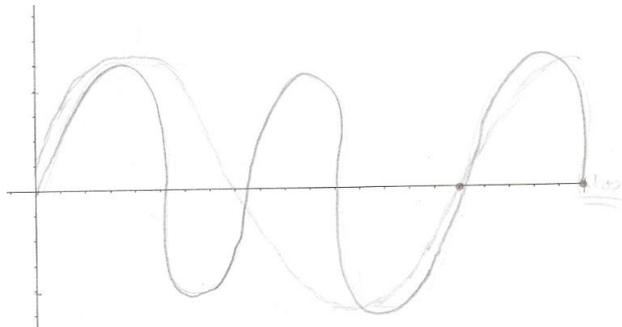
Fernanda:



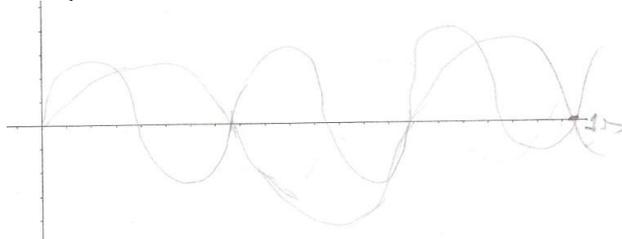
Letícia:



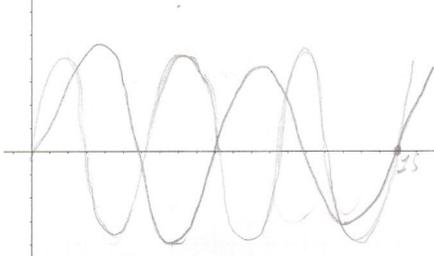
Eduarda:



Ezequiel:



Alan:



11) Os sons que ouvimos possuem somente ondas representadas pela função $y = \text{sen } x$?

Fernanda: Não porque existem outros que são formados nas junções dessas (complexas).

Letícia: Não, há ondas complexas, e ondas de som puro ($y = \text{sen } x$)

Eduarda: Não.

Ezequiel: Não, há ondas complexas e são formadas pela junção do seno.

Alan: em branco.

12) O que é um som complexo?

Fernanda: São formadas pela função seno.

Letícia: Que possui por exemplo duas ondas, uma de 1Hz e outra de 3Hz.

Eduarda: É um som que não tem uma ordem específica.

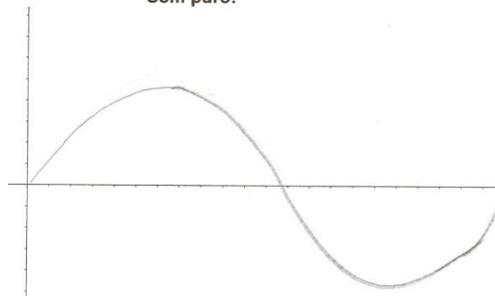
Ezequiel: A junção de 2 sons harmônicos. Uma é mais grave, menos ciclos em 1s, e a outra é mais aguda, mais ciclos em 1s.

Alan: em branco.

13) Faça um esboço de um som puro e de um som complexo.

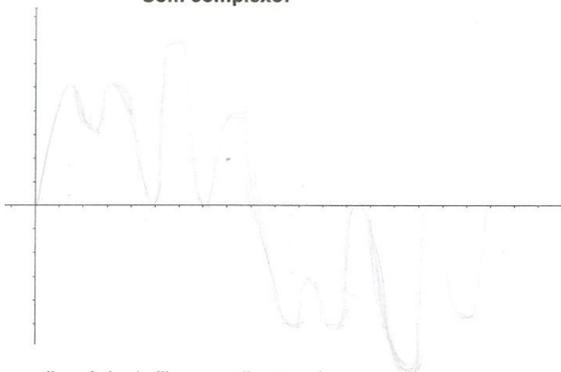
Todos:

Som puro:



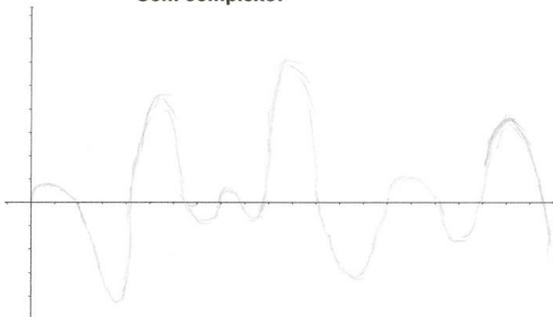
Fernanda:

Som complexo:



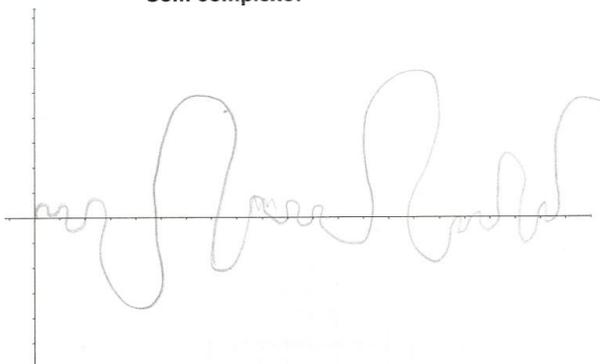
Letícia:

Som complexo:



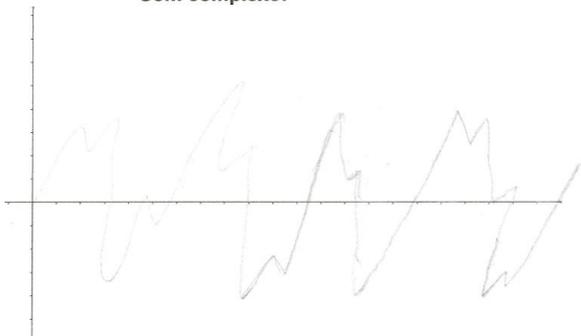
Eduarda:

Som complexo:



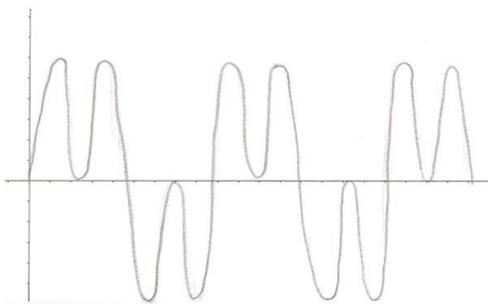
Alan:

Som complexo:



14) Produza no osciloscópio (utilize o aplicativo Oscium iMSO2) a soma de duas ondas sonoras de frequências 30Hz e 90Hz, com mesma amplitude. Desenhe o resultado encontrado.

Todos:



15) Qual a frequência do som complexo obtido anteriormente?

Fernanda: 30Hz.

Letícia: 30Hz.

Eduarda: 30Hz.

Ezequiel: 30Hz.

Alan: 30Hz.

16) Qual é a relação entre a frequência de uma nota musical e a próxima nota na escala?

Fernanda: É de que ela aumenta e é uma oitava acima.

Letícia: A próxima nota é a multiplicação de tal número pela frequência da nota atual.

Eduarda: De um dó para outro dó será o duplo dó, ou seja você deverá multiplicar por 2.

Ezequiel: A oscilação de uma nota para outra um determinado de uma para outra.

Alan: em branco.

17) Analise as frequências das notas musicais abaixo:

Dó = 8,175799 Hz

Dó#0 = 8,661957 Hz

Ré0 = 9,177024 Hz

Ré#0 = 9,722718 Hz

Mi0 = 10,30086 Hz

Fá0 = 10,91338 Hz

Fá#0 = 11,56233 Hz

Qual a relação existente entre estas frequências, dispostas nesta ordem?

Fernanda: Que são todos multiplicados por 1,0594

Letícia: Quando é dividido a frequência de uma nota pela frequência da nota anterior temos 1,05...

Eduarda: Que se você multiplicar o 8,175799 por 1,059 você vai ter o próximo número e os próximos.

Ezequiel: Que todas são multiplicadas por 1,0594.

Alan: em branco.

18) Suponha que conheçamos apenas frequência das notas Sol#(415.3047 Hz) e Lá (440 Hz). De que modo podemos descobrir a frequência da nota Si na mesma escala? E da nota Sol, duas escalas acima? Há um padrão para encontrar estas frequências? Qual?

Fernanda:

$$\begin{aligned} \text{Lá} &= \text{Sol} \\ 440 &= 415.3047 \\ &= \\ &= 1,059 \times 440 \\ \text{Lá\#} &= 466.46 \\ \text{Si} &= 493.66 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sol\#} &= 415.3047 \times 2 = \\ &= 830.6094 \times 2 = 1661.2188 \end{aligned}$$

Letícia:

$$\begin{aligned} \text{Sol\#} &= 415.3047 \\ \text{Lá} &= 440 \\ \text{Si} &= 493.16 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \times 1,059 \dots \\ & \times 1,05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si} &= 462 \text{ Hz} \\ \text{Sol} &= 1661.2188 \end{aligned}$$

Eduarda:

$$440 \div 415,3044 = 1,059$$

$$1A_{\#} = 440 \times 1,059 = 466,16$$

$$Si = 466,16 \times 1,059 = \underline{\underline{493,66}}$$

$$Sol = 830,6084 \times 2 = \boxed{1661; 2188}$$

Ezequiel:

$$440 \div 415,3047 = 1,059$$

$$2A_{\#} = 440 \cdot 1,059 = 466,16$$

$$Si = 466,16 \cdot 1,059 = \underline{\underline{493,66}}$$

$$Sol = 418,3047 \cdot 2 = 830,6094$$

$$\boxed{1661; 2188}$$

Alan: em branco.

**19) Descubra qual o próximo elemento da seguinte sequência numérica:
11, 33, 99, 297, ...**

Fernanda: $297 \times 3 = 891$

Letícia: 297

Eduarda: $99 \times 3 = 297$; $297 \times 3 = 891$

Ezequiel: $297 \times 3 = 891$

Alan: 891

20) E, qual é o vigésimo termo da sequência anterior?

Fernanda: 17820 (não apresentou cálculos)

Letícia: PG = (11, 33, 99, 297)

M = ?

Eduarda: 17 820 (não apresentou cálculos)

Ezequiel: 17 820 (não apresentou cálculos)

Alan: 12784876,14 (multiplicou pela razão até o vigésimo termo)